

УДК 539.3

© 1995 г. А.В. Хохлов

**РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПУТЕМ
МИНИМИЗАЦИИ ГРАНИЧНОЙ НЕВЯЗКИ
НА ПРОСТРАНСТВЕ БИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ**

Смешанная задача двумерной теории упругости сводится к бигармонической краевой задаче для функции напряжений (это принято лишь в случае заданных на всей границе усилий), для решения которой предлагается численно-аналитический подход, основанный на аппроксимации бигармоническими функциями. Он позволяет понизить геометрическую размерность краевой задачи, сводя ее к минимизации граничной невязки. Получаемое приближенное решение тождественно удовлетворяет всем уравнениям теории упругости, а заданные граничные условия аппроксимируют с высокой точностью.

Родственные методы решения задач механики рассматривались в работах [1–8].

1. Общая схема метода. Идея использования гармонических базисных функций при решении задачи Дирихле вариационным методом [1] допускает обобщение [7] на произвольные краевые задачи для систем линейных уравнений в частных производных:

$$Af = 0 \text{ в } G, \quad Vf = g \text{ на } \Gamma \tag{1.1}$$

где G – область в \mathbb{R}^k с границей Γ , $f: G \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$ – искомая функция (в общем случае векторнозначная), A – линейный дифференциальный оператор в линейном пространстве $V(G)$ функций из G в \mathbb{R}^α , $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^\beta$ – функция, задающая граничные значения для f и комбинаций ее производных, $V(\Gamma)$ – некоторое пространство граничных функций из Γ в \mathbb{R}^β , B – линейный дифференциальный оператор из $V(G)$ в $V(\Gamma)$, определяющий характер краевых условий. В этом разделе под "решением" уравнения или краевой задачи можно иметь в виду либо регулярное, либо обобщенное (слабое) решение.

Последовательность приближенных решений (1.1) строится в виде

$$f_N(x) = \sum_1^N c_i \varphi_i(x) \tag{1.2}$$

где $c_i \in \mathbb{R}$, $\{\varphi_i(x) | x \in G, i = 1, 2, \dots\}$ – некоторая линейно независимая, полная в определенном ниже смысле система функций, из множества $K = K(A, G, B)$ всех решений уравнения $Af = 0$ в G , входящих в область определения оператора граничных условий B (K – линейное пространство над \mathbb{R} , ибо A и B линейны). В силу выбора базисных аппроксимирующих функций $\varphi_i(x)$ и линейности оператора A $Af_N = 0$ в G при $\forall c_i \in \mathbb{R}$. Поэтому коэффициенты c_i подбираются так, чтобы приближенное решение (1.2) точнее удовлетворяло краевым условиям, т.е. c_i разыскиваются из условия минимальности на пространстве K некоторого функционала вида

$$F[f] \equiv F_g[f] = \|Bf - g\|_\Gamma^2, \quad f \in K(A, G, B) \tag{1.3}$$

где $\|\cdot\|_\Gamma$ обозначает вещественную функцию на $V(\Gamma)$, равную нулю лишь на нулевом элементе линейного пространства $V(\Gamma)$ (такие функции будем для краткости называть "нормами", имея в виду, что все нормы обладают этим свойством). Оно обеспечивает совпадение множеств минималей функционала (1.3) в K и решений краевой задачи (1.1) с фиксированной функцией g (они оба совпадают с множеством $\{f \in K \mid F_g[f] = 0\}$).

По своему определению линейное пространство K совпадает с множеством всех решений краевой задачи (1.1) для разных $g \in V(\Gamma)$. Поэтому класс функций $g \in V(\Gamma)$, для которых краевая задача (1.1) разрешима, совпадает с подпространством $B(K)$. В дальнейшем предполагается, что решение \hat{f} краевой задачи (1.1) существует и единственно, т.е. функционал (1.3) имеет единственную минимальную в K . Для ее поиска может быть использован любой из известных методов минимизации функционалов. Если благодаря удачному выбору "нормы" ограничение $F_N(c_1, \dots, c_N)$ функционала F на N -мерное подпространство функций вида (1.2) окажется дифференцируемой функцией, то необходимые условия ее минимума $\partial F_N / \partial c_k = 0$ ($k = 1, \dots, N$) дадут систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов c_i . Эти уравнения линейны, когда функция F_N квадратична (например, если норма порождена любым скалярным умножением в $V(\Gamma)$).

Функционал F (меру отклонения граничных значений приближенного решения от заданных граничных условий) можно выбирать по-разному, используя различные "нормы" в $V(\Gamma)$. От формы функционала F зависят как вид разрешающей системы уравнений для c_i (а значит, и приближенное решение (1.2)), так и тип сходимости граничной невязки $Rf_N \equiv Vf_N - g$ к нулю при $N \rightarrow \infty$ и отвечающий ему тип сходимости приближений f_N к точному решению \hat{f} задачи (1.1). Выбором F определяется и требуемый вид полноты семейства базисных функций φ_i в пространстве K , который обеспечивает построение минимизирующей последовательности f_N функционала F , т.е. сходимость $F[f_N] = \|Rf_N\|_\Gamma$ к $\min_{f \in K} F[f] = F[\hat{f}] = 0$ при $N \rightarrow \infty$ и в конечном счете сходимость f_N к \hat{f} для любых $g \in B(K)$ в (1.1). Очевидно, последовательность $\{f_N\}$ функций (1.2) с коэффициентами c_i , найденными из условия минимальности функционала (1.3) на подпространстве всех линейных комбинаций вида (1.2), будет минимизирующей последовательностью для F при любом $g \in B(K)$ тогда и только тогда, когда семейство базисных функций $\{\varphi_i\}$ F -полно (по функционалу (1.3)) в пространстве K , т.е. для любых $g \in B(K)$ и $\varepsilon > 0$ существуют $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, такие, что

$$F\left[\sum_1^k \alpha_i \varphi_i\right] \equiv \left\| \sum_1^k \alpha_i Vf_i - g \right\|_\Gamma^2 < \varepsilon$$

Поскольку $A(f_N - \hat{f}) = 0$ в G , из сходимости $\|Vf_N - g\|_\Gamma \rightarrow 0$ можно вывести некоторое заключение и о поведении при $N \rightarrow \infty$ погрешности $f_N - \hat{f}$ внутри G , используя интегральные представления решений уравнений в частных производных и аналоги принципа максимума для гармонических функций: если норма $\|\cdot\|_G$ в K , отвечающая желаемому типу сходимости $f_N \rightarrow \hat{f}$, согласована с $\|\cdot\|_\Gamma$ в $B(K)$ так, что

$$0 \leq \|f\|_G \leq M \|Vf\|_\Gamma, \quad \forall f \in K \quad (1.4)$$

где $M > 0$ не зависит от f , то $\|Vf_N - g\|_\Gamma \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ влечет $\|f_N - \hat{f}\|_G \rightarrow 0$: $\|f_N - \hat{f}\|_G \leq M \|V(f_N - \hat{f})\|_\Gamma = M \|Vf_N - V\hat{f}\|_\Gamma = M \|Vf_N - g\|_\Gamma$. В случае единственности решения задачи (1.1) для всех $g \in B(K)$ оператор $V: K \rightarrow B(K)$ биективен.

вен. Неравенство (1.4) означает, что обратный оператор $B^{-1}: B(K) \rightarrow K$ непрерывен по отношению к выбранным нормам, т.е. краевая задача (1.1) корректна.

Главное отличие намеченного подхода от большинства численных методов состоит в том, что сначала обеспечивается принадлежность приближения (1.2) множеству решений дифференциального уравнения задачи (1.1), общего для всех краевых задач, описывающих некоторое физическое явление, и лишь затем учитывается индивидуальность каждой конкретной задачи в процессе приближенного удовлетворения граничных условий. Вследствие этого появляются возможности: понизить геометрическую размерность задачи; использовать универсальную (для фиксированного A в (1.1)) систему базисных функций при решении задач, различающихся краевыми условиями; получать гладкие приближенные решения, тождественно удовлетворяющие дифференциальным уравнениям задачи; доказывать сходимость последовательности приближенных решений, используя оценки для решений дифференциальных уравнений внутри области через нормы их граничных значений (аналогичные принципу максимума), фундаментальные решения, интегральные представления решений, теоремы вложения; разработать замкнутый полуаналитический высокоточный вычислительный алгоритм с минимальным объемом входных данных (аналитические выражения, задающие параметрическое представление границы области и краевые условия, несколько числовых параметров-режимов); оценивать погрешность приближенного решения внутри области по величине отклонения его граничных значений от заданных краевых условий, просто и надежно контролировать достоверность численных расчетов; вычислять искомые величины не только в узлах, а в любой точке области, применять аналитическое дифференцирование для определения дополнительных физических величин, связанных с искомыми; аналитически описывать в приближенном решении особенности решения краевой задачи, возникающие в точках излома границы, разрывов граничных данных, приложения сосредоточенных сил (источников). Эти качества позволяют значительно расширить класс тестовых задач, используемых при анализе погрешностей других численных методов. Сфера применения метода на начальном этапе развития включает краевые задачи для линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами (когда удастся построить семейства решений уравнений, пригодные для использования в качестве базисных, например, гипербола-тригонометрических или полиномиальных [4, 5, 7], в частности, смешанные краевые задачи механики кусочно однородных анизотропных сред. К решению последовательностей таких задач можно сводить и задачи для нелинейных уравнений с переменными коэффициентами.

2. Сведение смешанной задачи двумерной теории упругости к краевой задаче для бигармонического уравнения. Определение напряжений и перемещений в однородном изотропном линейно-упругом теле, находящемся в состоянии плоской деформации или плоского напряженного состояния, сводится к решению краевой задачи для системы уравнений равновесия и неразрывности деформаций двумерной теории упругости в плоской области G с кусочно-гладкой границей Γ , на части Γ_1 которой заданы распределенные усилия, а на оставшей части Γ_2 – смещения. Область G будем считать односвязной, Γ_1 и Γ_2 могут состоять из нескольких компонент, причем не исключаются случаи $\Gamma_1 = \Gamma$ или $\Gamma_2 = \Gamma$. В отсутствие массовых сил в G введение функции напряжений Эйри $\varphi(x, y)$ (см. (2.4)) приводит к краевой задаче для бигармонического уравнения:

$$\Delta^2 \varphi(x, y) = 0 \quad \text{в } G \quad (2.1)$$

$$\sigma_{nx}|_{\Gamma_1} = X(s), \quad \sigma_{ny}|_{\Gamma_1} = Y(s), \quad u|_{\Gamma_2} = U(s), \quad v|_{\Gamma_2} = V(s) \quad (2.2)$$

где s – переменная длина дуги кривой Γ с кусочно-непрерывной внешней нормалью $n(s)$, $X(s)$, $Y(s)$ и $U(s)$, $V(s)$ – проекции заданных на Γ_1 распределенных усилий и

заданных на Γ_2 смещений граничных точек на оси декартовой системы координат, $\sigma_{nx}|_{\Gamma}$, $\sigma_{ny}|_{\Gamma}$ – проекции на эти оси внутренних напряжений в граничных точках G :

$$\sigma_{nx}|_{\Gamma} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{\Gamma} \right) \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial y} \Big|_{\Gamma}, \quad \sigma_{ny}|_{\Gamma} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{\Gamma} \right) \equiv -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial x} \Big|_{\Gamma} \quad (2.3)$$

В соответствии с задачей поиска регулярного решения (непрерывных в замкнутой области \bar{G} полей напряжений и перемещений) предполагается, что всюду, кроме точек излома границы Γ , функции $X(s)$, $Y(s)$ непрерывны на Γ_1 , $U(s)$, $V(s)$ непрерывно дифференцируемы на Γ_2 . В точках излома границы должны выполняться специальные условия сопряжения односторонних предельных значений функций $X(s)$, $Y(s)$, $U(s)$, $V(s)$ и их производных, необходимые для существования регулярного решения [9]. При $\Gamma_1 = \Gamma$ заданные граничные усилия должны удовлетворять трем уравнениям равновесия области G в целом. Решение задачи (2.1), (2.2) разыскивается в факторпространстве $K(G)$ пространства всех бигармонических в G функции класса $C^4(G) \cap C^2(\bar{G})$ по подпространству линейных функций (им соответствует нулевое поле напряжений (2.4)).

Напряжения и перемещения в любой точке замкнутой области \bar{G} выражаются через $\varphi(x, y)$ по формулам

$$\sigma_x(x, y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y(x, y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy}(x, y) = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (2.4)$$

$$\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_u \varphi \\ D_v \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega_0 y + y_0 \omega_0 + u_0 \\ \omega_0 x - x_0 \omega_0 + v_0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} D_u \varphi = E_*^{-1} & \left(-v_* \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) + \int_{x_0}^x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(\xi, y) d\xi - \int_{y_0}^y \left(\int_{x_0}^{\xi} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}(x_0, t) dt \right) d\xi - \right. \\ & \left. - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y) + y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) - y_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + (v_* + 2) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} D_v \varphi = E_*^{-1} & \left(-v_* \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) + \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, \xi) d\xi - \int_{x_0}^x \left(\int_{y_0}^{\xi} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3}(t, y_0) dt \right) d\xi - \right. \\ & \left. - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y_0) + x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) - x_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + (v_* + 2) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

где для плоского напряженного состояния $E_* = E$ и $v_* = v$ – модуль упругости и коэффициент Пуассона упругой среды, а для плоской деформации $E_* = E(1 - v^2)^{-1}$, $v_* = v(1 - v)^{-1}$, (x_0, y_0) – произвольно фиксированная точка области G , $\omega(x, y) = \frac{1}{2} (\partial v / \partial x - \partial u / \partial y)$ – угол жесткого поворота в точке (x, y) , $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$, $\omega_0 = \omega(x_0, y_0)$ – постоянные, определяющие смещение области G как абсолютно твердого тела, $D = \begin{pmatrix} D_u \\ D_v \end{pmatrix}$ – линейный интегро-дифференциальный оператор, взаимно

однозначно [7] сопоставляющий бигармонической функции $\varphi(x, y) \in K(G)$ деформационную компоненту $D\varphi$ поля перемещений (векторное поле на G , обращающее в

тождество однородные двумерные уравнения Ламе) с нулевыми смещениями и углом жесткого поворота в точке (x_0, y_0) .

Формулы (2.5)–(2.7), в явном (и пригодном в качестве конкретной инструкции для ЭВМ) виде выражающие поле перемещений в односвязной области G через функцию напряжений и позволяющие свести смешанную задачу двумерной теории упругости к бигармонической краевой задаче для функции напряжений, выведены в [7]. Они могут рассматриваться как еще одна форма общего решения однородных уравнений Ламе в односвязной области.

По найденной в результате решения краевой задачи (2.1), (2.2) функции напряжений φ с помощью формул (2.4)–(2.7) определяются напряжения и перемещения в любой точке замкнутой области \bar{G} .

Переход к краевой задаче для бигармонического уравнения (осуществляемый обычно лишь в случае $\Gamma_1 = \Gamma$, если не требуется найти перемещения) позволяет использовать одну и ту же базисную систему $\{\varphi_i\}$ для решения задач теории упругости и изгиба пластин.

3. Приближенное решение. Приближенное решение задачи (2.1), (2.2) строится в виде

$$\varphi(x, y) = \varphi^N(x, y) = \sum_{-2}^N c_i \varphi_i(x, y) \quad (3.1)$$

где $\varphi_i(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots$) – некоторая система линейно независимых бигармонических в G функций из пространства $K(G)$. При любых N и c_i функция (3.1) удовлетворяет уравнению (2.1) в G . Коэффициенты c_i , обеспечивающие наилучшую аппроксимацию граничных условий (2.2), определяются из условия минимальности на K функционала

$$F[\varphi] = \sum_{l=0}^1 \int_{\Gamma_1} (((\sigma_{nx}|_{\Gamma_1} - X(s))^{(l)})^2 + ((\sigma_{ny}|_{\Gamma_1} - Y(s))^{(l)})^2) w_l(s) ds + \\ + \gamma \sum_{l=0}^1 \int_{\Gamma_2} (((u|_{\Gamma_2} - U(s))^{(l)})^2 + ((v|_{\Gamma_2} - V(s))^{(l)})^2) w_l(s) ds \quad (3.2)$$

где $g^{(l)}(s) = d^l g / ds^l$, масштабный множитель $\gamma = E^2 / \Gamma^2$ служит для выравнивания размерностей и порядка величин слагаемых, а кусочно-непрерывные на Γ весовые функции $w_0(s) > 0$, $w_1(s) \geq 0$ – для настройки функционала в соответствии с желаемыми свойствами последовательности приближенных решений (например, $w_l(s)$ может быть кусочно-постоянной функцией, принимающей наибольшее значение на тех участках границы, где желательна более точная аппроксимация, и равная нулю там, где не требуется малость соответствующей невязки). Задача минимизации функционала (3.2) на K (или $K(G) \cap C^3(\bar{G})$ при $w_i(s) \neq 0$) эквивалентна (см. раздел 1) краевой задаче (2.1), (2.2). В предположении существования и единственности регулярного решения задачи (2.1), (2.2) функционал (3.2) имеет единственную минимальную в K – точное решение задачи (2.1), (2.2).

Функции напряжений (3.1) соответствует поле перемещений (2.5):

$$\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \sum_{-2}^N c_i \begin{pmatrix} u_i(x, y) \\ v_i(x, y) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

$$\begin{pmatrix} u_{-2} \\ v_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_{-1} \\ v_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_u \varphi_i \\ D_v \varphi_i \end{pmatrix} \equiv D \varphi_i, \quad i \geq 1 \quad (3.4)$$

Соответствующие граничные напряжения вычисляются по (2.3):

$$\sigma_{nx}|_{\Gamma} = \sum_{-2}^N c_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial s \partial y} \Big|_{\Gamma}, \quad \sigma_{ny}|_{\Gamma} = -\sum_{-2}^N c_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial s \partial x} \Big|_{\Gamma} \quad (3.5)$$

где $\varphi_{-2} \equiv \varphi_{-1} \equiv \varphi_0 \equiv 0$. Подстановка (3.3), (3.5) в (3.2) превращает функционал F в квадратичную функцию $F(c_{-2}, \dots, c_N)$ на \mathbb{R}^{N+3} . Необходимые условия ее экстремальности $\partial F / \partial c_k = 0$ приводят к системе $N + 3$ линейных уравнений для определения коэффициентов c_i , обеспечивающих наилучшее приближение граничных условий (2.2):

$$\sum_{i=-2}^N p_{ki} c_i = q_k, \quad k = -2, -1, \dots, N \quad (3.6)$$

$$p_{ki} = \sum_{l=0}^1 \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial s \partial y} \Big|_{\Gamma_1}^{(l)} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial s \partial y} \Big|_{\Gamma_1}^{(l)} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial s \partial x} \Big|_{\Gamma_1}^{(l)} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial s \partial x} \Big|_{\Gamma_1}^{(l)} \right) w_l(s) ds +$$

$$+ \gamma \sum_{l=0}^1 \int_{\Gamma_2} (u_k|_{\Gamma_2}^{(l)} u_i|_{\Gamma_2}^{(l)} + v_k|_{\Gamma_2}^{(l)} v_i|_{\Gamma_2}^{(l)}) w_l(s) ds \quad (3.7)$$

$$q_k = \sum_{l=0}^1 \int_{\Gamma_1} \left(X^{(l)}(s) \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial s \partial y} \Big|_{\Gamma_1}^{(l)} - Y^{(l)}(s) \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial s \partial x} \Big|_{\Gamma_1}^{(l)} \right) w_l(s) ds +$$

$$+ \gamma \sum_{l=0}^1 \int_{\Gamma_2} (U^{(l)}(s) u_k|_{\Gamma_2}^{(l)} + V^{(l)}(s) v_k|_{\Gamma_2}^{(l)}) w_l(s) ds \quad (3.8)$$

Матрица $\|p_{ki}\|$ симметрична и положительно определена (как матрица положительной квадратичной формы). Поэтому для любого N система (3.6) имеет единственное решение, причем неотрицательная квадратичная функция $F(c_{-2}, \dots, c_N)$ достигает на нем минимума. При $\Gamma_1 = \Gamma$ (3.6) превращается в систему N уравнений для $c_i, i > 0$ ($p_{ki} = 0, q_k = 0$ при $k \leq 0$ или $i \leq 0$), а для нахождения коэффициентов $c_i, i < 0$, определяющих жесткое смещение области \bar{G} , необходимо учесть статически определенную систему закреплений \bar{G} (например, из трех опор, не допускающих перемещения трех точек вдоль своих осей [7]). Найденные для каждого N из системы (3.6) значения c_i определяют последовательность приближенных решений φ^N (3.1).

Каждое из трех указанных свойств семейства базисных функций φ_i играет важную роль: условие $\varphi_i \in K(G)$ обеспечивает принадлежность пространству $K(G)$ приближенного решения (3.1), в частности – его бигармоничность в G ; линейная независимость $\{\varphi_i\}$ гарантирует существование и единственность решения системы (3.6) при любом N ; F – полнота $\{\varphi_i\}$ обеспечивает построение минимизирующей последовательности функционала (3.2), т.е. сходимости граничной невязки к нулю и сходимости последовательности приближений (3.1) к точному решению задачи (2.1,2) при $N \rightarrow \infty$.

Для односвязной области всем этим требованиям к семейству φ_i удовлетворяет любой базис в линейном пространстве всех бигармонических полиномов. Его F – полнота – следствие утверждения: любая бигармоническая в ограниченной односвязной плоской области G функция $\varphi(x, y) \in C^{m+2}(\bar{G}), m \geq 1$, является пределом некоторой последовательности бигармонических полиномов, сходящейся по норме $C^m(\bar{G})$ (т.е. равномерно сходящейся на \bar{G} вместе с последовательностями производных до порядка m).

Доказательство. По теореме Гурса любая пара голоморфных в области G функций $f(z)$, $g(z)$, $z = x + iy$, порождает бигармоническую функцию $\varphi(x, y) = \operatorname{Re}(\bar{z}f(z) + g(z))$, а если G односвязна, то всякая бигармоническая в G функция представима в такой форме [11]. При этом $f(z) = \frac{1}{4} \int \Phi(z) dz$, где $\Phi(z)$ — такая голоморфная в G функция, что $\operatorname{Re}\Phi = \Delta\varphi$, а $\operatorname{Re}g = \Delta\varphi - x\operatorname{Re}f - y\operatorname{Im}f$, поэтому из $\varphi \in C^{m+2}(\bar{G})$ следует $\operatorname{Re}\Phi = \Delta\varphi \in C^m(\bar{G})$. Отсюда $\operatorname{Im}\Phi \in C^m(\bar{G})$ по условиям Коши-Римана, $\Phi \in C^m(\bar{G})$, и потому $f \in C^{m+1}(\bar{G})$, $\operatorname{Re}g \in C^m(\bar{G})$, а в силу условий Коши-Римана $\operatorname{Im}g \in C^m(\bar{G})$, т.е. $g \in C^m(\bar{G})$.

По теореме Мергеляна [12] (любая функция комплексной переменной z , непрерывная на компакте $E \subset \mathbb{C}$ и голоморфная в его внутренности, является пределом равномерно сходящейся на E последовательности полиномов от z тогда и только тогда, когда дополнение $\mathbb{C} \setminus E$ связно) существуют последовательности полиномов от z , равномерно сходящиеся к $f^{(m)}(z)$ и $g^{(m)}(z)$ на компакте \bar{G} . Проинтегрировав их m раз, получим последовательности полиномов $f_n(z)$, $g_n(z)$, такие что при $l \leq m$ $\{f_n^{(l)}(z)\}$ и $\{g_n^{(l)}(z)\}$ равномерно сходятся на \bar{G} к $f^{(l)}(z)$ и $g^{(l)}(z)$ (следовательно, $\operatorname{Re}f_n \rightarrow \operatorname{Re}f$, $\operatorname{Im}f_n \rightarrow \operatorname{Im}f$ по норме $C^m(\bar{G})$). Тогда последовательность бигармонических (по теореме Гурса) полиномов $p_n(x, y) = \operatorname{Re}(\bar{z}f_n(z) + g_n(z)) = x\operatorname{Re}f_n + y\operatorname{Im}f_n + \operatorname{Re}g_n$ сходится к $\varphi(x, y)$ по норме $C^m(\bar{G})$: для $\alpha, \beta \geq 0$, таких, что $\alpha + \beta \leq m$, последовательности

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} (p_n - \varphi) &= \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \operatorname{Re}(\bar{z}(f_n - f) + g_n - g) = \\ &= \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} (x\operatorname{Re}(f_n - f) + y\operatorname{Im}(f_n - f) + \operatorname{Re}(g_n - g)) \end{aligned}$$

равномерно сходятся на \bar{G} к нулю, ибо $\{\operatorname{Re}(f_n - f)\}$, $\{\operatorname{Im}(f_n - f)\}$, $\{\operatorname{Re}(g_n - g)\}$ сходятся к нулю в $C^m(\bar{G})$, а $|x|, |y| \leq C$ (G ограничена).

Доказанное утверждение обобщается и на многосвязные области, если заменить полиномы на рациональные бигармонические функции, не имеющие полюсов в G . Аналогичные теоремы о равномерной аппроксимации полиномиальными или рациональными решениями любого решения верны и для уравнений Лапласа [8] и колебаний струны.

Так как однородные компоненты любого бигармонического полинома бигармоничны, а размерность пространств P_m однородных бигармонических полиномов степени $m \geq 3$ равна 4, то базис пространства всех бигармонических полиномов можно получить, объединив в одну цепь базисы $\{p_{mj}, j = 1, 2, 3, 4\}$ подпространств P_m , построенные в [7]:

$$\varphi_{-2} = 1, \quad \varphi_{-1} = x, \quad \varphi_0 = y, \quad \varphi_1 = x^2, \quad \varphi_2 = 2xy, \quad \varphi_3 = y^2, \quad \varphi_i = p_{mj}(x, y), \quad i > 3 \quad (3.9)$$

$$p_{m1} = \sum_{l=0}^{[m/2]} (-1)^l (1-l) \frac{x^{m-2l} y^{2l}}{(m-2l)! (2l)!}, \quad p_{m3} = - \sum_{l=0}^{[m/2]} (-1)^l l \frac{x^{m-2l} y^{2l}}{(m-2l)! (2l)!}$$

$$p_{m2} = \sum_{l=0}^L (-1)^l (1-l) \frac{x^{m-2l-1} y^{2l+1}}{(m-2l-1)! (2l+1)!}, \quad p_{m4} = - \sum_{l=0}^L (-1)^l l \frac{x^{m-2l-1} y^{2l+1}}{(m-2l-1)! (2l+1)!}$$

$$m = \left[\frac{i}{4} \right] + 2, \quad j = i - 4 \left[\frac{i}{4} \right] + 1, \quad L = \left[\frac{m-1}{2} \right].$$

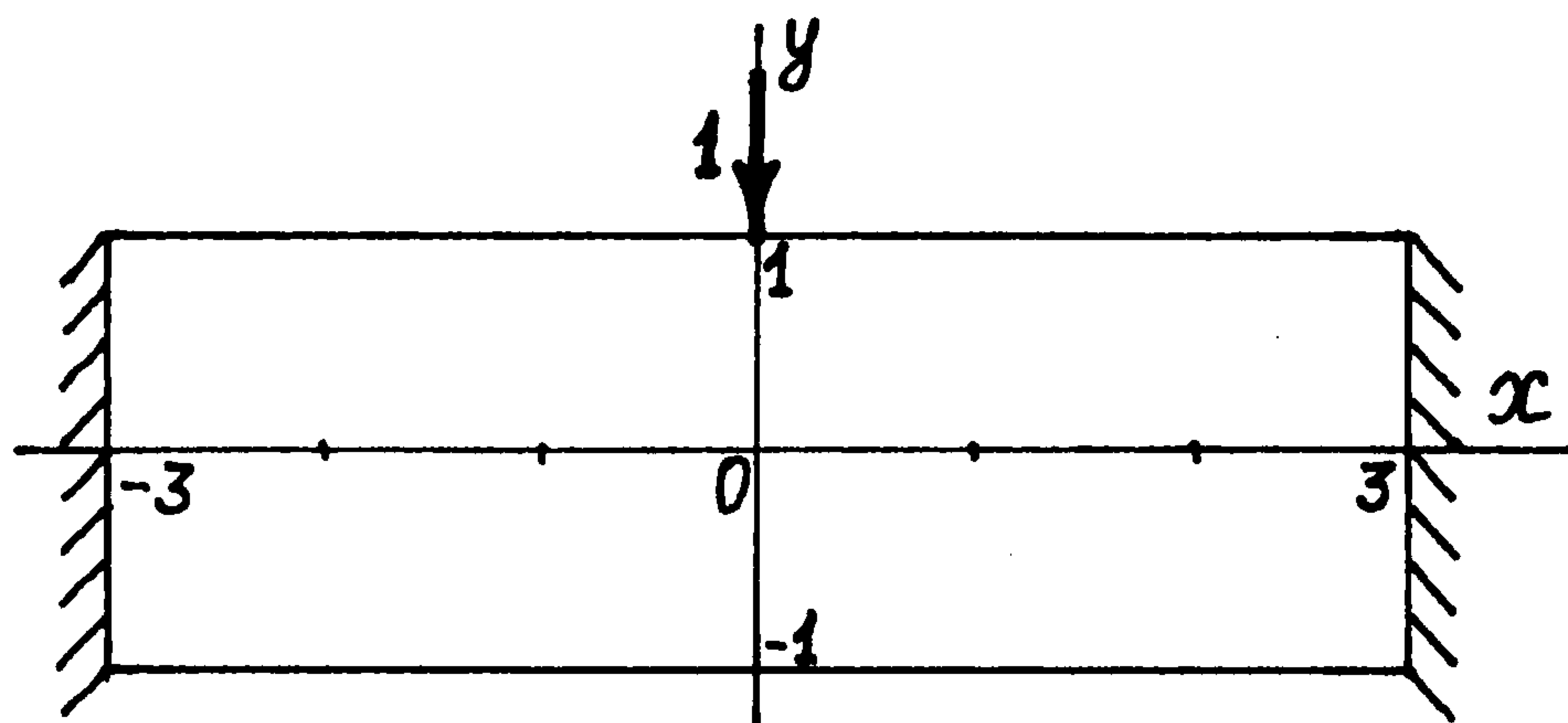
При таком выборе φ_i функция напряжений (3.1) окажется бигармоническим поли-

номом порядка $[N/4] + 2$, анализ структуры операторов D_u, D_v из (2.6), (2.7) при $x_0 = y_0 = 0$ показывает, что векторное поле $D\varphi_i$ в (3.3), (3.4) является однородным полиномиальным решением уравнений Ламе, а из линейной независимости $\{\varphi_i\}$ вытекает линейная независимость $\{D\varphi_i\}$. Таким образом, базисная система бигармонических полиномов φ_i порождает полную систему (3.4) линейно независимых полиномиальных решений двумерных уравнений Ламе. После подстановки (3.9) в (3.4) и вычисления (при $x_0 = y_0 = 0$) производных и интегралов, входящих в формулы (2.6), (2.7), в [7] получены выражения для коэффициентов полиномов u_i, v_i через известные коэффициенты полиномов (3.9).

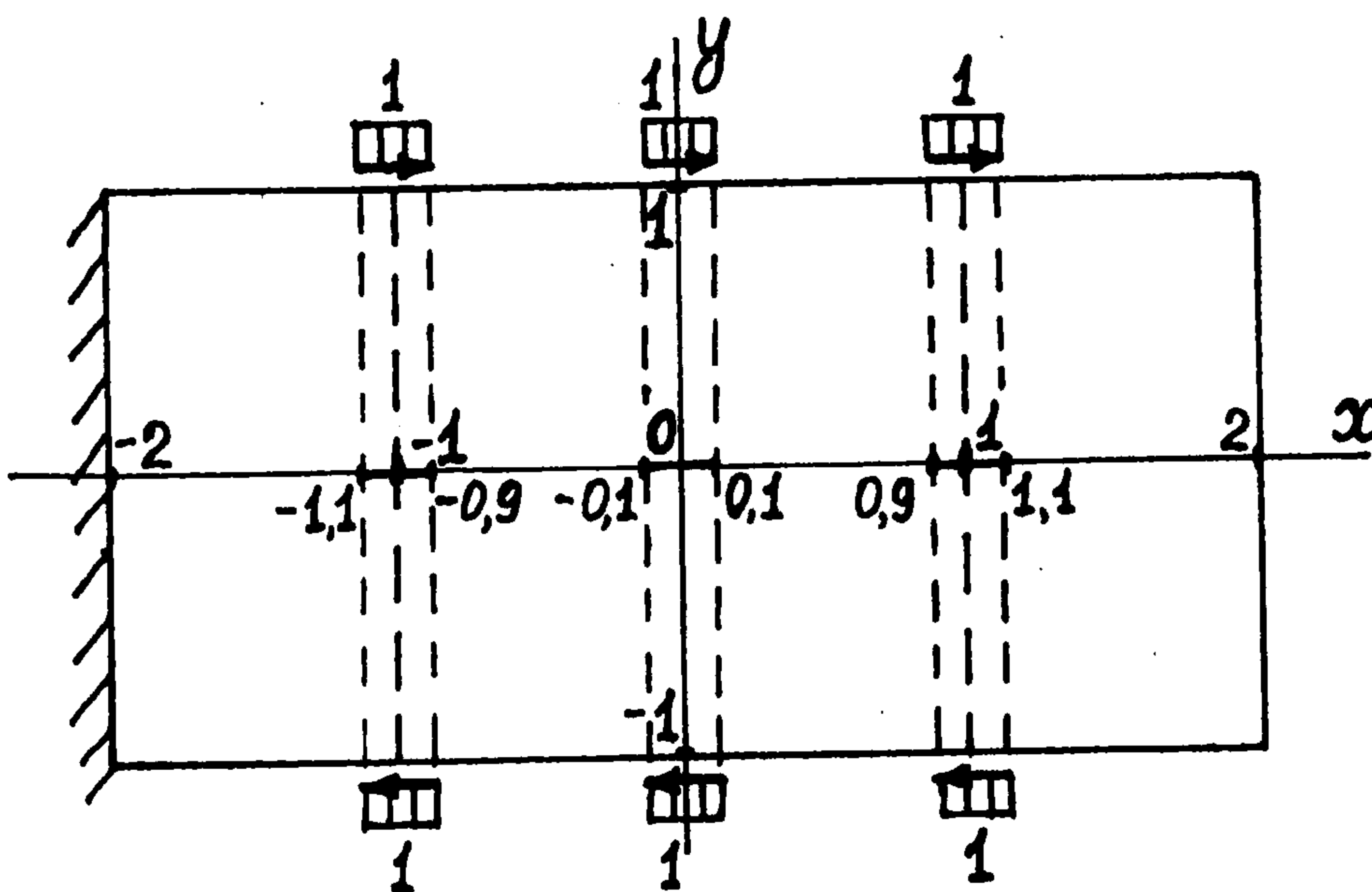
4. О численной реализации метода. Полиномиальные базисные функции φ_i обладают по крайней мере двумя привлекательными чертами: 1) они не связаны с конкретной областью G и обеспечивают сходимость приближенных решений к точному для любой односвязной области; 2) они удобны в вычислениях. Например, если параметрические уравнения $\Gamma, w_i(s)$ и $g(s)$ – кусочно-полиномиальные функции (в силу аппроксимативных свойств таких функций этот класс задач покрывает все нужды расчетной практики), то все интегралы в (3.7), (3.8) могут быть вычислены аналитически (с помощью пакетов символьных вычислений), и для p_{ki}, q_k получатся алгебраические формулы. В этом случае удастся исключить применение процедур численного интегрирования – основной источник вычислительной ошибки и затрат процессорного времени – и значительно повысить точность и эффективность алгоритма.

В общем случае матрица системы (3.6) не является разреженной, как и во всех вариационных методах, основанных на глобальной аппроксимации. Однако анализ формул (3.7), (3.8) позволяет обнаружить существенные упрощения в структуре системы (3.6) при наличии симметрических свойств у границы области G , базисных функций φ_i и граничных условий. В [7] получены достаточные условия обращения в нуль коэффициентов p_{ki} и q_k . В частности, установлено, что если части Γ_1 и Γ_2 границы G симметричны относительно обеих координатных осей, то три четверти от общего количества элементов p_{ki} будут нулевыми и расположены так, что система (3.6) распадается на четыре независимые подсистемы. При этом в зависимости от типа симметрии граничных условий (2.2) одна, две или три из них заведомо имеют нулевое решение.

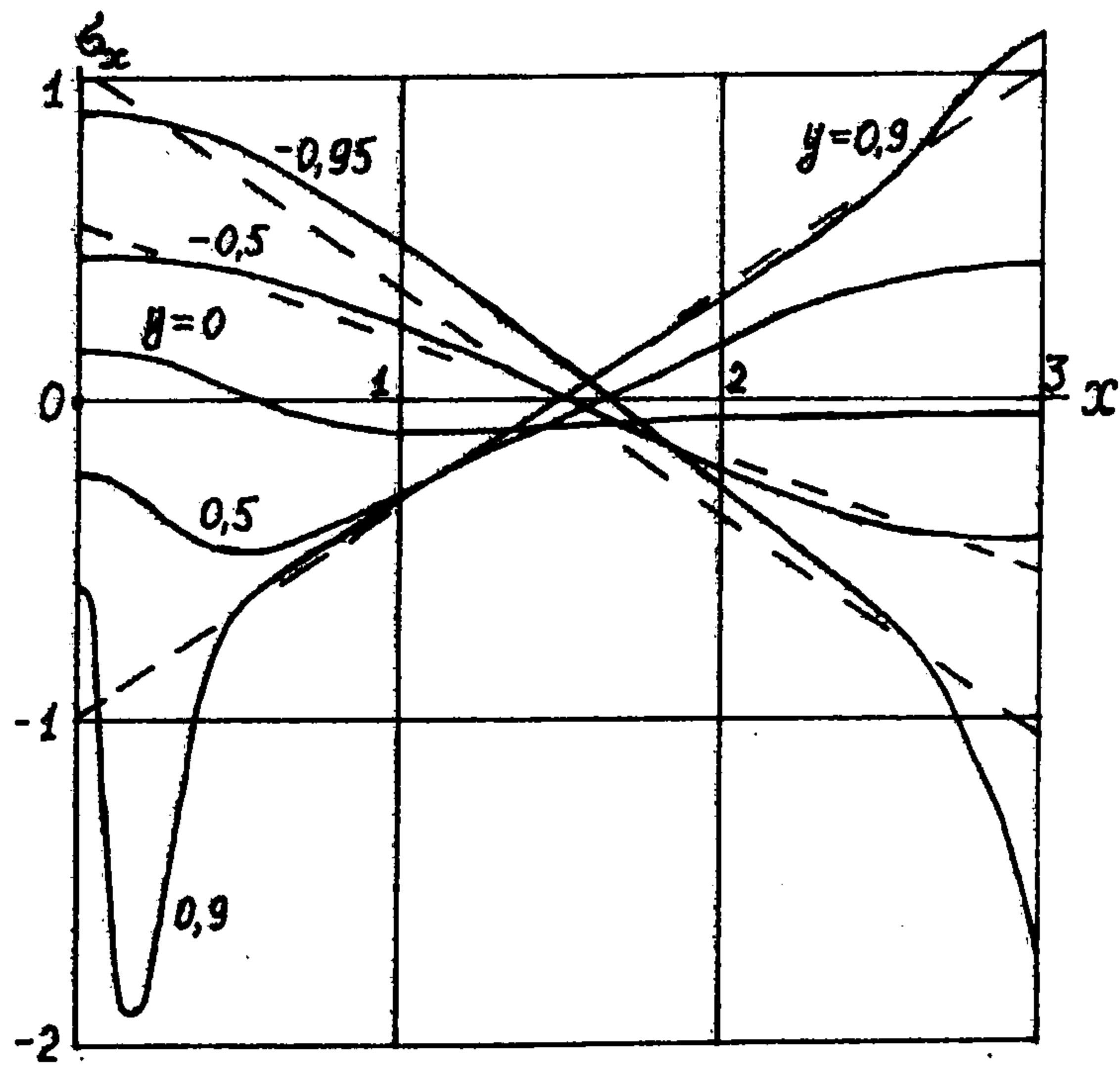
Использование полиномиальных базисных функций и установка на аналитический (символьный) ввод и обработку данных позволили разработать [7] общий вычислительный алгоритм и программный комплекс, позволяющий при минимальном объеме входных данных с высокой точностью находить распределение напряжений и перемещений в прямоугольной области под действием заданных на части ее границы смещений и приложенных на оставшейся



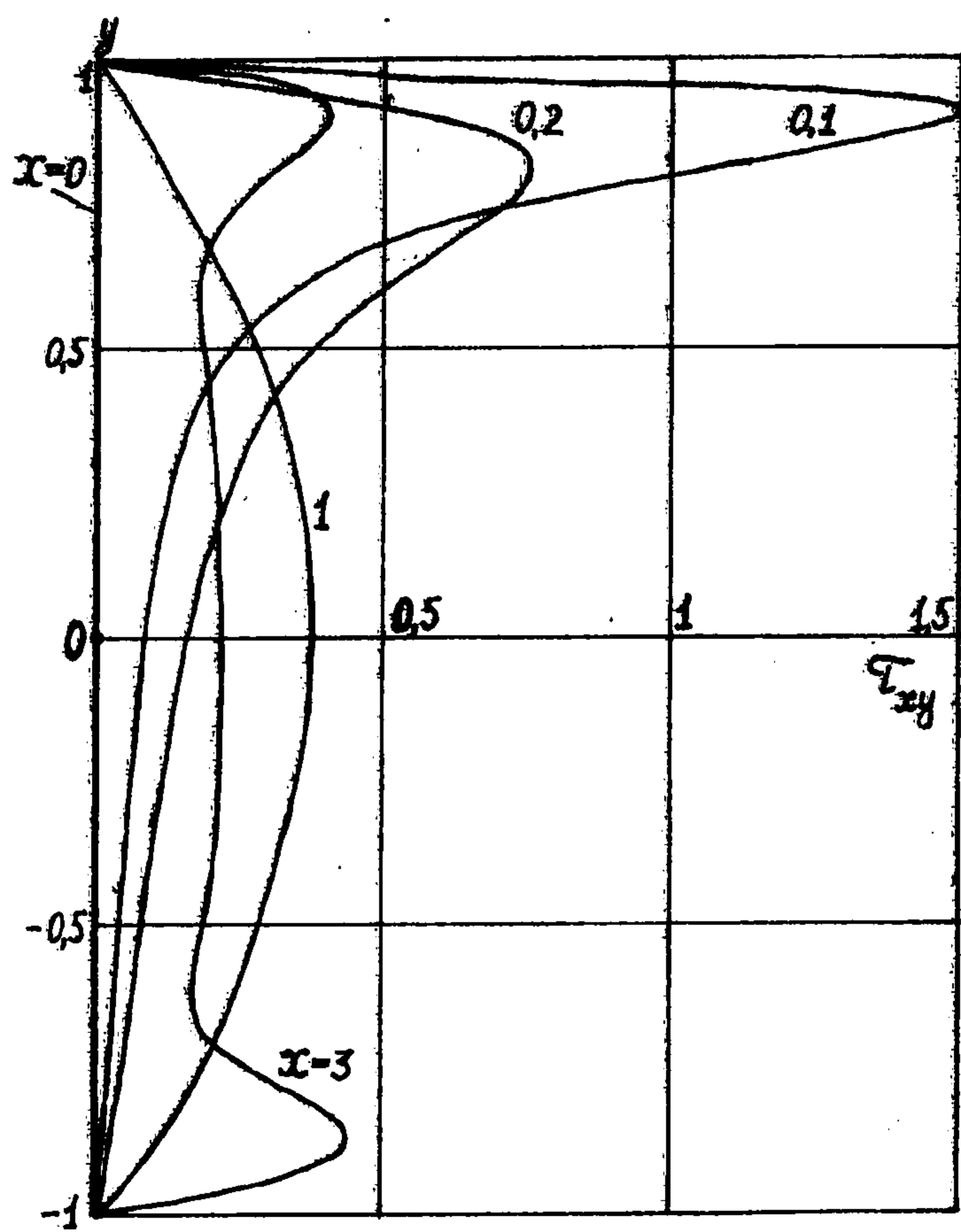
Фиг. 1



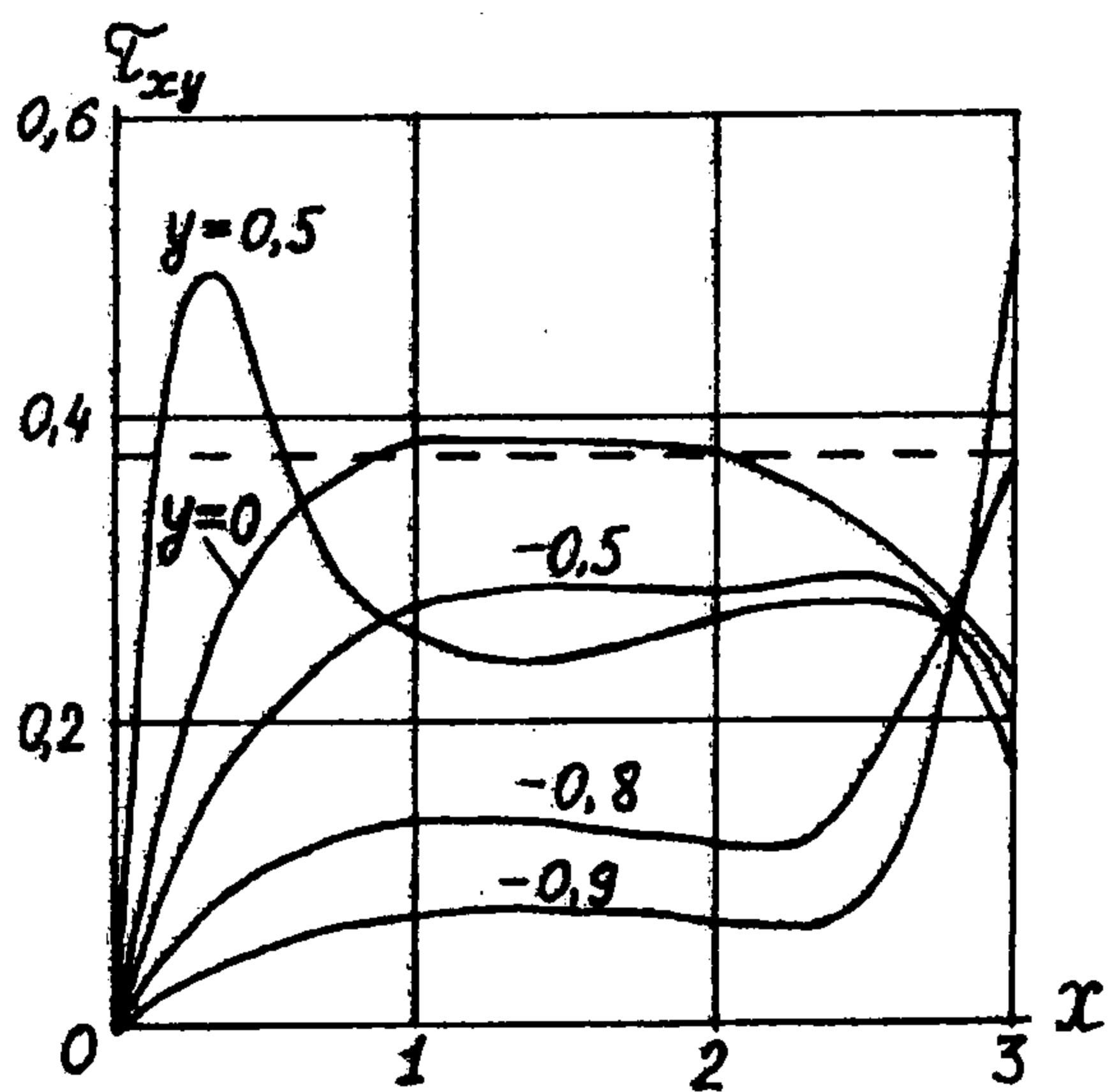
Фиг. 2



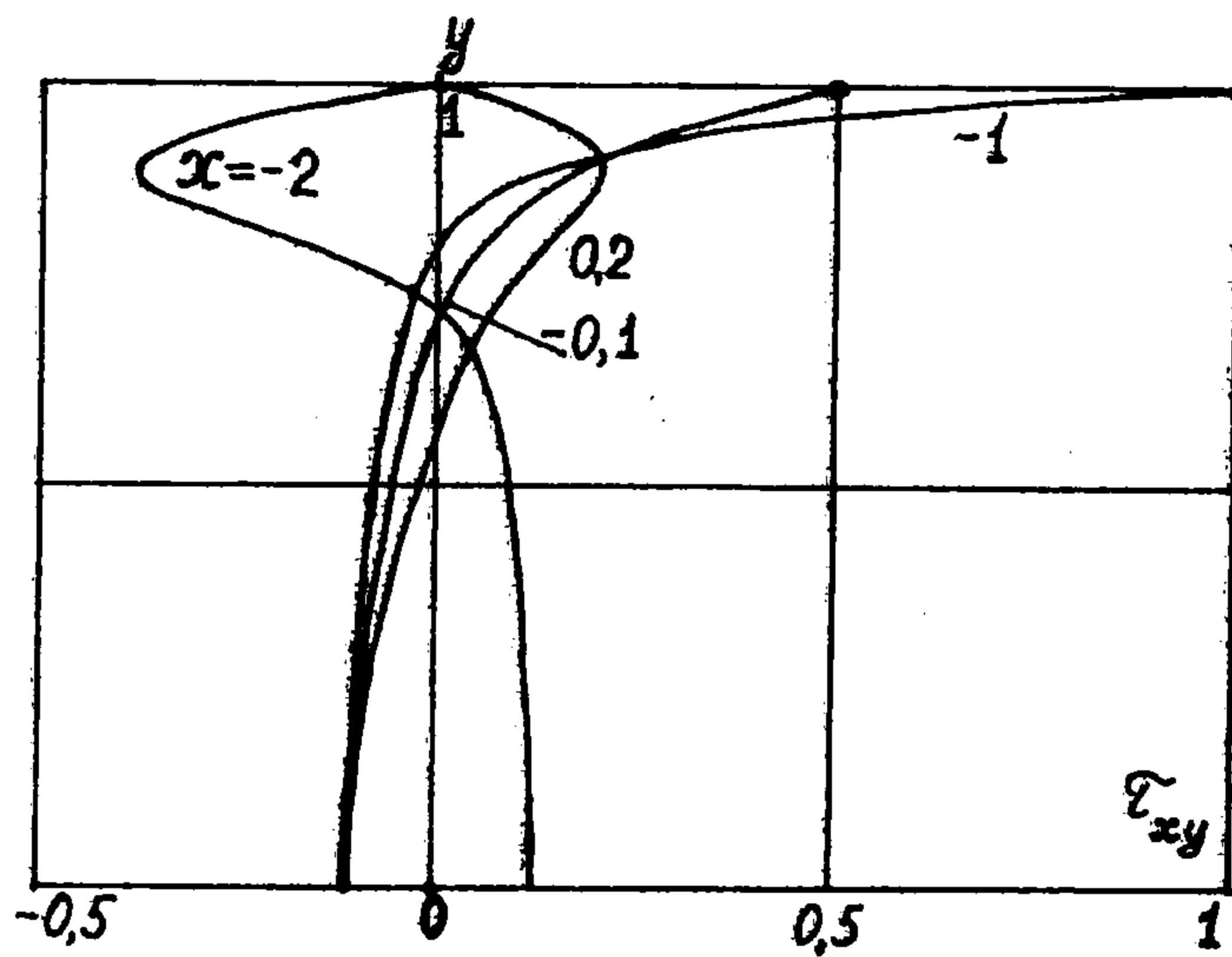
Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 4



Фиг. 6

части кусочно-непрерывных распределенных усилий и сосредоточенных сил. Нагрузка, включающая сосредоточенные силы и распределенные усилия с разрывами первого рода, сводится к непрерывным краевым условиям вида (2.2) путем автоматизированного выделения аналитически построенных полей напряжений и перемещений с особенностями специального типа в заданных граничных точках (они не являются дополнительным источником погрешности, поскольку удовлетворяют всем уравнениям теории упругости) [7, 10]. Такая предварительная регуляризация граничных условий улучшает вычислительные свойства системы (3.6) и позволяет понизить N .

Важная особенность описанного подхода и реализующей его программы – возможность простого контроля достоверности и уровня погрешности получаемых численных результатов: так как приближенное решение тождественно удовлетворяет всем уравнениям теории упругости, достаточно проверить, что отклонения вычисленных граничных значений напряжений и перемещений от данных малы и не превышают погрешности задания краевых условий (фактически, получается точное решение задачи с немного измененными граничными условиями).

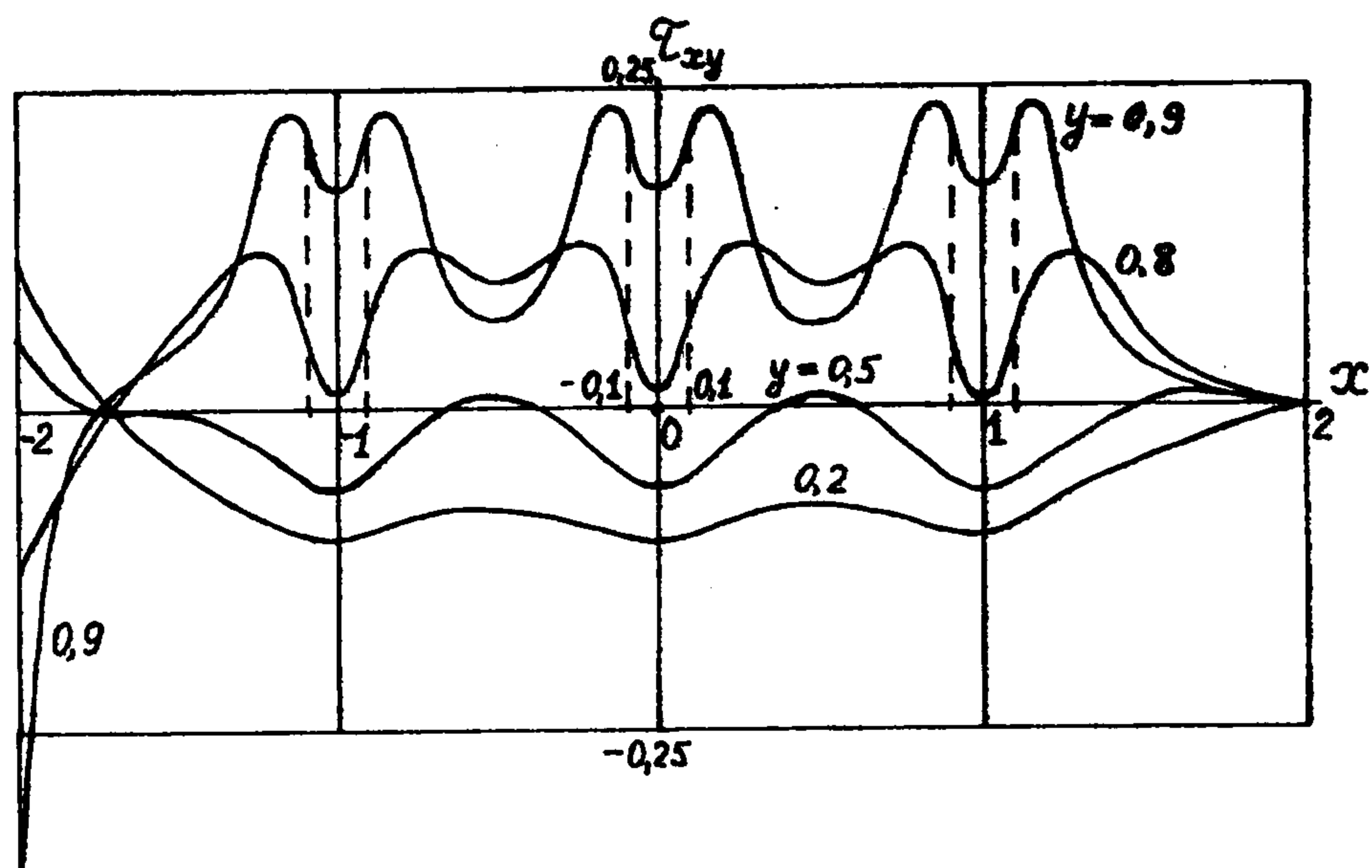
Разработанная программа за шестилетний срок своего существования была использована для решения нескольких десятков задач теории упругости с разнообразными краевыми

условиями [7, 10], в частности, приведенных на фиг. 1, 2. Детальный анализ полученных при разных N приближенных решений различных задач показал, что при $N = 160$ (при использовании полиномов (3.9) до порядка 40) относительная погрешность вычисленных в 200–400 граничных точках напряжений и перемещений не превышала 10^{-4} – 10^{-7} , причем уже при $N \approx 60$ в большинстве случаев достигалась точность в 1%, т.е. полученные решения практически неотличимы от точных. Благодаря быстрой сходимости (малым значениям N в реальных расчетах) негативный эффект заполненности матрицы разрешающей системы (3.6) и ухудшения ее обусловленности с ростом N практически не успевает проявиться (господствующее эмпирическое представление о "почти линейной зависимости" систем полиномиальных базисных функций не подтверждается для бигармонических полиномов (3.9)).

(Би)гармонические полиномы пригодны для решения задач гидромеханики, электростатики, кручения и изгиба призматических тел по Сен-Венану, изгиба мембран и пластин, трехмерной теории упругости.

5. Примеры. В задаче на фиг. 1 стороны $x = \pm 3$ жестко заземлены. Графики напряжений в сечениях $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ изображены на фиг. 3–5 (в силу симметрии $\sigma_x(-x, y) = \sigma_x(x, y)$, $\tau_{xy}(-x, y) = -\tau_{xy}(x, y)$, поэтому на фиг. 3, 4 показаны половины графиков для $x \geq 0$). Полезно сравнить их с отмеченными пунктиром эпюрами напряжений, подсчитанных по формулам сопротивления материалов. Интересен характер концентрации напряжений вблизи заземленных сторон и в окрестности точки приложения сосредоточенной силы.

В задаче на фиг. 2 касательные граничные усилия распределены равномерно по шести отрезкам длины 0,2. Вызванные ими касательные напряжения представлены на фиг. 6, 7 ($\tau_{xy}(x, -y) = \tau_{xy}(x, y)$). В точках разрыва граничных усилий поле напряжений $\tau_{xy}(x, y)$ имеет разрыв первого рода, а $\sigma_x(x, y)$ – логарифмическую особенность. Максимумы эпюр $\tau_{xy}(y)$ на фиг. 6, как и на фиг. 5, расположены вблизи крайних волокон, а не на нейтральной оси.



Фиг. 7

ЛИТЕРАТУРА

1. Trefftz E. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren // Proc. 2nd Int. Congress Appl. Mech. Zurich, 1926. 7 p.
2. Треффиц Е. Математическая теория упругости. Л.; М.: Гостехиздат, 1934. 172 с.
3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Гостехиздат, 1957. 476 с.
4. Бондаренко Б.А. Полигармонические полиномы. Ташкент: ФАН, 1968. 170 с.
5. Фролов В.Н. Специальные классы функций в анизотропной теории упругости. Ташкент: ФАН, 1981. 224 с.
6. Rektorys K., Zahradnik V. Solution of the first biharmonic problem by the method of the least squares on the boundary // Apl. Mat. 1974. V. 19. № 2. P. 101–131.
7. Хохлов А.В. Метод решения двумерных задач теории упругости на основе специальных семейств бигармонических функций: Дис. ... канд. техн. наук: 27.06.90. М., 1990. 265 с.
8. Khokhlov A.V. Trefftz-like numerical method for linear boundary-value problems // Commun. in Numer. Methods in Eng. 1993. V. 9. № 7. P. 607–612.
9. Хохлов А.В. Об условиях сопряжения граничных усилий и смещений в точках излома

- границы области в двумерных задачах теории упругости // Численные методы решения задач строительной механики. М.: Моск. ин-т инж. ж.-д. трансп. 1990. Вып. 827. С. 120–126.
10. *Хохлов А.В.* Приближенный метод решения двумерной задачи теории упругости // Строит. механика и расчет сооружений. 1990. № 5. С. 23–29.
11. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
12. *Мергелян С.Н.* Равномерные приближения функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. 1952. Т. 7. Вып. 2. С. 31–122.

Москва

Поступила в редакцию
11.1.1994