

УДК 539.3

© 1995 г. Булавин П.В., Шардаков И.Н.

ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПОГРУЖЕНИЯ

Приводятся основные положения метода геометрического погружения (МГП) для решения трехмерных краевых задач теории упругости в дифференциальной постановке. Если в качестве канонической области выбрать все евклидово пространство, то дифференциальная постановка сводится к соответствующему граничному интегральному уравнению, ядро которого – тензор Кельвина–Соммильяны. Численная реализация полученного граничного интегрального уравнения осуществляется с использованием гранично-элементной аппроксимации. Приведенные в работе численные эксперименты подтверждают доказанную теоретически сходимость итерационного процесса МГП. Эффективность данного подхода по сравнению с традиционным методом граничных интегральных уравнений при решении трехмерных задач теории упругости заключается в отсутствии трудоемких этапов обращения плотнозаполненной матрицы коэффициентов влияния при разрешении алгебраической системы уравнений прямыми методами и подбора параметров, обеспечивающих сходимость, при использовании итерационных методов.

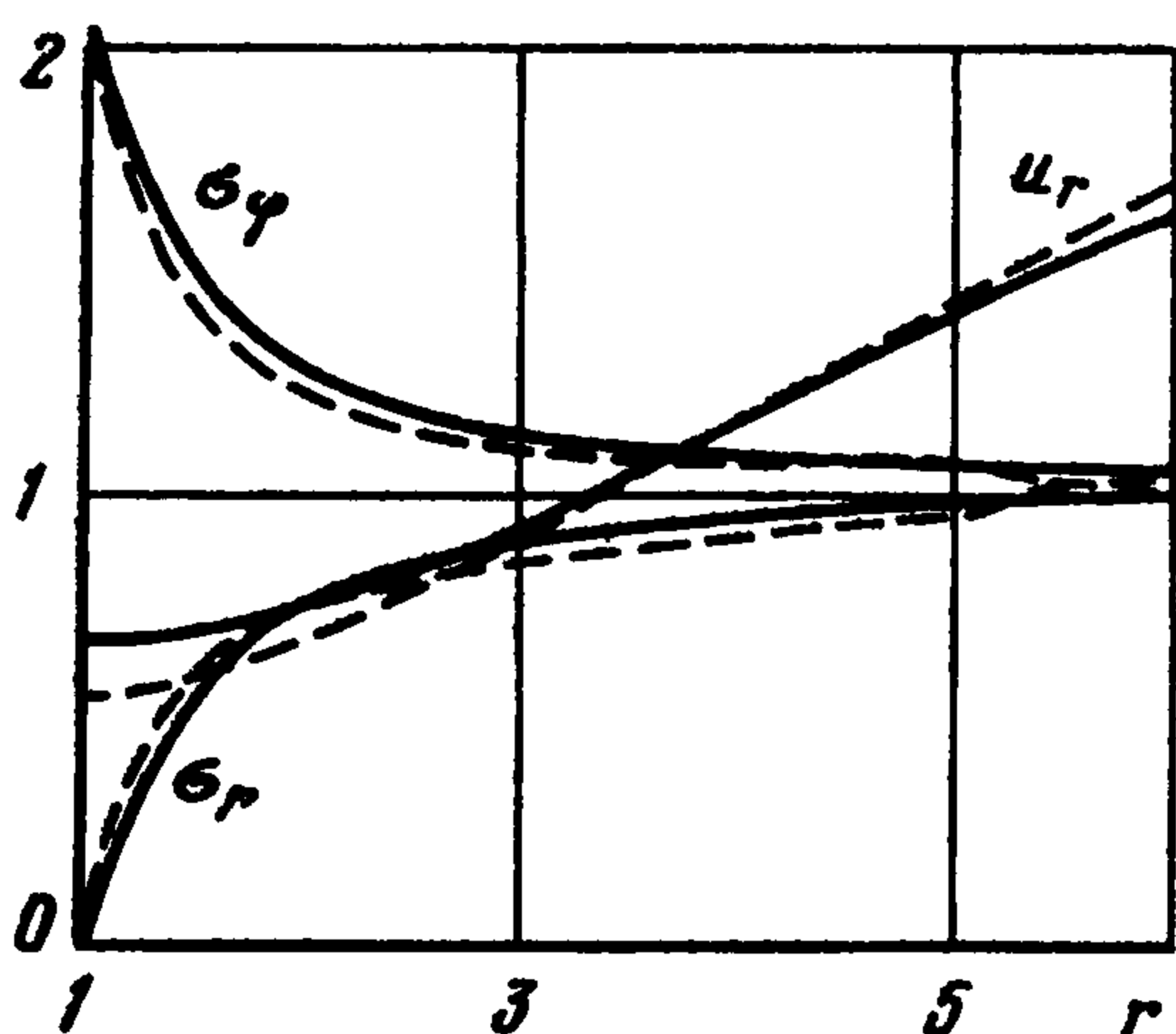
При расчете напряженно-деформированного состояния пространственных конструкций наряду с конечноразностными методами и методом конечных элементов широкое применение получил метод граничных элементов (МГЭ). Он обладает рядом преимуществ [1], в частности, приводит к уменьшению размерности исходной задачи и, как следствие, уменьшению порядка разрешающей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) на единицу. Однако в алгоритме МГЭ наиболее трудоемким этапом остается разрешение СЛАУ с плотнозаполненной несимметричной матрицей коэффициентов влияния.

Ниже описывается гранично-элементная реализация дифференциальной постановки МГП¹, которая, с одной стороны, позволяет сохранить все положительные стороны МГЭ, а с другой стороны, заменяет прямой процесс решения СЛАУ некоторой гарантированно сходящейся итерационной процедурой, что приводит к значительной экономии вычислительных ресурсов.

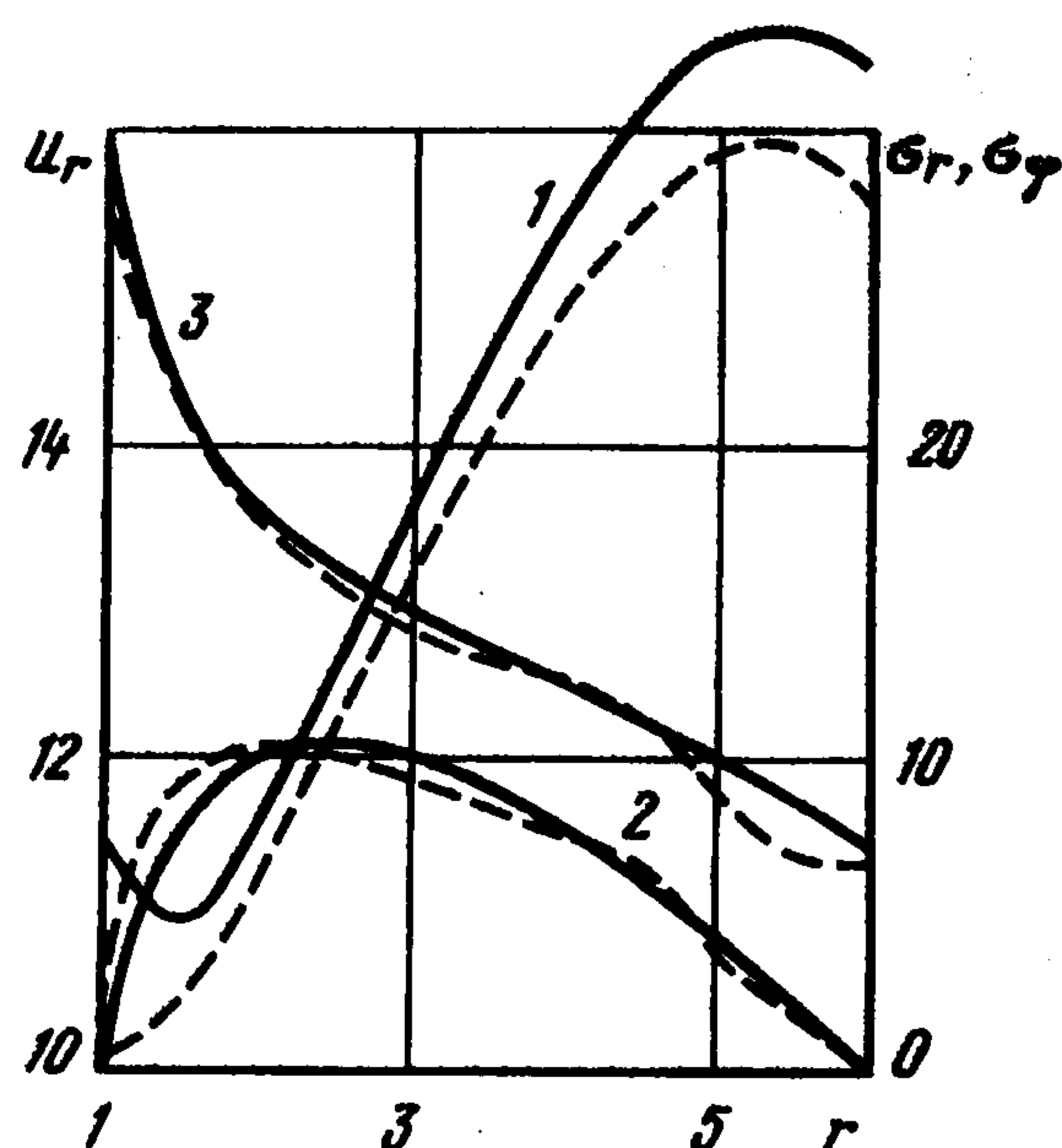
1. Дифференциальная постановка метода геометрического погружения. Рассмотрим упругое изотропное тело, занимающее в евклидовом пространстве R^3 область D с границей $S = \bigcup_1^N S_i$ (фиг. 1). Требуется отыскать вектор перемещений $u(x)$ краевой задачи теории упругости

$$\operatorname{div} \sigma(u) + f = 0, \quad x \in D; \quad n(x) \cdot \sigma(x) = g(x), \quad x \in S \quad (1.1)$$

где u , f , g – соответственно векторы перемещений, массовых и поверхностных сил, x –



Фиг. 4



Фиг. 5

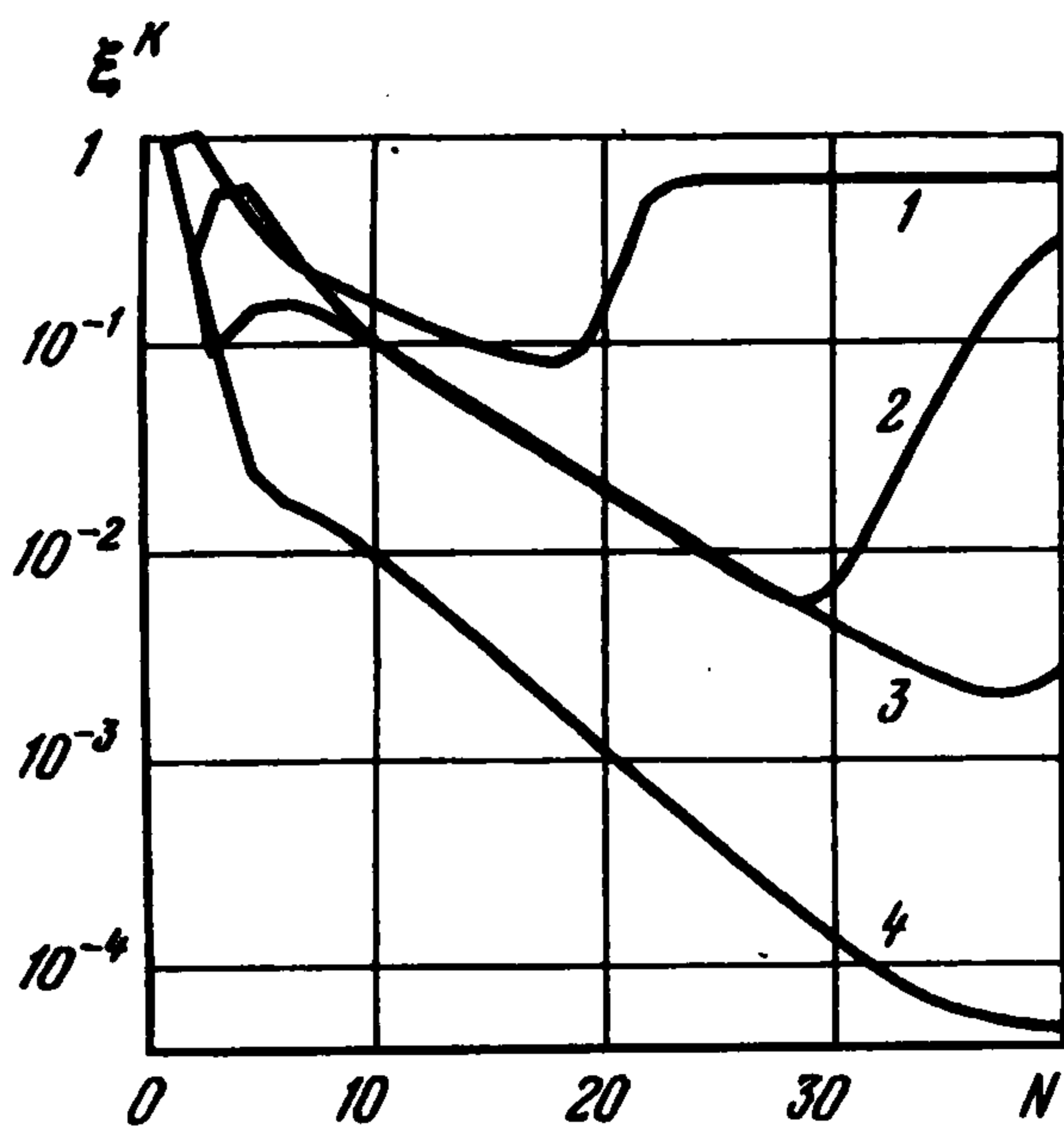
При достаточно хорошем разбиении поверхности цилиндра (кривые 3, 4) итерации МГП сходятся хорошо, и получаемое решение при выполненных 40 итерациях отличается от решения МГЭ в пределах точности ПЭВМ, а погрешность относительно решения Ламе не превышает 2%. Таким образом, характер сходимости итерационного процесса МГП является своеобразным критерием качества дискретизации границы рассчитываемой конструкции.

На фиг. 3 показана сходимость решения (перемещения u_x по оси X) задачи о кубе, нагруженном внешним единичным давлением по всей поверхности в зависимости от степени дискретизации границы (начало координат – в центре куба, длина ребра 2, модуль сдвига 1, коэффициент Пуассона 0,3). Приведены кривые изменения относительной погрешности $\varepsilon = |(u_x - u_x^0) / u_x^0| \times 100\%$ по оси x (u_x^0 – точное решение): кривые 1–3 соответствуют 6, 24 и 54 элементам.

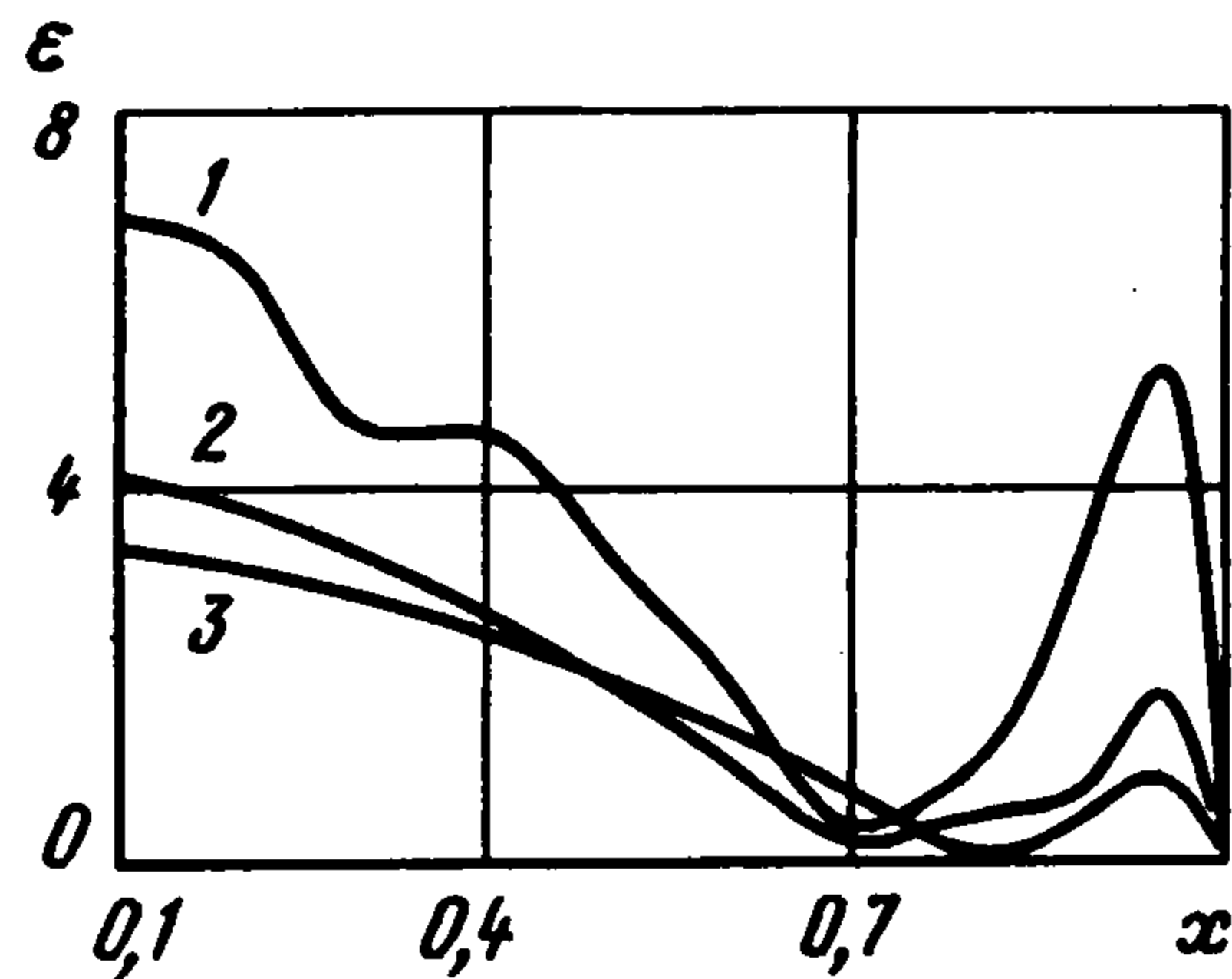
4. Решение задач. Тестовые задачи. Для проверки достоверности результатов, полученных при помощи МГП, был решен ряд тестовых задач и произведено сравнение с имеющимися аналитическими решениями. На фиг. 4 приведено решение задачи о пологом цилиндре, нагруженном единичным давлением по внешней боковой поверхности. Перемещения u_r и напряжения σ_r, σ_ϕ вычислялись в среднем поперечном сечении вдоль радиуса r (штриховые линии). Рассчитанные значения сравниваются с решением Ламе для полого цилиндра, находящегося в плоском напряженном состоянии (соответствующие сплошные линии). Параметры задачи: внешний радиус цилиндра b , внутренний радиус l , длина цилиндра 5 , модуль сдвига 1 , коэффициент Пуассона $0,3$.

Решение задачи о вращающемся диске с теми же геометрическими и физическими параметрами, что и в предыдущей задаче (угловая скорость вращения 1 , плотность материала 1), приведены на фиг. 5. Перемещения u_r и напряжения σ_r, σ_ϕ вычислялись в среднем поперечном сечении вдоль радиуса r (штриховые линии 1–3 соответственно). Рассчитанные значения сравниваются с аналитическим решением, полученным в [5] (соответствующие сплошные линии). Как видно из результатов, показанных на фиг. 5, соответствие полученных результатов с имеющимися аналитическими решениями очень хорошее.

Решение задачи о перфорированном цилиндре. В качестве иллюстрации эффективности граничноэлементной реализации дифференциальной постановки МГП при расчете напряженно-деформированного состояния существенно трехмерных конструкций была решена задача о цилиндре с внутренним каналом звездообразной формы. На фиг. 6 представлена расчетная схема рассматриваемой области. В качестве расчетной области бралась $1/8$ конструкции. Поверхность разбивалась на 14 граничных элементов, а внутренняя область для представления объемного интеграла – на 64 объемных ячейки. Исследовали решение для срединного сечения цилиндра $z = 0$ вдоль радиуса r в двух сечениях по угловой координате $\phi = 0^\circ$ и $\phi = 45^\circ$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Индексы s и v означают, что соответствующие величины получаются на основе данных, относящихся только к точкам поверхности (ss) или к точкам поверхности и объема (sv). На первом шаге решения итерационного уравнения вычисляются коэффициенты матриц F^{ss} , F^{sv} и произведение матрицы F^{sv} на вектор f . Затем выполняется L итераций с нулевым приближением $t^0 \equiv 0$. Сходимость итерационного процесса отслеживается по относительному среднеквадратичному отклонению двух последовательных приближений на k -й итерации:

$$\delta^k = \|t^k - t^{k-1}\| / \|t^k\| \quad (2.2)$$

где $\|\cdot\|$ – среднеквадратичная норма.

3. Сходимость метода геометрического погружения. Теоретически показано¹, что итерационная процедура МГП сходится всегда, независимо от степени отличия исходной области D от D_0 . Численная практика показала, что скорость сходимости решения дискретного итерационного уравнения (2.1) в значительной степени зависит от таких факторов, как точность интегрирования сингулярных интегралов по поверхности, степени дискретизации поверхности тела, соотношения объема тела и его поверхности. В целом можно отметить, что достаточная степень точности решения достигается при интегрировании поверхностных интегралов по схеме, содержащей 175 гауссовых точек, для сингулярных (включающих сингулярную точку) граничных элементов, 100 точек – для элементов, прилежащих к сингулярному и 25 точек интегрирования – для элементов, удаленных от сингулярной точки. Для получения удовлетворительного решения внутри области характерный размер граничных элементов не должен превышать 10% от характерного размера конструкции.

На фиг. 2 показаны кривые сходимости итерационного процесса МГП при разной степени дискретизации границы области. В качестве параметра сходимости выбрано относительное изменение величины δ (2.2) $\epsilon^k = |(\delta^k - \delta^{k-1})/\delta^k|$, где k – номер итерации. Численный эксперимент проводился для задачи о длинном цилиндре, нагруженном единичным внешним давлением по боковой поверхности (радиус цилиндра 1, длина 48, модуль сдвига 1, коэффициент Пуассона 0,3). Поверхность цилиндра разбивалась на 12, 16, 20, 24 граничных элемента (кривые 1, 2–4 соответственно).

Как видно из поведения кривых 1–3, начиная с некоторой итерации, итерационный процесс МГП расходится и продолжать решение бессмысленно. МГЭ в этом случае дает также неверное решение, отличающееся от решения Ламе для бесконечно длинного цилиндра более чем на 100%. Но для выяснения этого обстоятельства приходится полностью завершить процедуру решения СЛАУ и вычисления решения в точках области.

Было доказано¹, что по норме пространства $V_0(D_0)$, а соответственно и по норме пространства $V(D)$, последовательность $\{w^k\}$ сходится всегда, независимо от степени отличия исходной области D от D_0 , в которую она "погружена".

Если в качестве канонической области D_0 выбрать все евклидово пространство R^3 , то для уравнения (1.6) можно записать соответствующее интегральное уравнение, в котором обратным оператором краевой задачи служит функция Грина $G(x, \xi)$ (тензор Кельвина–Сомильяны [2])

$$w^k(x) = \int_D G(x, \xi) \cdot f(\xi) dD(\xi) + \int_S G(x, \xi) \cdot [g(\xi) + n^\Delta \cdot \sigma^\Delta(w(\xi)^{k-1})] dS \quad (1.7)$$

Здесь ξ – точка рассматриваемой области, по которой ведется интегрирование.

Используя стандартные методы теории потенциала [1, 2], физические соотношения и соотношения Коши (1.2), можно перейти от (1.7) к граничным интегральным уравнениям относительно усилий на границе рассматриваемой области

$$t^k(x) = \frac{1}{2} [g(x) + t(x)^{k-1}] + \int_S F(x, \xi) \cdot [g(x) + t(x)^{k-1}] dS + \int_D F(x, \psi) \cdot f(\psi) dD(\psi) \quad (1.8)$$

Здесь x, ξ – точки на границе S ; ψ – точка внутренней области D ; $t^k(x)$ – вектор искомых усилий на поверхности тела для k -й итерации, действующих со стороны дополнения D_Δ ; $t^0(x) = 0$; $F(x, \xi)$ – сингулярное ядро, являющееся тензором второго ранга. Соотношение (1.8) позволяет непосредственно определять вектор искомых усилий на границе S для класса задач с заданными условиями в напряжениях. Используя методы граничных интегральных уравнений, можно получить уравнения для перемещений, деформаций и напряжений как внутри области, так и на границе.

Итерационное интегральное уравнение (1.8) является базовым уравнением гранично-элементарной реализации дифференциальной постановки МГП. Для получения дискретного аналога уравнения (1.8) применяем хорошо разработанный аппарат МГЭ, причем отпадает необходимость решать СЛАУ относительно искомых неизвестных. Решение t^k определяется простой подстановкой в правую часть (1.8) найденного на предыдущей итерации вектора t^{k-1} ($k = 1, 2, 3, \dots, L$, где L – число выполненных итераций).

2. Численная реализация. Построение конечномерного аналога уравнения (1.8) осуществлялось в соответствии с подходом МГЭ [2]. Границу S области D аппроксимировали ансамблем N граничных элементов. В качестве граничных элементов использовали разрывные восьмиузловые элементы с квадратичной аппроксимацией координат и представлением неизвестной функции в виде полинома Лагранжа первой степени. Отмечалось [1], что дополнительным преимуществом такой дискретизации является возможность легко сочетать элементы различных форм, поскольку не требуется выполнять условие совместности аппроксимации неизвестной функции между элементами. Для вычисления объемного интеграла в (1.8) внутреннюю область D разбивали на M гексаэдральных ячеек с квадратичной аппроксимацией координат и интегрируемой функции объемных сил f .

Интегрирование сингулярных функций с сильной особенностью по поверхности элемента требует специальных приемов и схем интегрирования и осуществлялось численно с нерегулярным распределением множества гауссовых точек по криволинейной поверхности трехмерного тела. Объемный интеграл в (1.8) является интегралом от функции со слабой особенностью [2] и поэтому вычисляется обычным образом при помощи квадратурных формул Гаусса.

Дискретное итерационное матричное уравнение, соответствующее (1.8), запишем

$$\{t\}^k = \frac{1}{2} (\{t\}^{k-1} + \{g\}) + [F^{ss}] (\{t\}^{k-1} + \{g\}) + [F^{sv}] \{f\} \quad (2.1)$$

¹ Шардаков И.Н. Метод геометрического погружения для решения трехмерных задач теории упругости. Дис. ... д-ра физико-матем. наук: 20.12.90. М., 1990. 30 с.

радиус-вектор произвольной точки области D , \mathbf{n} – вектор внешней нормали к границе S , σ – тензор напряжений.

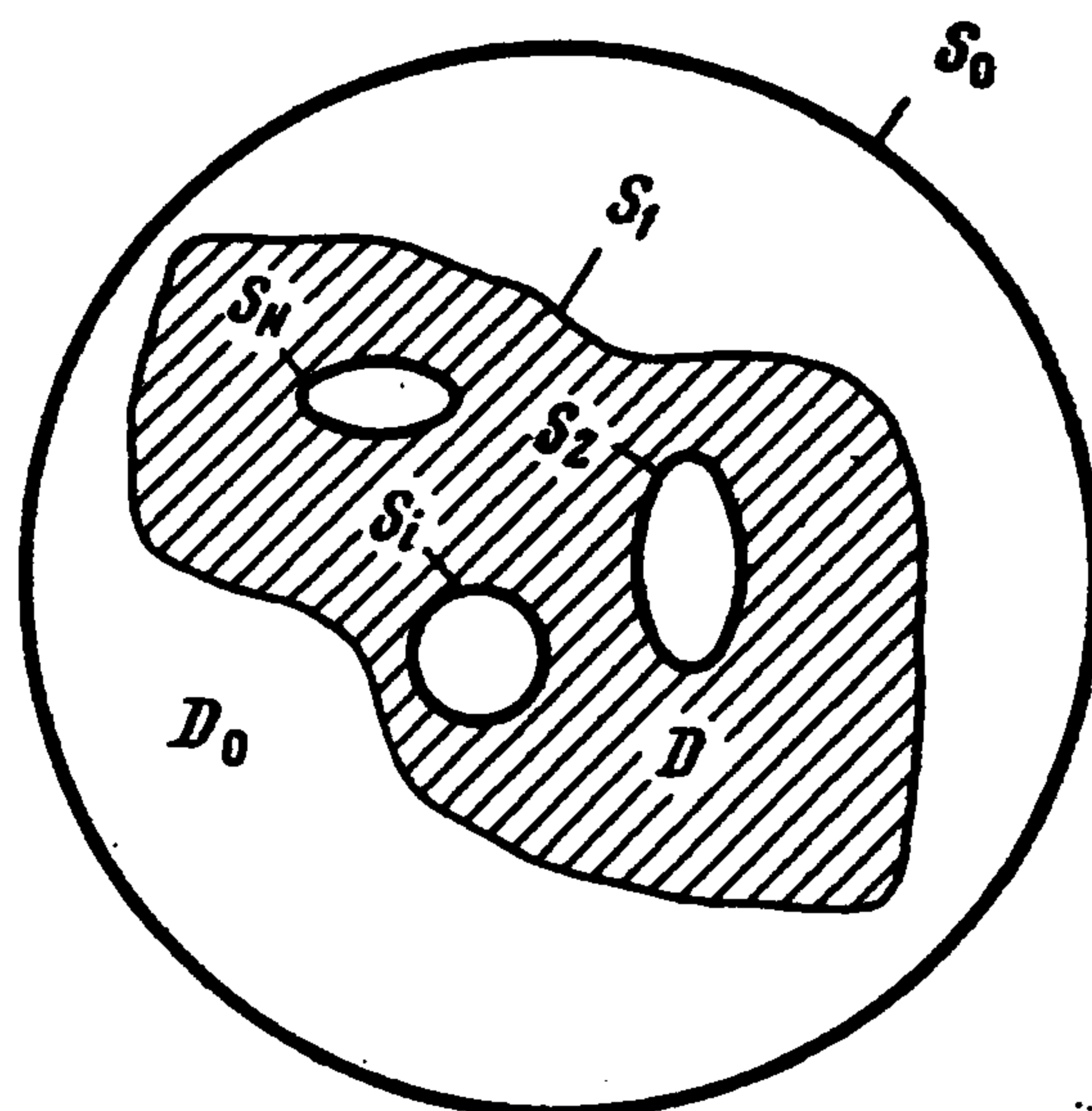
Закон Гука и соотношения Коши имеют вид

$$\sigma = \lambda \theta E + 2\mu e, \quad e = [(\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u}] / 2 \quad (1.2)$$

где E – единичный тензор, θ – первый инвариант тензора деформаций, e , λ , μ – параметры Ламе.

Обобщенное решение краевой задачи (1.1) можно получить из вариационного уравнения вида

$$\int_D \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{v}) dD = \int_D \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dD + \int_S \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dS \quad \forall \mathbf{v} \in V(D) \quad (1.3)$$



Фиг. 1

которое доставляет минимум квадратичному функционалу общей потенциальной энергии упругого тела:

$$\Phi(\mathbf{v}) = \int_D \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{v}) dD - 2 \int_D \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dD - 2 \int_S \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dS \quad (1.4)$$

Здесь $V(D) \subset (H^1(D))^n$ – полное замкнутое подпространство вектор-функций Соболева $(H^1(D))^n$ [3].

Согласно МГП утверждается возможность рассмотреть соответствие решения уравнения (1.3) другому полному замкнутому подпространству вектор-функций

$$V_0(D_0) = \{ \mathbf{u} \in (H^1(D_0))^n \mid \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in S_0^1 = S_0 \cap S_\Delta \}$$

каждый элемент которого определен на области D_0 , а также записать вариационное уравнение относительно вектора \mathbf{w}

$$\int_{D_0} \sigma(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{v}) dD_0 = \int_{D_\Delta} \sigma(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{v}) dD_\Delta + \int_D \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dD + \int_S \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dS \quad (1.5)$$

$$\forall \mathbf{v} \in V_0(D_0)$$

Здесь $D \subset D_0$, т.е. исходная область D полностью содержится в области D_0 (это обстоятельство определило название метода), S_0 – граница области D_0 , $D_\Delta = D_0 \setminus D$ – дополнение области D до D_0 (фиг. 1), S_Δ – граница области D_Δ , S_0^1 – часть границы S_Δ , принадлежащая S_0 .

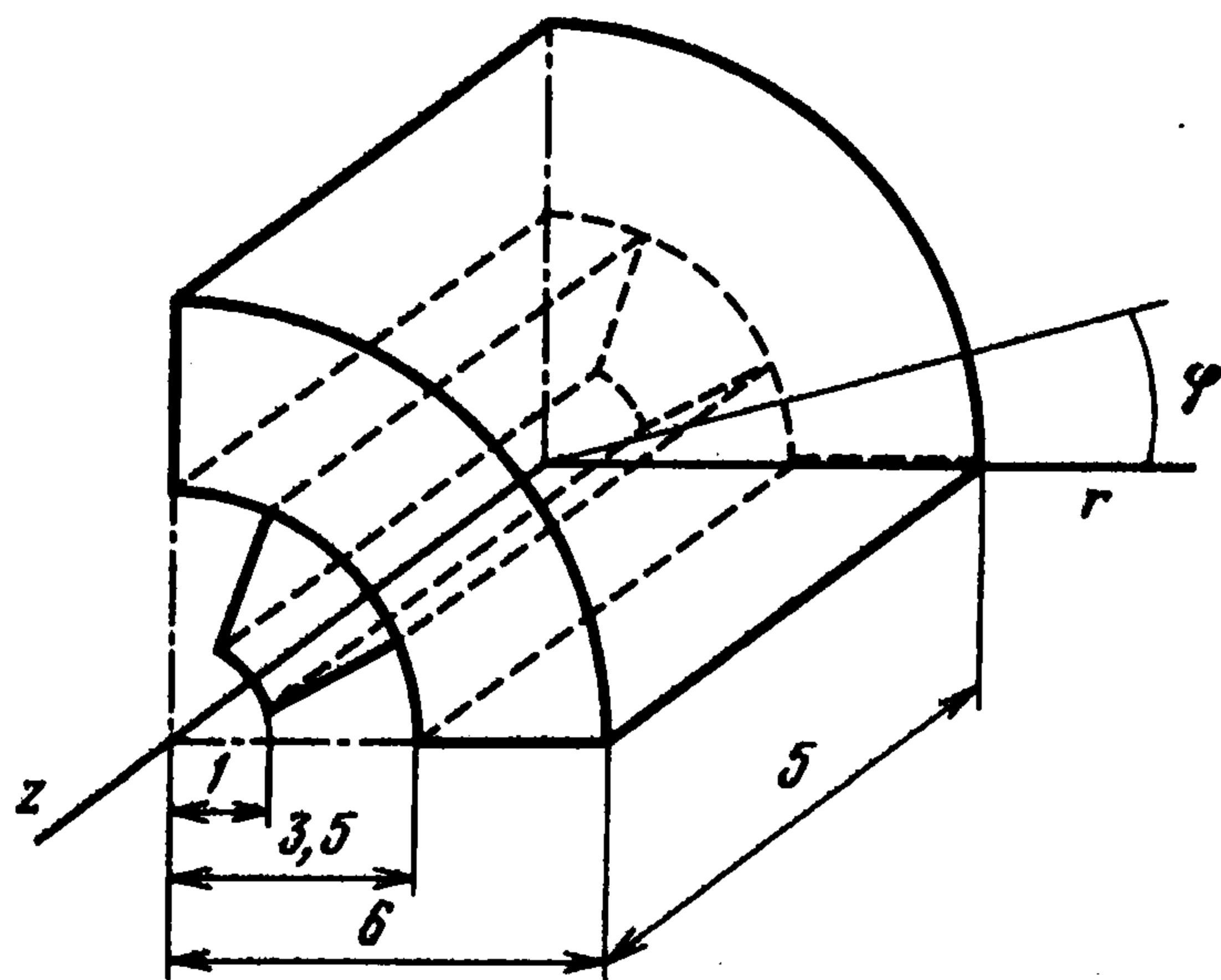
Было показано¹, что решение \mathbf{w} уравнения (1.5) при $\mathbf{x} \in D$ будет доставлять минимум функционалу (1.4) и, соответственно, является обобщенным решением исходного уравнения (1.3), т.е. $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ при $\mathbf{x} \in D$.

Решаем вариационное уравнение (1.5) итерационным путем, заменяя \mathbf{w} на \mathbf{w}^k в левой части и на \mathbf{w}^{k-1} в правой, причем $k = 1, 2, \dots$; $\mathbf{w}^0 = 0$. Применяя затем преобразование Гаусса – Остроградского, получим соответствующую дифференциальную постановку задачи

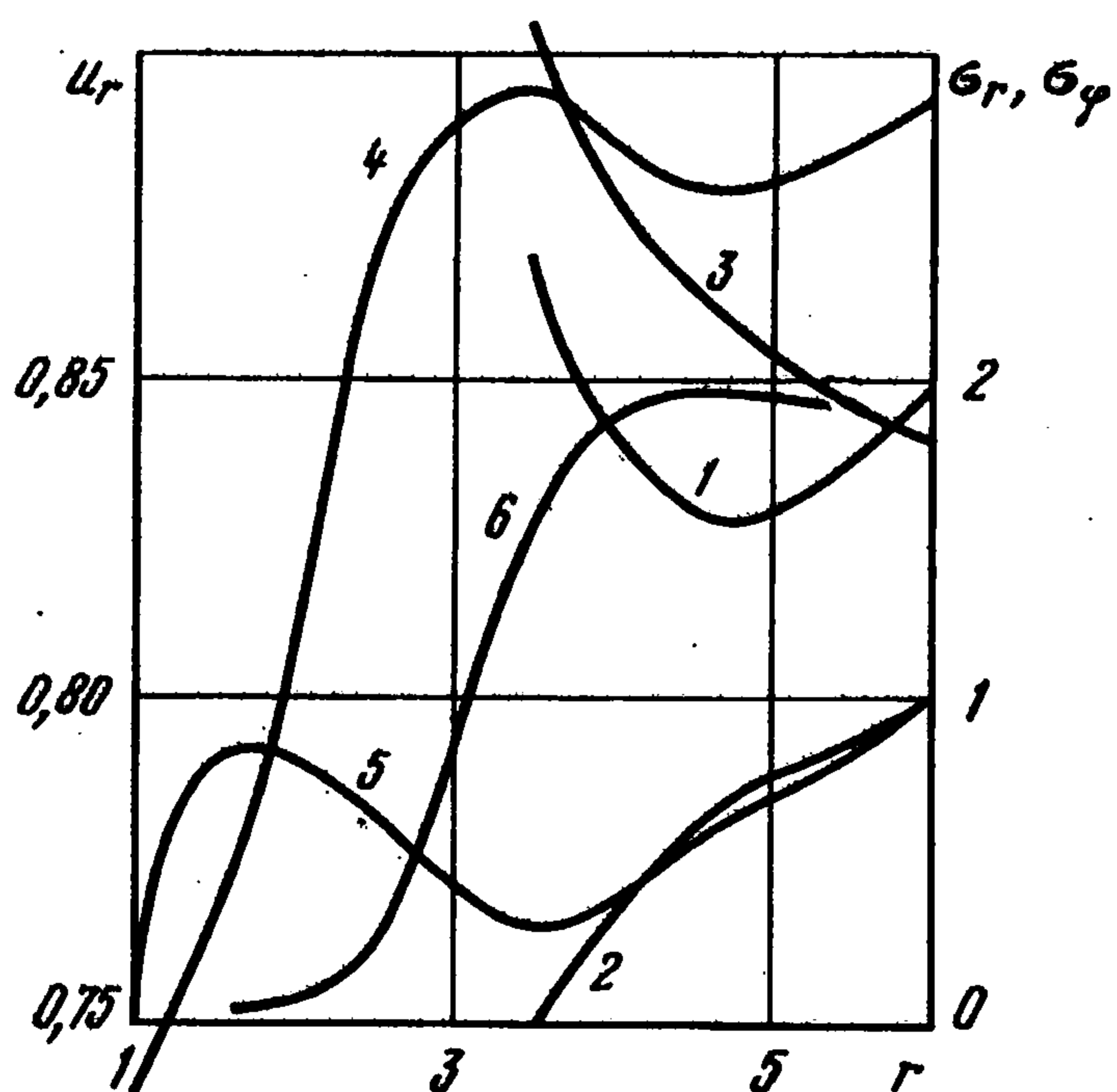
$$\operatorname{div} \sigma(\mathbf{w}^k) = -H(D)f - \Gamma(S_1)[\mathbf{g} + \mathbf{n}^\Delta \cdot \sigma^\Delta(\mathbf{w}^{k-1})], \quad \mathbf{x} \in D_0 \quad (1.6)$$

$$\mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{w}^k) = \mathbf{g}; \quad \mathbf{x} \in S \cap S_0; \quad \mathbf{w}^k = 0, \quad \mathbf{x} \in S_0^1$$

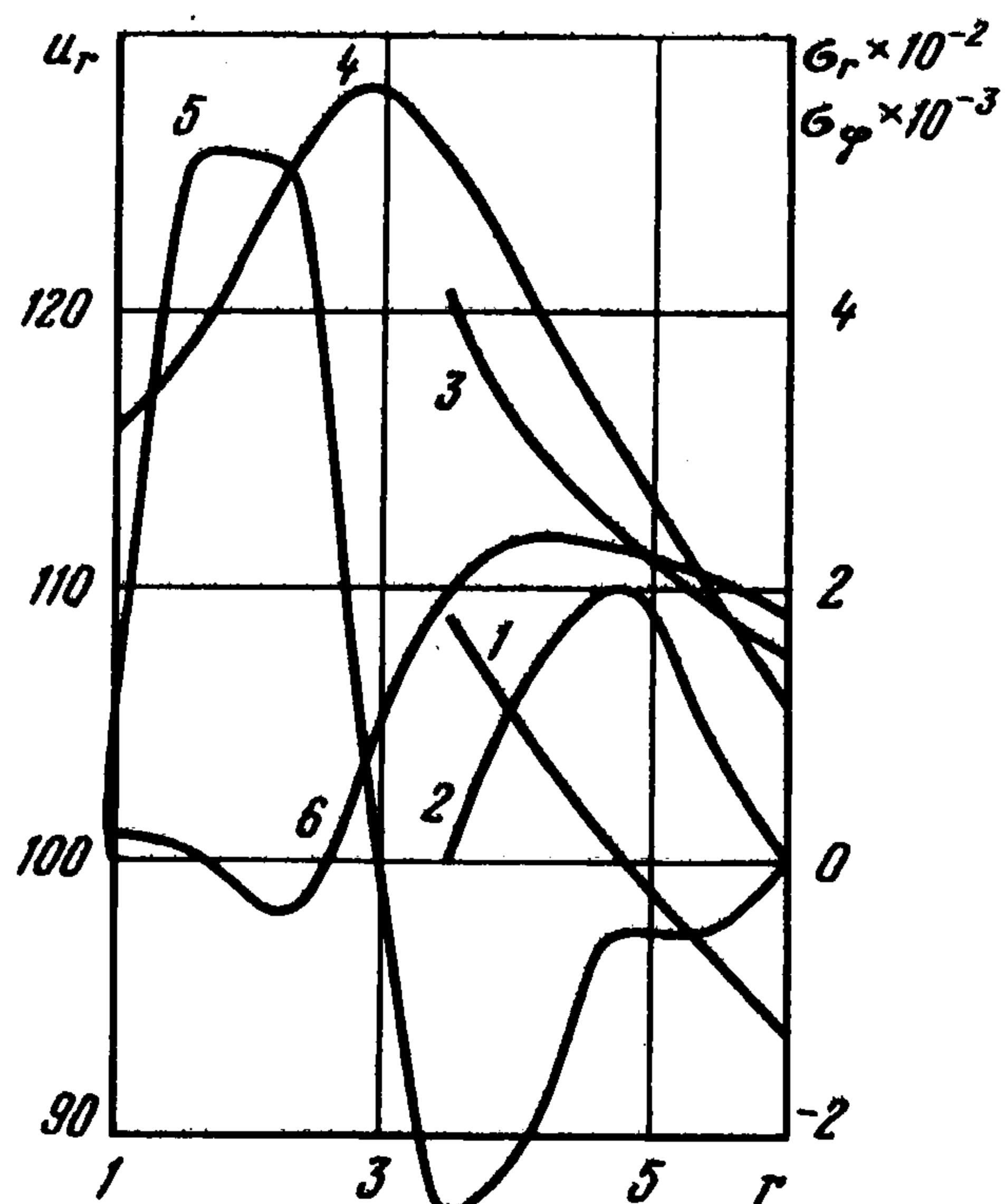
где $H(D)$ – обобщенная функция типа Хевисайда [4], равная единице при $\mathbf{x} \in D$ и нулю при $\mathbf{x} \in D_\Delta$; $\Gamma(S_1)$ – обобщенная функция типа Дирака [4], сосредоточенная на границе $S_1 = S \cap S_\Delta$; \mathbf{n}^Δ – единичный вектор внешней нормали для S_1 по отношению к D_Δ ; σ^Δ – тензор напряжений при стремлении \mathbf{x} к S_1 из дополнения D_Δ .



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

На фиг. 7 представлены результаты решения задачи с заданным внешним единичным давлением по боковой поверхности цилиндра (модуль упругости 100, коэффициент Пуассона 0,3): перемещения u_r , и напряжения σ_r и σ_φ при $\varphi = 0^\circ$ (кривые 1–3) и при $\varphi = 45^\circ$ (кривые 3–5 соответственно).

На фиг. 8 представлены результаты решения задачи для того же цилиндра, вращающегося с постоянной угловой скоростью (угловая скорость 10, плотность материала 1): перемещения u_r , и напряжения σ_r и σ_φ при $\varphi = 0^\circ$ (кривые 1–3) и при $\varphi = 45^\circ$ (кривые 3–5 соответственно).

6. Выводы. Таким образом, показано, что основное преимущество предлагаемого метода МГП по сравнению с МГЭ состоит в том, что отпадает необходимость в выполнении трудоемкой операции обращения разрешающей плотнозаполненной несимметричной матрицы. МГП заменяет эту операцию высокопроизводительным итерационным процессом, который не требует подбора каких-либо параметров, обеспечивающих сходимость (как это имеет место в традиционно применяемых итерационных методах решения СЛАУ в каждой конкретной задаче). В то же время МГП сохраняет все известные преимущества МГЭ.

Число элементов	Число Неизвестных	Время формирования СЛАУ, с	Время решения СЛАУ, с	
			МГЭ	МГП
6	72	14	4,7	3,9
24	288	93	267	45
54	648	320	2860	217

В таблице приведена зависимость затрат процессорного времени для метода граничных элементов и метода геометрического погружения в зависимости от числа неизвестных СЛАУ. Необходимо отметить, что при одинаковых затратах на формирование разрешающей матрицы и вычисления решений во внутренних точках области время получения вектора неизвестных в МГП существенно ниже, чем в МГЭ. Экономия машинного времени тем больше, чем больше размерность системы. Результаты численного эксперимента приведены для IBM PC AT/386 20 Mhz.

Итерационное решение уравнений в МГП позволяет применять процедуры ускорения сходимости процесса, легко сочетать доступную оперативную память и блочную запись матрицы коэффициентов влияния на жесткие носители, применять алгоритмы параллельных вычислений.

Тщательно обоснованный теоретически и разработанный в алгоритмах и программах, МГП позволяет решать широкий класс трехмерных задач со сложной геометрической конфигурацией и подтверждает свою высокую эффективность и экономичность.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16824)

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
2. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
3. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.
4. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложением в технике. М.: Мир, 1978. 518 с.
5. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.

Пермь

Поступила в редакцию
25.1.1994