УДК 539.319

© 1995 г. Долотов М.В., Килль И.Д.

О ТЕПЛОВОМ УДАРЕ НА ГРАНИЦЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА В СЛУЧАЕ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

Получена асимптотика малых времен точного решения осесимметричной задачи о тепловом ударе на границе упругого полупространства. Произведена оценка погрешности двух первых членов асимптотического разложения.

Первые решения динамической задачи о тепловом ударе на границе полупространства принадлежат В.И. Даниловской [1, 2]. В последующих работах, достаточно полный перечень которых представлен в [3, 4], решение одномерной задачи обобщалось для различных режимов теплового нагружения.

Осесимметричная динамическая задача термоупругости для полупространства с граничным условием второго рода и конечной скоростью распространения тепла рассматривалась в [5], причем основное внимание уделялось получению асимптотик смещений при $t \to \infty$.

При исследовании процесса разрушения твердых тел интенсивными тепловыми воздействиями особый интерес представляет напряженное состояние тела при небольших значениях времени нагрева. Поэтому получение простого приближенного решения для малых времен представляет особый интерес. Использование такого решения оправданно, если его погрешность контролируется.

Ниже рассматривается осесимметричная динамическая задача для полупространства. При получении приближенного решения и оценки его погрешности использованы и развиты методы, разработанные в [6, 7].

1. В цилиндрических координатах r, φ, z рассмотрим упругое полупространство $z \geqslant 0$, на границе которого происходит теплообмен по закону Ньютона со средой $z < 0$. До момента времени $t = 0$ полупространство и среда находятся в покое при температуре $T = 0$. В момент $t = 0$ температура среды мгновенно повышается и получает распределение

$$\Theta = \Theta_0 f(r) \tag{1.1}$$

причем функция $f(r)$ допускает преобразование Ганкеля. Требуется найти напряжения в полупространстве с учетом динамических составляющих.

Перейдем к безразмерным величинам, полагая

$$T' = \frac{T}{\Theta_0}, \quad r' = \frac{rc_1}{a}, \quad z' = \frac{zc_1}{a}, \quad t' = \frac{tc_1^2}{a}$$
$$\delta' = \frac{\delta c_1}{a}, \quad h' = \frac{ha}{c_1}, \quad \alpha' = \alpha\Theta_0 \tag{1.2}$$

где a – коэффициент температуропроводности, c_1 – скорость продольных упругих волн, h – относительный коэффициент теплообмена, δ – характерный размер распределения $f(r)$, α – коэффициент линейного расширения. Штрихи при написании безразмерных величин далее опускаем.

Решение краевой задачи теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\Delta T,\ T|_{t=0}=0,\ \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0}=h(T|_{z=0}-f(r)) \tag{1.3}$$

$$|T(r,z,t)|<\infty\left(\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

имеет вид [8]

$$T^*(r,z,s)=\int_0^\infty \lambda f^H(\lambda)J_0(\lambda r)F(\lambda,z,s)d\lambda,\quad F(\lambda,z,s)=\frac{he^{-\omega z}}{s(\omega+h)}$$

$$T^*(r,z,s)=L_s\{T\}=\int_0^\infty T(r,z,t)e^{-st}dt,\quad f^H(\lambda)=H_\lambda\{f(r)\}=\int_0^\infty rf(r)J_0(\lambda r)dr \tag{1.4}$$

$$\omega=\sqrt{s+\lambda^2},\ \arg\omega=0 \text{ при } s>0$$

(J_n – функция Бесселя первого рода).

Для определения термоупругих потенциалов перемещений требуется решить краевые задачи для волновых уравнений

$$\Delta\Phi-\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=m_0T,\ \left(\Delta-\frac{1}{r^2}\right)\Psi-\varepsilon^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=0$$

$$\Phi|_{t=0}=\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{t=0}=\Psi|_{t=0}=\left.\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\ |\Phi(r,z,t)|<\infty,\ |\Psi(r,z,t)|<\infty \tag{1.5}$$

$$m_0=\frac{1-\nu}{1+\nu}\alpha,\quad \varepsilon^2=c_1^2/c_2^2$$

где ν – коэффициент Пуассона, c_2 – скорость поперечных упругих волн.

Решения задач (1.5) определяются с помощью преобразования Лапласа по t и преобразований Ганкеля нулевого и первого порядка по r. Для изображений потенциалов при этом получаем:

$$\Phi^*(r,z,s)=\int_0^\infty \lambda C(\lambda,s)e^{-R_1z}J_0(\lambda r)d\lambda-m_0\int_0^\infty \lambda f^H(\lambda)J_0(\lambda r)\frac{F(\lambda,z,s)}{R_1^2-\omega^2}d\lambda$$

$$\Psi^*(r,z,s)=\int_0^\infty \lambda D(\lambda,s)e^{-R_2z}J_1(\lambda r)d\lambda \tag{1.6}$$

$$R_1=\sqrt{s^2+\lambda^2},\quad R_2=\sqrt{\varepsilon^2s^2+\lambda^2}$$

$$\arg R_1=\arg R_2=0 \text{ при } s>0$$

Определяя изображения напряжений, соответствующие Φ^* и Ψ^*, находим затем неизвестные функции $C(\lambda, s)$, $D(\lambda,s)$ из граничных условий

$$\sigma_{zz}^*|_{z=0}=\sigma_{rz}^*|_{z=0}=0 \tag{1.7}$$

Окончательно для изображений искомых напряжений получаем:

$$\frac{\sigma_{ij}^*}{2m_0G}=\int\limits_0^\infty \lambda f^H(\lambda)\left[M_{ij}(\lambda,z,s)J_0(\lambda r)+N_{ij}(\lambda,z,s)u_{ij}(\lambda r)\right]d\lambda,\quad i,j=r,\varphi,z \tag{1.8}$$

$$M_{rr}=M_{\varphi\varphi}=\frac{\nu}{1-2\nu}s^2(\xi_1+\lambda^2\xi_2e_1)-F(\lambda,z,s),\quad M_{zz}=R^2(\xi_1+\lambda^2\xi_2e_{12})$$

$$M_{rz}=0,\quad N_{rr}=N_{\varphi\varphi}=\lambda^2(\xi_1-R^2\xi_2e_2+\lambda^2\xi_2e_1),\quad N_{zz}=0$$

$$N_{rz}=\lambda\left(\frac{R^4\xi_2}{R_2}e_{12}+\omega\xi_1\right),\quad u_{rr}=\frac{J_1(\lambda r)}{\lambda r}-J_0(\lambda r),\quad u_{\varphi\varphi}=-\frac{J_1(\lambda r)}{\lambda r},\quad u_{zz}=0$$

$$u_{rz}=J_1(\lambda r),\quad \xi_1=\frac{h(e^{-R_1z}-e^{-\omega z})}{s(R_1^2-\omega^2)(\omega+h)},\quad \xi_2=\frac{hR_2}{s(R_1+\omega)(\omega+h)P(\lambda,s)}$$

$$R^2=\varepsilon^2s^2/2+\lambda^2,\quad P(\lambda,s)=R^4-\lambda^2R_1R_2$$

$$e_1=e^{-R_1z},\quad e_2=e^{-R_2z},\quad e_{12}=e_1-e_2$$

(G – модуль сдвига)

Оригиналы, соответствующие (1.8), могут быть формально записаны с помощью теоремы обращения.

Практическая ценность полученного таким образом решения, очевидно, невелика.

2. В дальнейшем ограничимся функциями $f(r)$, для которых $f^H(\lambda)$ экспоненциально убывают с ростом λ.

Получение асимптотических разложений при $t\to 0$ точного решения сводится к разложению функций $M_{ij}(\lambda, z, s)$, $N_{ij}(\lambda, z, s)$ в ряды по λ^2, почленному интегрированию и переходу к оригиналам. Доказательство асимптотического характера полученных таким образом рядов аналогично приведенному в [7].

Асимптотическое разложение σ_{zz} имеет вид

$$\frac{\sigma_{zz}}{2m_0G}\approx\sum_{k=0}^\infty A_{2k+1,0}(r)\varphi_k(z,t),\quad t\to 0 \tag{2.1}$$

$$A_{mn}(r)=\int\limits_0^\infty \lambda^m f^H(\lambda)J_n(\lambda r)d\lambda,\quad m=1,2,..;\ n=0,1$$

Так как $c_1\sim 10^3$ м/с, $a\sim 10^{-6}$ м²/с, из четвертого соотношения (1.2) следует, что физически малым временам t могут соответствовать большие значения безразмерного времени t'. Поэтому использование асимптотики при $t'\to 0$ для получения приближенного решения требует обоснования. Рассмотрим в связи с этим некоторые особенности асимптотического разложения (2.1). Изображения $\varphi_k^*(z,s)=L_s\{\varphi_k(z,t)\}$ являются коэффициентами разложения в степенной ряд по λ^2 функции

$$\varphi^*(\lambda,z,s)=\frac{R^2(e^{-R_1z}-e^{-\omega z})}{s^2(s-1)(\omega+h)}+\frac{\lambda^2R^2R_2(e^{-R_1z}-e^{-R_2z})}{s(R_1+\omega)(\omega+h)P(\lambda,s)} \tag{2.2}$$

Поскольку корни уравнения $P(\lambda, s) = 0$ расположены на мнимой оси [9], $\varphi^*(\lambda,z,s)$ имеет в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ единственную особую точку $s = 1$. Для функции $\varphi^*(\lambda,z,s)$ и всех ее производных по λ^2 эта особая точка является устранимой.

Действительно, для определяющего характер особой точки сомножителя в первом слагаемом правой части (2.2) имеем

$$q(\lambda,z,s)=\frac{e^{-R_1 z}-e^{-\omega z}}{s-1},\quad \frac{\partial^n q}{\partial(\lambda^2)^n}=\frac{1}{s-1}\left[P_{2n-1}\left(\frac{1}{R_1}\right)e^{-R_1 z}-P_{2n-1}\left(\frac{1}{\omega}\right)e^{-\omega z}\right] \tag{2.3}$$

где $P_m(x)$ – многочлен m-й степени по x.

Используя (2.3), можно убедиться в существовании конечных пределов $\lim\limits_{s\to 1}\left[\partial^n q/\partial(\lambda^2)^n\right]$, $n=0,1,...$

Согласно теореме 35.1 [10] поведение $\varphi_k(z,t)$ при $t\to\infty$ определяется разложением $\varphi_k^*(z,s)$ в окрестности особой точки $s=0$. Исследуя характер разложения $\varphi_k^*(z,s)$ в окрестности $s=0$ можно доказать справедливость соотношений

$$\varphi_k(z,t)=t^{2k}\psi_k(z,t) \tag{2.4}$$

где $\psi_k(z,t)$ – ограниченные функции при $t\to\infty$.

Вернемся на время к обозначению безразмерных величин нештрихованными буквами. Поскольку функция $f(r)$ – безразмерная, $f(r)=f_1(r/\delta)=f_1(r'/\delta')$. На основании свойств преобразования Ганкеля

$$f^H(\lambda)=\delta'^2 f_1^H(\lambda\delta'),\quad A_{mn}(r')=\frac{1}{(\delta')^{m-1}}A_{mn}^{(0)}\left(\frac{r'}{\delta'}\right) \tag{2.5}$$

причем $A_{mn}^{(0)}$ имеют одинаковые значения в размерных и безразмерных величинах. Из (2.1), (2.4), (2.5) находим

$$\frac{\sigma_{zz}}{2m_0 G}\approx\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t'^{2k}}{\delta'^{2k}}A_{2k+1,0}^{(0)}\left(\frac{r'}{\delta'}\right)\psi_k(z',t'),\quad t'\to 0 \tag{2.6}$$

Так как $t'/\delta'=t_1=c_1 t/\delta$, а коэффициенты при t_1^{2k} в разложении (2.6) ограничены при $t'\to\infty$, можно ожидать, что асимптотика, полученная из (2.1), сохранением конечного числа слагаемых будет достаточно точной при $c_1 t/\delta \ll 1$. Окончательно качество полученной асимптотики можно установить путем оценки погрешности.

Расчеты, проведенные применительно к примеру разд. 4, показывают, что при рассматриваемом значении t и некоторых значениях z второй член асимптотики σ_{zz} в 8–10 раз превосходит по абсолютной величине асимптотическое представление этого напряжения. Поэтому в отличие от задачи с источниками [7] в качестве приближенного решения использованы два первых члена каждого из асимптотических разложений $\sigma_{ij}(i,j=r,\varphi,z)$. Выделяя указанные члены асимптотик, получим:

$$T(r,z,t)=T^{(0)}+\delta_T=f(r)L_t^{-1}\left\{\frac{he^{-z\sqrt{s}}}{s(\sqrt{s}+h)}\right\}-$$

$$-A_{30}(r)\left[tL_t^{-1}\left\{\frac{he^{-z\sqrt{s}}}{s(\sqrt{s}+h)}\right\}-L_t^{-1}\left\{\frac{he^{-z\sqrt{s}}}{s^2(\sqrt{s}+h)}\right\}\right]+\delta_T$$

$$\frac{\sigma_{jj}}{2m_0G}=-k_jT^{(0)}+l_j\left[f(r)L_t^{-1}\left\{\frac{h(e^{-zs}-e^{-z\sqrt{s}})}{(s-1)(\sqrt{s}+h)}\right\}-A_{30}(r)L_t^{-1}\left\{\frac{hz}{2}\frac{e^{-zs}-\sqrt{s}e^{-z\sqrt{s}}}{s(s-1)(\sqrt{s}+h)}+\right.\right.$$

$$+\frac{h}{2}\frac{e^{-zs}-e^{-z\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(s-1)(\sqrt{s}+h)^2}-\frac{4h}{\varepsilon^3}\frac{e^{-zs}}{s^2\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)(\sqrt{s}+h)}\Bigg\}\Bigg]-$$

$$-w_j(r)L_t^{-1}\left\{\frac{h(e^{-zs}-e^{-z\sqrt{s}})}{s^2(s-1)(\sqrt{s}+h)}-\frac{2h}{\varepsilon}\frac{e^{-\varepsilon zs}}{s^2\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)(\sqrt{s}+h)}\right\}+\delta_{jj},\quad j=r,\varphi,z \tag{2.7}$$

$$\frac{\sigma_{rz}}{2m_0G}=A_{21}(r)L_t^{-1}\left\{\frac{h(e^{-zs}-e^{-\varepsilon zs})}{s\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)(\sqrt{s}+h)}+\frac{h(e^{-zs}-e^{-z\sqrt{s}})}{s\sqrt{s}(s-1)(\sqrt{s}+h)}\right\}-$$

$$-A_{41}(r)L_t^{-1}\Bigg\{\frac{hz}{2}\frac{e^{-zs}-e^{-\varepsilon zs}}{s^2(s-1)(\sqrt{s}+h)}-\frac{hz}{2\varepsilon}\frac{e^{-\varepsilon zs}}{s^2\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)(\sqrt{s}+h)}+$$

$$+\frac{h}{2}\frac{e^{-zs}-e^{-\varepsilon zs}}{s^3(\sqrt{s}+1)(\sqrt{s}+h)}+\frac{h}{2}\frac{e^{-zs}-e^{-\varepsilon zs}}{s^2(\sqrt{s}+1)(\sqrt{s}+h)^2}-$$

$$-\frac{h^2}{2}\frac{e^{-zs}-e^{-z\sqrt{s}}}{s^2\sqrt{s}(s-1)(\sqrt{s}+h)^2}-\frac{4h}{\varepsilon^3}\frac{e^{-zs}-e^{-\varepsilon zs}}{s^3\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)(\sqrt{s}+h)}\Bigg\}+\delta_{rz}$$

$$k_r=k_\varphi=1,\ k_z=0,\ l_r=l_\varphi=\nu/(1-2\nu),\ l_z=\varepsilon^2/2$$

$w_r=A_{30}-A_{21}/r,\ \ w_\varphi=A_{21}/r,\ \ w_z=-A_{30},\ \ L_t^{-1}$ - оператор обратный L_s

Оригиналы в (2.7) получаются с помощью таблиц из [11] и основных теорем операционного исчисления.

Соотношения (2.7) представляют собой точные выражения для температуры и напряжений. Приближенное решение находим, отбрасывая в (2.7) погрешности $\delta_T,\delta_{ij}(i,j=r,\varphi,z)$. Если в (2.7) сохранить только члены, содержащие $f(r)$ в выражениях для температуры и нормальных напряжений и слагаемые с множителем $A_{21}(r)$ в σ_{rz}, то получим асимптотическое представление точного решения. Заметим, что асимптотические представления температуры и нормальных напряжений оказываются умноженным на $f(r)$ решением соответствующей одномерной задачи [2].

3. Оценим δ_T. На основании формулы (3.3) из [8] и неравенств $0<L_t^{-1}\{e^{-z\sqrt{s}}(\sqrt{s}+ +h)^{-1}\}\le e^{-z^2/(4t)}(\pi t)^{-1/2}$ [8], [11] получим

$$|\delta_T|\le\frac{1}{2}\int_0^\infty\lambda^5|f^H(\lambda)|d\lambda\int_0^t\tau^2L_\tau^{-1}\left\{\frac{he^{-z\sqrt{s}}}{\sqrt{s}+h}\right\}d\tau\le\frac{h\beta_5}{5}t^2\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-z^2/(4t)} \tag{3.1}$$

$$\beta_n=\int_0^\infty\lambda^n|f^H(\lambda)|d\lambda,\quad n=1,2,\ldots$$

Для оценки $\delta_{ij}(i,j=r,\varphi,z)$ используем формулу

$$f_1(\lambda^2,t)*f_2(\lambda^2,t)=f_1(0,t)*f_2(0,t)+\lambda^2[f_1'(0,t)*f_2(0,t)+f_1(0,t)*f_2'(0,t)]+$$

$$+\frac{\lambda^4}{2}[f_1''(\vartheta_1\lambda^2,t)*f_2(\lambda^2,t)+2f_1'(0,t)*f_2'(0,t)+f_1(\lambda^2,t)f_2''(\vartheta_2\lambda^2,t)] \tag{3.2}$$

$0<\vartheta_k<1,\ k=1,2.$

в которой звездочка – знак свертки, штрихами обозначено дифференцирование по λ^2. Соотношение (3.2) получено с помощью формулы Тейлора и свойств свертки. Оно легко обобщается для случая большего числа членов свертки.

Как было отмечено в разд. 2, физически малым временам могут соответствовать большие значения безразмерного времени t. Чтобы получить удовлетворительные оценки погрешностей $\delta_{ij}(i,j=r,\varphi,z)$ для достаточно больших интервалов t, необходимо проявлять определенную осторожность при выводе степенных оценок вида At^{μ}. Желательно получить по возможности меньшее значение μ, при котором, однако, выполнялось бы естественное условие $At^{\mu}=o(\sigma_{ij}^{(k)})$, $t\to 0$ ($\sigma_{ij}^{(k)}$ – последний из сохраняемых членов асимптотики σ_{ij}). Эти соображения использованы при выводе следующих основных соотношений:

$$\left|F_1(\lambda^2,z,t)\right|=\left|L_t^{-1}\left\{\frac{e^{-R_1z}-e^{-\omega z}}{s-1}\right\}\right|\leqslant e^{t-z}\eta_0+\left(\frac{z}{\sqrt{\pi t}}e_z+\lambda^2 z\kappa\right)\eta_1$$

$$\left|F_1'(0,z,t)\right|\leqslant\frac{z}{2}\left(\eta_0+2z\sqrt{\frac{t}{\pi}}e_z\eta_1+2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,e_z\right)$$

$$F_1''(\lambda^2,z,t)\leqslant t^2\eta_0+\frac{zt}{2}(t+4)\eta_1,\quad \left|F_1(\lambda^2,z,t)-F_1(0,z,t)\right|\leqslant\lambda^2(te^{t-z}\eta_0+z\kappa\eta_1)$$

$$\left|F_2(\lambda^2,t)\right|=\left|L_t^{-1}\left\{\frac{1}{R_1+\omega}\right\}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi t}}+2\lambda,\quad \left|F_2'(0,t)\right|\leqslant\frac{t}{2}$$

$$\left|F_2(\lambda^2,t)-F_2(0,t)\right|\leqslant\lambda^2 t\sqrt{2}(1+\sqrt{2t})$$

$$\left|F_3(\lambda^2,t)\right|=\left|L_t^{-1}\left\{\frac{sR_1R_2}{P(\lambda,s)}\right\}\right|\leqslant\gamma_1,\quad \left|F_3(\lambda^2,t)-F_3(0,t)\right|\leqslant\lambda^2\gamma_2 t$$

$$F_4(\lambda^2,z,t)=L_t^{-1}\left\{\frac{e^{-R_1z}-e^{-R_2z}}{R_1}\right\}$$

$$\left|F_4(\lambda^2,z,t)-F_4(0,z,t)\right|\leqslant\frac{\lambda^2}{2}[(t^2-z^2)(\eta_1-\eta_2)+z(2z+\frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon}t)\eta_2 \qquad (3.3)$$

$$\left|F_5(\lambda^2,z,t)\right|\leqslant\left|L_t^{-1}\left\{\frac{e^{-R_1z}-e^{-R_2z}}{s}\right\}\right|\leqslant\eta_1-\eta_2+\frac{\lambda^2 z}{2}\left[(t-z)\eta_1+(t-\varepsilon z)\varepsilon^{-1}\eta_2\right]$$

$$\left|F_5'(0,z,t)\right|=\frac{z}{2}\left[(t-z)\eta_1-(t-\varepsilon z)\eta_2\right],\quad \left|F_5''(\lambda^2,z,t)\right|\leqslant\frac{zt}{12}\left[(t-z)\eta_1+(t-\varepsilon z)^2\varepsilon^{-3}\eta_2\right]$$

$$\left|F_5(\lambda^2,z,t)-F_5(0,z,t)\right|\leqslant\frac{\lambda^2 z}{2}\left[(t-z)\eta_1+(t-\varepsilon z)\varepsilon^{-1}\eta_2\right]$$

$$F_6(\lambda^2,t)=L_t^{-1}\left\{\frac{1}{\omega+h}\right\}\leqslant F_6(0,t)\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi t}},\quad \left|F_6'(0,t)\right|\leqslant\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

$$\left|F_6''(\lambda^2,t)\right| \le t\sqrt{\frac{t}{\pi}}, \quad \left|F_6(\lambda^2,t)-F_6(0,t)\right| \le \lambda^2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

$$\eta_1=\eta(t-z),\ \eta_2=\eta(t-\varepsilon z),\ \eta_0=1-\eta_1,\ e_z=\exp(-z^2/(4t)),\ \kappa=1+\sqrt{t/2}$$

$$\gamma_1=\frac{2}{\varepsilon^2-1}+\frac{\varepsilon^2-1}{2\pi\varepsilon^2}+\frac{\gamma}{\varepsilon^2},\quad \gamma_2=\frac{\varepsilon^4-1}{8\pi\varepsilon^4}+\frac{\vartheta^2\gamma}{2\varepsilon^4}$$

$$\gamma=\frac{8(\varepsilon^2-\vartheta^2)(1-\vartheta^2)}{\varepsilon^2\vartheta^6-6\varepsilon^2\vartheta^4+(12\varepsilon^2-8)\vartheta^2-4(\varepsilon^2-1)}$$

где $\eta(x)$ – единичная функция Хевисайда, $\pm i\vartheta/\varepsilon$ – ненулевые корни уравнения $P(1,s)=0$.

Напомним, что штрихи в формулах (3.3) означают дифференцирование по λ^2.

Методы вывода соотношений (3.3) приведены в работах [6, 7].

Получение оценок $\delta_{ij}(i,j=r,\varphi,z)$ продемонстрируем на примере δ_{zz}. Из (1.8) имеем

$$\frac{\sigma^*_{zz}}{2m_0G}=\frac{\varepsilon^2h}{2}\int_0^\infty \lambda g(\lambda,r)F_1^*(\lambda^2,z,s)F_6^*(\lambda^2,s)d\lambda+h\int_0^\infty \lambda^3 g(\lambda,r)F_1^*(\lambda^2,z,s)\frac{F_6^*(\lambda^2,s)}{s^2}d\lambda+$$
$$+\frac{\varepsilon^2h}{2}\int_0^\infty \lambda^3 g(\lambda,r)F_2^*(\lambda^2,s)F_3^*(\lambda^2,s)F_4^*(\lambda^2,z,s)F_6^*(\lambda^2,s)d\lambda+ \tag{3.4}$$
$$+h\int_0^\infty \lambda^5 g(\lambda,r)F_2^*(\lambda^2,s)F_3^*(\lambda^2,s)F_5^*(\lambda^2,z,s)\frac{F_6^*(\lambda^2,s)}{sR_1}d\lambda$$

$$g(\lambda,r)=f^H(\lambda)J_0(\lambda r),\quad F_k^*=L_s\{F_k\},\ k=1,2,..,6$$

Как видно из (2.7), (3.4), оригинал четвертого слагаемого в (3.4) входит в погрешность δ_{zz}. Асимптотическое разложение в (2.7) содержит лишь первые члены асимптотик при $t\to 0$ оригиналов второго и третьего слагаемых в (3.4). Погрешности, соответствующие трем последним слагаемым в (3.4), оцениваются методами из [7] на основании соотношений (3.3).

Для оригинала первого слагаемого в (3.4) и соответствующих ему членов асимптотического разложения в (2.7) получим, используя (3.2)

$$\delta^{(1)}_{zz}=\frac{\varepsilon^2h}{4}\int_0^\infty \lambda^5 g(\lambda,r)\left[F_1''(\vartheta_1\lambda^2,z,t)*F_6(\lambda^2,t)+2F_1'(0,z,t)*F_6'(0,t)+\right.$$
$$\left.+F_1(\lambda^2,z,t)*F_6''(\vartheta_6\lambda^2,t)\right]d\lambda,\quad 0<\vartheta_m<1,\ m=1,6 \tag{3.5}$$

Окончательная оценка $\delta^{(1)}_{zz}$ получается из (3.5) путем оценки сверток и интегралов по λ.

Производя аналогичные операции для остальных погрешностей, окончательно находим:

$$\left|\delta_{jj}\right|\le h\beta_5\left\{\frac{k_j}{5\sqrt{\pi}}t^{5/2}e_z+l_j\left[\frac{1}{5\sqrt{\pi}}p_1\left(\frac{5}{2}\right)+z\left(\frac{3}{16}e_z+\frac{\kappa\beta_7}{5\beta_5}\sqrt{\frac{t-z}{\pi}}\right)(t-z)^2\eta_1+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\pi}}p_1\left(\frac{1}{2}\right)p_3(2)+\frac{zt}{2}(t+4)\sqrt{\frac{t-z}{\pi}}\eta_1+\frac{z}{\sqrt{\pi}}p_1\left(\frac{3}{2}\right)+z\left(\frac{t^2}{8}+\frac{2z\sqrt{t}}{3\pi}(t-z)^{3/2}\eta_1\right)e_z\right]+$$

$$+\left(1-\frac{k_j}{2}\right)\left[\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\left(p_1\left(\frac{5}{2}\right)p_3(1)+z\kappa(t-z)^{5/2}\eta_1\right)+\frac{2}{7\sqrt{\pi}}p_1\left(\frac{7}{2}\right)+\frac{z}{\pi}e_z(t-z)^3\eta_1+\right.$$

$$\left.+\frac{\gamma_1}{24}p_2(4)+\frac{64\gamma_1}{945\sqrt{\pi}}\frac{\beta_6}{\beta_5}p_2\left(\frac{9}{2}\right)+\frac{z\gamma_1}{6}\left(\frac{\beta_7}{8\beta_5}p_4(5)+\frac{64}{315\sqrt{\pi}}\frac{\beta_8}{\beta_5}p_4\left(\frac{11}{2}\right)\right)\right]+$$

$$+(1-k_j)l_j\gamma_1\left[\frac{1}{12}p_2(3)+\frac{16\sqrt{2}}{105\sqrt{\pi}}p_2\left(\frac{7}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{\pi}}{16}+\frac{\gamma_2}{12\gamma_1}\right)p_2(4)+t(t-z)\left(\frac{1}{2}p_2(2)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\frac{\beta_6}{\beta_5}p_2\left(\frac{5}{2}\right)\right)+\frac{zt}{2\varepsilon}\left(\varepsilon^2+1\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{8\beta_6}{15\beta_5}\sqrt{\frac{t-\varepsilon z}{\pi}}\right)(t-\varepsilon z)^2\eta_2\right]+$$

$$\left.+k_j\frac{\varepsilon}{2(1-2\nu)}\left[\left(\frac{\gamma_1}{9}+\frac{\gamma_2}{12}\right)p_4(4)+\gamma_2\left(\frac{1}{8}+\frac{4t}{15\sqrt{\pi}}\frac{\beta_6}{\beta_5}\right)p_4\left(\frac{7}{2}\right)+\frac{\gamma_1}{4}\left(t+\frac{1}{3}\right)p_4(3)\right]\right\}$$

$j=r,\ \varphi,\ z$

$$|\delta_{rz}|\leqslant\frac{h\beta_7 r}{4}\left\{\frac{zt}{36}\left[p_4(3)+\frac{64}{35\sqrt{\pi}}\frac{\beta_8}{\beta_7}p_4\left(\frac{7}{2}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{z}{6}\right)p_2(3)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{32}{105\sqrt{\pi}}\left(5+\frac{3\beta_8}{\beta_7}+2z\right)p_2\left(\frac{7}{2}\right)+\frac{7}{25\sqrt{\pi}}(t^2+8)^{3/4}\left[\frac{2}{5}p_2\left(\frac{13}{4}\right)+\frac{z}{12}\frac{\beta_9}{\beta_7}p_4\left(\frac{17}{4}\right)\right]+\right.$$

$$+\frac{z}{8}\left(\frac{\beta_9}{8\beta_7}+\frac{\gamma_1}{3}\right)p_4(4)+\frac{1}{2}p_1(2)p_3(2)+\frac{8}{315\sqrt{\pi}}\left[4z\left(\frac{\beta_{10}}{\beta_7}+\frac{\gamma_1\beta_8}{3\beta_7}\right)p_4\left(\frac{9}{2}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+3hzp_1\left(\frac{7}{2}\right)+hp_1\left(\frac{9}{2}\right)+3hz(3+2z)\sqrt{\frac{t}{\pi}}e_z(t-z)^{7/2}\eta_1+hz\kappa\frac{\beta_9}{\beta_7}(t-z)^{9/2}\eta_1\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{zt}{4}(t+4)(t-z)^2\eta_1+\frac{hz}{48}t^4+\frac{\gamma_1}{24}p_2(4)+\frac{64\gamma_1}{945}\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_2\left(\frac{9}{2}\right)+\frac{1}{10}\left(\frac{\gamma_1\sqrt{\pi}}{4}+\frac{\gamma_2}{3}\right)p_2(5)\right\}\qquad(3.6)$$

$$p_1(x)=t^x-(t-z)^x\eta_1,\quad p_2(x)=(t-z)^x\eta_1-(t-\varepsilon z)^x\eta_2$$

$$p_3(x)=t^x\eta_0+z^x\eta_1,\quad p_4(x)=(t-z)^x\eta_1+(t-\varepsilon z)^x\varepsilon^{-1}\eta_2$$

4. Рассмотрим пример. Пусть $f(r)=\delta^3(r^2+\delta^2)^{-3/2}$. Тогда $f^H(\lambda)=\delta^2e^{-\lambda\delta}$, A_{mn} выражаются в элементарных функциях [8], $\beta_n=n!/\delta^{n-1}$.

Вычисления по формулам (2.7) проводились для $\nu=0{,}25$, $\delta=4\cdot10^9$. При $t=1{,}5\cdot10^8$, $r=0{,}2\delta$ безразмерное напряжение $\sigma_{zz}/(2m_0G)$ имеет минимум $\sigma^{(1)}_{\min}=-2{,}64\cdot10^{-6}$ при $z=t$ (на фронте продольной волны), максимум $\sigma_{\max}=1{,}409\cdot10^{-9}$ при $z=0{,}6306t/\varepsilon$ ($z=t/\varepsilon$ – фронт поперечной волны) и минимум $\sigma^{(2)}_{\min}=-5{,}622\cdot10^{-10}$ при $z=0{,}0004t$. На фронте продольной волны производная $\partial\sigma_{zz}/\partial z$ терпит разрыв. Максимальная абсолютная погрешность δ_{zz} в соответствии с (3.6) не превосходит $8{,}625\cdot10^{-11}$. Относительная погрешность при $0\leqslant z\leqslant t$ не превосходит 8% вне окрестностей значений z, в которых σ_{zz} меняет знак.

Характерное для неодномерной задачи напряжение $\sigma_{rz}/(2m_0G)$ имеет минимум $\sigma_{\min}^{(1)} = -7{,}471\cdot10^{-13}$ при $z = 0{,}8828t$, максимум $\sigma_{\max} = 5{,}245 \cdot 10^{-12}$ при $z = t/\varepsilon$ и минимум $\sigma_{\min}^{(2)} = -2{,}890\cdot10^{-8}$ при $z = 0{,}0006t$. Максимальная относительная погрешность при $0 \leqslant z \leqslant$ $\leqslant t$ не превосходит 15% вне окрестностей значений z, в которых σ_{rz} меняет знак.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Даниловская В.И.* Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы // ПММ. 1950. Т. 14. Вып. 3. С. 316–318.
2. *Даниловская В.И.* Об одной динамической задаче термоупругости // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 3. С. 341–344.
3. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 251 с.
4. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
5. *Бойко М.С.* Обобщенная динамическая задача термоупругости для полупространства, нагреваемого лазерным излучением // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 3. С. 470–475.
6. *Долотов М.В., Килль И.Д.* Об асимптотике решения динамической задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 109–116.
7. *Германович Л.Н., Долотов М.В., Килль И.Д.* Динамическая задача термоупругости для полупространства с распределенными источниками тепла в случае осевой симметрии // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 147–158.
8. *Германович Л.Н., Килль И.Д.* О термонапряжениях в упругом полупространстве // ПМТФ. 1983. № 3. С. 159–164.
9. *Петрашень Г.И., Марчук Г.И., Огурцов К.И.* О задаче Лемба в случае полупространства // Учён. зап. ЛГУ. 1960. № 135. Сер. мат. Вып. 21. С. 71–118.
10. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
11. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.IV.1994