УДК 539.3

© 1995 г. В.М. Мальков

УРАВНЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ЭЛАСТОМЕРНОГО СЛОЯ

Строится теория эластомерного слоя линейной вязкоупругости при статической и динамической деформации. Рассматриваются некоторые точные решения задач плоского слоя и показывается их связь с теорией слоя. Структура точных решений доказывает возможность расчленения деформированного состояния на основное и пограничный слой. Уравнения слоя дают основное состояние.

1. Полагаем, что деформация материала описывается законом наследственной упругости Больцмана–Вольтерры [1]

$$\sigma_{ii} = \tilde{K}e + 2\tilde{G}\left(e_{ii} - \frac{1}{3}e\right), \qquad \sigma_{ij} = \tilde{G}e_{ij} \tag{1.1}$$

$$\tilde{K} = K_0(1 - K^*), \qquad \tilde{G} = G_0(1 - G^*)$$

$$(K^*, G^*)\,u(t) = \int_{-\infty}^{t} [K'(t-\tau),\ G'(t-\tau)]\,u(\tau)\,d\tau \tag{1.2}$$

K_0, G_0 – мгновенные модули упругости, K', G' – ядра объемной и сдвиговой релаксации. Материал считается неоднородным. Нижний предел можно взять нулем, если $u = 0$ при $\tau < 0$.

Наследственные свойства эластомеров (ползучесть, релаксация) сильно зависят от температуры. Временная и температурная зависимости взаимосвязаны [1, 2]. При переменной температуре поведение материала может быть описано теми же соотношениями, что и при постоянной, но с измененным масштабом времени. В формулы (1.1), (1.2) вместо t вводят приведенное время $d\xi = a(T)\,dt$. Функцию $a(T)$ обычно берут в виде $\lg a(T) = -C_1(T - T_0)/(C_2 + T - T_0)$, где C_1, C_2 – постоянные материала [2], T_0, T – начальная и текущая температура.

Наличие температурно-временной аналогии позволяет длительные испытания материала на ползучесть и релаксацию в обычных условиях заменить кратковременными при повышенной температуре.

Интегральные операторы Вольтерры (1.2) являются ограниченными и разностными, они описывают поведение материалов, свойства которых не меняются со временем. Для эластомеров механизм наследственной деформации различен в областях высокоэластичного и стеклообразного состояний и не может быть описан законом (1.1), (1.2) с разностными ядрами во всей области изменения температур. Мгновенные модули получаются независящими от текущей температуры. Сказанное ограничивает область применения закона вязкоупругости (1.1), (1.2) и принципа температурно-временной супперпозиции. Сейчас не существует приемлемой теории, которая отражает изменение модулей с температурой при переходе от каучукоподобного к стеклообразному состоянию. Есть, однако, эмпирические формулы, одна из них дана в [3]: $E(\xi) = E_\infty + (E_c - E_\infty)/(1 + \xi/t_R)^n$, где E_c, E_∞ – кратковременный (при температуре стеклования) и длительный модули, t_R – характерное время релаксации, обычно параметр $n = 0{,}3$.

2. Рассмотрим статическую деформацию. Согласно принципу Вольтерры, чтобы получить решение вязкоупругой задачи, можно сначала построить решение упругой, затем в окончательных формулах заменить модули упругости операторами. Ниже используются результаты по теории упругого слоя [4, 5].

Уравнения упругости для тонкого слоя эластомера содержат два малых параметра: геометрический $\varepsilon = h/R$ – отношение характерных размеров и физический $1 - 2\nu \approx G/K$ – отношение модулей сдвига и объемного сжатия. Полагаем $1 - 2\nu \sim \varepsilon^q$, $q > 0$. Для теории слоя представляют интерес три случая: $q = 1, 2, 3$. Соответственно этим случаям слой будем называть очень тонким, тонким или средней толщины. Если q существенно меньше единицы, применима модель бесконечно протяженного слоя; если q существенно больше трех, применима модель несжимаемого материала. Уравнения теории слоя нулевого приближения во всех трех случаях совпадают. Для определенности дальше взято $q = 2$.

Введем ортогональные криволинейные координаты (α, β, z), где $(\alpha, \beta) \in S$, $|z| \leqslant h/2$, S – срединная поверхность слоя, h – толщина. Положение точки задается вектором $\mathbf{R} = \mathbf{r}(\alpha, \beta) + z\mathbf{n}$, $\mathbf{n} \perp S$.

В нулевом приближении по ε получим [5]

$$\mathbf{U} = \left(\frac{1}{2} + \zeta\right)\mathbf{U}^+ + \left(\frac{1}{2} - \zeta\right)\mathbf{U}^- + \frac{1}{8}(1 - 4\zeta^2)h\left[h\frac{\nabla Ke}{G} - \left(\frac{1}{3}\zeta h^2 \operatorname{div}_S \frac{\nabla Ke}{G} - \operatorname{div}_S(\mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^-)\right)\mathbf{n}\right] \tag{2.1}$$

$$h^2 \operatorname{div}_S \frac{\nabla Ke}{G} - 12e = -12\frac{W^+ - W^-}{h} - 6\operatorname{div}_S(\mathbf{U}^+ + \mathbf{U}^-) \tag{2.2}$$

где $\mathbf{U}$ – вектор перемещений точки, $e = \operatorname{div}\mathbf{U}$ – относительное приращение объема, $\mathbf{U}^+$, $\mathbf{U}^-$ – перемещения лицевых поверхностей, W – проекция вектора $\mathbf{U}$ на нормаль $\mathbf{n}$. Операции div_S и ∇ выполняются на срединной поверхности S. В формулах (2.1), (2.2) предполагается, что модули упругости K и G не зависят от z, $\zeta = z/h$.

Решение краевых задач слоя сводится к интегрированию уравнения (2.2) для функции e с граничным условием $Ke = p$, где p – давление. При кинематических условиях на лицевых поверхностях слоя векторы $\mathbf{U}^+$ и $\mathbf{U}^-$ заданы, при условиях другого типа они рассматриваются как неизвестные.

Формулы (2.1), (2.2) дают упругое решение. Чтобы перейти к вязкоупругому, нужно модули K, G заменить операторами.

3. Получим точные решения ряда задач плоского слоя с жесткими лицевыми поверхностями. Здесь материал считается однородным. Используются декартовы координаты.

В задаче растяжения – сжатия и изгиба слоя граничные условия на лицевых поверхностях $z = \pm h/2$ имеют вид

$$(U_x, U_y) = 0, \quad W = \pm(a_z - x\omega_y + y\omega_x)/2 \tag{3.1}$$

где a_z, ω_x, ω_y – относительное перемещение и повороты.

Решение уравнений равновесия в перемещениях $\operatorname{grad} e + (1 - 2\nu)\Delta\mathbf{U} = 0$ найдем методом однородных решений Папковича–Лурье

$$(U_x, U_y) = \frac{h}{\lambda}\varphi(\lambda, \zeta)(\Phi'_x, \Phi'_y) + (1 - 4\zeta^2)\frac{h}{8(1 - 2\nu)}(-\omega_y, \omega_x) \tag{3.2}$$

$$W = \psi(\lambda, \zeta)\Phi + \zeta(W^+ - W^-), \quad he = 4(1 - 2\nu)\Phi\cos\lambda\zeta + W^+ - W^-$$

$$\varphi = \operatorname{tg}{\tfrac{1}{2}}\lambda\cos\lambda\zeta - 2\zeta\sin\lambda\zeta, \quad \psi = \operatorname{ctg}{\tfrac{1}{2}}\lambda\sin\lambda\zeta - 2\zeta\cos\lambda\zeta$$

Функции $\Phi(\lambda, x, y)$ и параметры λ определяются из уравнений

$$h^2\Delta\Phi - \lambda^2\Phi = 0, \quad (3-4\nu)\sin\lambda - \lambda = 0 \tag{3.3}$$

В формулах (3.2) выполняется суммирование по λ.

Граничные условия для первого уравнения (3.3) находятся специальным образом, чтобы перемещения (3.2) удовлетворяли заданным статическим условиям на боковой поверхности слоя.

Следствием малой сжимаемости материала является наличие двух малых корней второго уравнения (3.3) $\lambda = \pm\sqrt{12(1-2\nu)}$, которым отвечают значения функций Папковича $\varphi = \pm(1-4\zeta^2)\sqrt{3(1-2\nu)}$, $\psi = -2\zeta(1-4\zeta^2)(1-2\nu)$.

Для малых корней λ функция Φ с погрешностью $1-2\nu$ постоянна по толщине слоя, а из первого уравнения (3.3) и формул (3.2) следует

$$h^2\Delta e - 12(1-2\nu)\,e = -12(1-2\nu)\,(W^+ - W^-)\,/\,h \tag{3.4}$$

Формулы (3.2)при малых λ и уравнение (3.4) полностью совпадают с результатами аналогичной задачи теории слоя (2.1), (2.2).

Уравнение (3.3) имеет два малых вещественных корня λ, остальные корни комплексны и не малы. Если слой тонкий, им соответствует решение типа пограничного слоя. Таким образом, для слоя малой толщины его напряженно-деформированное состояние распадается на основное, отвечающее малым корням λ, и пограничный слой. В нулевом приближении пограничный слой не влияет на основное медленно меняющееся состояние.

В задаче сдвига слоя граничные условия на лицевых поверхностях имеют вид: $U_x = \pm a_x/2$, $U_y = \pm a_y/2$, $W = 0$; a_x, a_y – относительные смещения оснований. Решение краевой задачи таково:

$$(U_x, U_y) = h\lambda^{-1}\psi(\lambda,\zeta)\,(\Phi'_x, \Phi'_y) + \zeta(a_x, a_y)$$

$$W = -\varphi(\lambda,\zeta)\,\Phi, \quad he = -4(1-2\nu)\,\Phi\cos\lambda\zeta \tag{3.5}$$

Функция Φ находится из первого уравнения (3.3), а параметр λ удовлетворяет уравнению $(3-4\nu)\sin\lambda + \lambda = 0$. Здесь все корни комплексны и не малы, соответствующее им решение будет типа пограничного слоя. Основное состояние дается частным решением в формулах (3.5), т.е. является простым сдвигом.

Выше приведены решения задач упругости; для вязкоупругости нужно параметры ν и λ заменить операторами: $\tilde{\nu} = \nu_0(1+\nu^*)$, $\tilde{\lambda} = \lambda_0(1-\lambda^*)$. Пределы изменения величины $\tilde{\nu}\cdot 1$ (свертка оператора $\tilde{\nu}$ с единицей [1]) малы: $\nu_0 \leqslant \tilde{\nu}\cdot 1 < 0{,}5$, поскольку начальное значение коэффициента Пуассона ν_0 близко к 0,5.

4. Обратимся к динамической задаче. На поверхностях слоя ставятся граничные условия того же типа, что и в статике. Задаются также начальные условия – перемещения и скорости точек.

Кроме упомянутых двух малых параметров, в уравнения движения входит параметр частоты колебаний (или скорости), который может меняться в широких пределах. Об ограничениях на величину частоты, принимаемых при выводе уравнений слоя, будет сказано ниже.

Процедура построения динамической теории слоя асимптотическим методом известна [6]. Этот же метод применим для случая вязкоупругости. Уравнения движения, записанные в перемещениях, в нулевом приближении по $\varepsilon = h/R$ (как и раньше, полагаем $1-2\nu \sim \varepsilon^2$) имеют вид

$$A^{-1}(\tilde{K}e)'_\alpha + (\tilde{G}U'_z)'_z - \tilde{\rho}U''_t = 0$$

$$B^{-1}(\tilde{K}e)'_\beta + (\tilde{G}V'_z)'_z - \tilde{\rho}V''_t = 0, \quad (\tilde{K}e)'_z = 0 \tag{4.1}$$

A, B – параметры Ламе системы координат (α, β) на S, $\tilde{\rho}$ оператор плотности, аналогичный (1.2). Искомыми функциями являются перемещения U, V, W и относительное приращение объема.

В нулевом приближении по ε

$$e = W'_z + [(BU)'_\alpha + (AV)'_\beta] / AB \tag{4.2}$$

Для уравнений (4.1), (4.2) на лицевых поверхностях слоя $z = \pm h/2$ сохраняются прежние условия, на боковой поверхности можно задать только одно асимптотически главное условие. При $t = 0$ задаются перемещения U, V и их скорости как функции переменной z.

При нестационарном нагружении к уравнениям (4.1), (4.2) можно применить преобразование Лапласа по времени и далее интегрировать по переменной z, как в статической задаче [4, 5]. Ниже рассматривается задача вибрации слоя при гармоническом возбуждении. Ее упругое решение дано в [6].

Периодическим по времени деформациям в формулах (1.1), (1.2) отвечают периодические напряжения. Если нижний предел в (1.2) взять равным нулю, напряжения становятся непериодическими. Однако для ядер, удовлетворяющих условию затухающей памяти [1], нарушающий периодичность интегральный член стремится к нулю с возрастанием t.

Введем комплексные перемещения

$$(U, V, W) = (\overline{U}, \overline{V}, \overline{W})\, e^{i\omega t} \tag{4.3}$$

Такую же зависимость по времени имеют деформации e_{ij} и функция e. Формулы для вычисления напряжений таковы [1]:

$$\sigma_{ii} = \overline{K} e + 2\overline{G}\left(e_{ii} - \frac{1}{3} e\right), \qquad \sigma_{ij} = \overline{G} e_{ij} \tag{4.4}$$

$$\overline{K} = K_0\left[1 - \int_0^\infty K'(x)\, e^{-i\omega x} dx\right], \qquad \overline{G} = G_0\left[1 - \int_0^\infty G'(x)\, e^{-i\omega x} dx\right]$$

где $\overline{K} = K_1 + iK_2$, $\overline{G} = G_1 + iG_2$ – комплексные модули упругости, зависящие от частоты ω.

Величины K_1, G_1 характеризуют упругую энергию деформации, а K_2, G_2 – рассеянную. Тангенсы механических потерь при объемной и сдвиговой деформациях вычисляются по формулам: $\operatorname{tg}\varphi_K = K_2/K_1$, $\operatorname{tg}\varphi_G = G_2/G_1$.

Приближенные формулы для напряжений имеют вид

$$\sigma_{ii} = \sigma = \overline{K} e, \qquad \sigma_{13} = \overline{G} U'_z,. \quad \sigma_{23} = \overline{G} V'_z, \quad \sigma_{12} = 0$$

Используя формулы (4.3), (4.4), преобразуем уравнения (4.1)

$$A^{-1}(\overline{K} e)'_\alpha + (\overline{G} U'_z)'_z + \overline{\rho}\omega^2 U = 0$$

$$B^{-1}(\overline{K} e)'_\beta + (\overline{G} V'_z)'_z + \overline{\rho}\omega^2 V = 0, \quad (\overline{K} e)'_z = 0 \tag{4.5}$$

Пусть модули $\overline{K}$ и $\overline{G}$ не зависят от переменной z. Проинтегрируем уравнения (4.5), (4.2) методом разделения переменных. В результате найдем комплексные перемещения и уравнение для функции e

$$U = a_+ U^+ + a_- U^- - b_0 (\overline{K} e)'_\alpha / (A\overline{\rho}\omega^2), \quad V = a_+ V^+ + a_- V^- - b_0 (\overline{K} e)'_\beta / (B\overline{\rho}\omega^2)$$

$$W = \left(\frac{1}{2} + \zeta\right) W^+ + \left(\frac{1}{2} - \zeta\right) W^- + \frac{h}{\overline{\rho}\omega^2} \operatorname{div}_S (c \nabla \overline{K} e) + \frac{h}{2} \operatorname{div}_S [(c + d)\, \mathrm{U}^+ + (c - d)\, \mathrm{U}^-] \tag{4.6}$$

$$\frac{1}{\rho\omega^2}\operatorname{div}_S[(2f-1)\nabla\overline{K}e]-e=-\frac{1}{h}(W^+-W^-)-\operatorname{div}_S f(\mathbf{U}^++\mathbf{U}^-);\quad e|_{\partial S}=0 \tag{4.7}$$

$$a_\pm=\frac{\sin k(\frac{1}{2}\pm\zeta)}{\sin k},\qquad b_0=1-\frac{\cos k\zeta}{\cos\frac{1}{2}k}$$

$$c=\zeta\frac{2}{k}\operatorname{tg}\frac{k}{2}-\frac{\sin k\zeta}{k\cos\frac{1}{2}k},\qquad d=\frac{1}{k}\operatorname{ctg}\frac{k}{2}-\frac{\cos k\zeta}{k\sin\frac{1}{2}k}$$

$$f=\frac{1}{k}\operatorname{tg}\frac{k}{2},\qquad k=h\omega\sqrt{\frac{\overline{\rho}}{\overline{G}}}$$

$\overline{\rho}$ – комплексная плотность, k – комплексный параметр.

Если считать все функции и параметры в формулах (4.6), (4.7) вещественными, то получим соотношения динамической теории упругого слоя [6]. Однако полной аналогии вязкоупругой и упругой задач нет, поскольку имеет место сдвиг фаз колебаний деформаций и напряжений.

Уравнения (4.1) описывают сдвиговые волны, распространяющиеся в поверхностях $z=\text{const}$. Для эластомера отношение скоростей поперечных и продольных волн мало (порядка $\sqrt{1-2\nu}$). Время прохождения продольной волной области S и поперечной волной толщины слоя одного порядка. Эти волновые процессы отсутствуют в уравнениях (4.1).

При выводе уравнений слоя предполагалось, что $k\ O(1)$. При $k=\pi$ перемещения (4.6) обращаются в бесконечность, а коэффициент при старших производных в уравнении (4.7) обращается в нуль. Поэтому предел применимости теории слоя по частоте примем $k<\pi$. Частота $\omega=\pi b/h$, соответствующая значению $k=\pi$, будет низшей собственной частотой колебаний упругого слоя, (b – скорость волн сдвига). Динамические уравнения (4.6), (4.7) при $\omega\to 0$ переходят в уравнения статики (2.1), (2.2).

Вычислим необратимую часть работы деформации. Здесь необходимо использовать вещественные функции. Положим

$$(U,V,W)=(U_1,V_1,W_1)\sin\omega t+(U_2,V_2,W_2)\cos\omega t$$

Используя закон (1.1), (1.2), найдем напряжения

$$\sigma_{ii}=\left[K_1e_1-K_2e_2+2G_1\left(e_{ii}^1-\frac{1}{3}e_1\right)-2G_2\left(e_{ii}^2-\frac{1}{3}e_2\right)\right]\sin\omega t+$$
$$+\left[K_1e_2+K_2e_1+2G_1\left(e_{ii}^2-\frac{1}{3}e_2\right)+2G_2\left(e_{ii}^1-\frac{1}{3}e_1\right)\right]\cos\omega t$$

$$\sigma_{ij}=(G_1e_{ij}^1-G_2e_{ij}^2)\sin\omega t+(G_1e_{ij}^2+G_2e_{ij}^1)\cos\omega t$$

Удельная работа деформации за время t равна

$$A=\int_0^t(\sigma_{11}\dot e_{11}+\ldots+\sigma_{23}\dot e_{23})\,dt\approx\int_0^t(\sigma\dot e+\sigma_{13}\dot e_{13}+\sigma_{23}\dot e_{23})\,dt=$$
$$=\frac{1}{2}(\sigma e+\sigma_{13}e_{13}+\sigma_{23}e_{23})\Big|_0^t+Dt$$

$$D=\tfrac{1}{2}\omega[K_2(e_1^2+e_2^2)+G_2(U_{1,z}'^2+V_{1,z}'^2+U_{2,z}'^2+V_{2,z}'^2)]$$

Первое слагаемое – периодическая функция времени и составляет обратимую часть работы; второе слагаемое пропорционально времени и представляет часть работы, которая рассеивается, D – величина необратимой части работы в единицу времени, называемая мощностью диссипации. Выражение для D можно использовать в качестве функции источников тепла в уравнении теплопроводности при решении задачи диссипативного разогрева эластомерного слоя.

5. Рассмотрим точные решения некоторых задач вязкоупругости при гармоническом возбуждении плоского слоя. Боковая поверхность свободна, материал однородный. Уравнения и их решения ниже записаны в комплексной форме. Ищем решение уравнений движения

$$\bar{b}^2[\operatorname{grad}e+(1-2\bar{\nu})\,\Delta\mathbf{U}]+(1-2\bar{\nu})\,\omega^2\mathbf{U}=0 \tag{5.1}$$

Кручение кольцевого слоя. Используем цилиндрические координаты. Граничные условия на лицевых поверхностях $z=\pm h/2$: $U_r=W=0$, $U_\varphi=\pm r\,\omega_z/2$, ω_z – угол относительного поворота поверхностей. Решение задачи: $U_\varphi=\frac{1}{2}r\omega_z\sin k\zeta\,/\sin\frac{1}{2}k$, $k=h\omega/b$. Перемещения U_r, W и функция e равны нулю.

Сдвиг слоя. Граничные условия на лицевых поверхностях аналогичны статической задаче. Решение уравнений (5.1) запишем в виде

$$(U_x,U_y)=\frac{h}{\lambda}\,\psi(\Phi'_x,\Phi'_y)+\frac{\sin k\zeta}{2\sin\frac{1}{2}k}(a_x,a_y),\qquad W=\frac{k_1}{\lambda}\,\varphi\Phi \tag{5.2}$$

$$\varphi=\cos k_1\zeta-\frac{\cos\frac{1}{2}k_1}{\cos\frac{1}{2}k_2}\cos k_2\zeta,\qquad \psi=\sin k_1\zeta-\frac{\sin\frac{1}{2}k_1}{\sin\frac{1}{2}k_2}\sin k_2\zeta$$

$$k^2=h^2\omega^2/\bar{b}^2,\qquad k_1^2=\lambda^2+h^2\omega^2/\bar{a}^2,\qquad k_2^2=\lambda^2+h^2\omega^2/\bar{b}^2$$

$\bar{a}$, $\bar{b}$ – комплексные скорости продольных и поперечных волн.

Функции Φ – решения уравнений (3.3), а характеристические числа λ находятся из уравнения

$$\lambda^2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}k_1=k_1k_2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}k_2 \tag{5.3}$$

В формулах (5.2) предполагается суммирование по λ.

Задача растяжения–сжатия и изгиба слоя. На лицевых поверхностях $z=\pm h/2$ заданы условия того же типа, что и в статике (3.1). Методом однородных решений из уравнения (5.1) получим

$$(U_x,U_y)=\frac{h}{\lambda}\,\varphi(\Phi'_x,\Phi'_y)+\frac{h\varphi_0}{2k_1^0\sin\frac{1}{2}k_1^0}(\omega_y,-\omega_x) \tag{5.4}$$

$$W=-\frac{k_1}{\lambda}\,\varphi\Phi+\frac{\sin k_1^0\zeta}{2\sin\frac{1}{2}k_1^0}(W^+-W^-)$$

где k_1^0, φ_0 – значения k_1, φ при $\lambda=0$.

Функции Φ – решения уравнений (3.3), а λ – корни уравнения, отличающегося от (5.3) заменой $k_1\leftrightarrow k_2$.

Ввиду малости отношения скоростей сдвиговых и объемных деформаций это уравнение имеет малые корни

$$\lambda^2=(1-2\bar{\nu})\,k^2/(2k^{-1}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}k-1),\qquad k=h\omega/\bar{b}$$

Результаты теории слоя (4.6) и точное решение для малых λ совпадают с погрешностью $1-2\nu$.

Решения упругих задач получаются из (5.2), (5.4), если параметры упругости считать вещественными. При $\omega\to0$ значения параметра $\lambda^2\to12(1-2\nu)$.

6. Рассмотрим две задачи упругости о гармонических колебаниях цилиндрического шарнира, иллюстрирующие возможности динамической теории слоя. Для этих задач получены точные решения и приближенные по теории слоя и результаты сопоставлены.

Кручение цилиндрического шарнира (плоская деформация). Пусть r_1, r_2 – внутренний и внешний радиусы, h – толщина слоя. Граничные условия на лицевых поверхностях: при $r = r_1 U_\varphi = r_1\theta^-$, при $r = r_2 U_\varphi = r_2\theta^+$, где U_φ, θ – окружное перемещение и угол поворота (используются амплитудные значения функций).

Решение плоской задачи упругости имеет вид

$$\theta = \tfrac{1}{2}\omega b^{-1}(A_1 J_0 + A_2 N_0), \qquad U_\varphi = A_1 J_1 + A_2 N_1$$

J_0, N_0, J_1, N_1 – функции Бесселя и Ганкеля аргумента $r\omega b^{-1}$.

Определив постоянные A_1, A_2 из граничных условий и вычислив крутящий момент, придем к соотношениям жесткости

$$M^+ = d_{11}\theta^+ + d_{12}\theta^-, \qquad M^- = d_{21}\theta^+ + d_{22}\theta^-$$

Точные значения коэффициентов динамической жесткости не приводим, теория слоя дает

$$d_{11} = d_{22} = 2\pi G R^3 h^{-1} k\,\mathrm{ctg}k, \qquad d_{12} = d_{21} = -2\pi G R^3 h^{-1} k / \sin k$$

R – средний радиус, $k = h\omega b^{-1}$.

Были сделаны расчеты жесткостей при различных частотах по точным и приближенным формулам для слоя с параметрами: $r_1 = 49{,}5$ см, $r_2 = 50{,}5$ см, $h = 1$ см, $G = 10$ кг/см^2, $K = 25\cdot10^3$ кг/см^2, $\rho = 1$ г/см^3. Скорости поперечных и продольных волн $b = 3{,}13\cdot10^3$ см/с, $a = 1{,}56\cdot10^5$ см/с.

Частота $\omega_0 = \pi b/h = 9850$ рад/с, которая является низшей собственной частотой колебаний, соответствует пределу применимости теории слоя. Для частот $\omega < \omega_0$ совпадение динамических жесткостей по точному и приближенному решениям вполне удовлетворительное (при частоте $\omega = 9000$ рад/с погрешность менее 10%).

Радиальный сдвиг цилиндрического шарнира. Граничные условия на лицевых поверхностях: при $r = r_1 U_r = a_x^- \cos\varphi$, $U_\varphi = -a_x^- \sin\varphi$, при $r = r_2 U_r = a_x^+ \cos\varphi$, $U_\varphi = -a_x^+ \sin\varphi$; (r, φ) – полярные координаты.

Точное решение плоской задачи для амплитудных значений функций имеет вид

$$e = A_1 J_1(\alpha) + A_2 N_1(\alpha), \qquad \theta = B_1 J_1(\beta) + B_2 N_1(\beta)$$

$$U_r = -\frac{r}{\alpha} e'_\alpha + \frac{r}{\beta^2}\theta, \qquad U_\varphi = -\frac{r}{\alpha^2} e - \frac{r}{\beta}\theta'_\beta; \quad \alpha = \frac{r\omega}{a}, \quad \beta = \frac{r\omega}{b}$$

Соотношения динамической жесткости таковы:

$$F_x^+ = d_{11} a_x^+ + d_{12} a_x^-, \qquad F_x^- = d_{21} a_x^+ + d_{22} a_x^-$$

Ввиду громоздкости не приводим точные значения динамических жесткостей, для теории слоя эти соотношения имеют вид

$$F_x^+ = -F_x^- = \pi K R\left[1 - \frac{\varepsilon}{2}(2f-1)\right]\left[1 + \frac{\varepsilon^2}{1-2\nu}\frac{1}{k^2}(2f-1)\right]^{-1}\frac{a_x^+ - a_x^-}{h}$$

Для слоя с прежними параметрами были вычислены динамические жесткости, относительное приращение объема e и угол поворота θ при различных частотах ω. Совпадение с точным решением было хорошим вплоть до критических частот ω_0. Подтвердилось близкое к постоянному по толщине слоя распределение функции e, а также закон распределения угла поворота θ, даваемые теорией слоя.

Рассмотренные задачи отличаются характером деформации слоя: в первой были только сдвиговые деформации, во второй – и сдвиговые и объемные. Анализ задач подтверждает правильность гипотез, использованных при выводе уравнений слоя и оценку пределов ее применимости по частоте. Из численных результатов следует, что нельзя заменять динамические жесткости на статические, как это часто делается для эластомерных амортизаторов.

Отметим простоту получения решений краевых задач по теории слоя. Решения аналогичных вязкоупругих задач можно получить из упругих, если считать модули упругости и другие параметры комплексными.

7. Итак получены динамические уравнения криволинейного слоя из неоднородного эластомерного материала для задач упругости и вязкоупругости. На задачах плоского слоя показана их связь с точными решениями и установлено физическое содержание. Создание теории слоя позволило понизить размерность краевых задач и устранить при их решении проблемы, связанные с малой сжимаемостью материала. Цели создания теории слоя и значение аналогичны теории оболочек и пластин. Последняя строится при статических условиях на лицевых поверхностях тела, а теория слоя при кинематических или смешанных. Двумерные уравнения этих теорий качественно отличаются. Если в классической теории оболочек нужно решать уравнения восьмого порядка, то в теории слоя одно уравнение второго порядка.

Основные приложения уравнений слоя – решение задач прочности и динамики многослойных резинометаллических элементов, которые широко используются в технике в качестве упругих шарниров, амортизаторов, виброзащитных устройств и т.д. В этих конструкциях деформация резиновых слоев стеснена граничными условиями на лицевых поверхностях, поскольку металлические слои не могут иметь больших деформаций, их изгиб ограничен условиями на основаниях многослойного пакета. Поэтому рассмотренная в работе линейная теория слоя имеет практическое значение. Создание нелинейной теории является актуальным.

Требуют также специального исследования следующие вопросы динамической теории слоя и конструкций: о пределах применимости теории слоя по частоте, о корнях λ характеристических уравнений при различных частотах, анализ собственных и вынужденных колебаний слоя и конструкций, движение массы на многослойном резинометаллическом амортизаторе и другие.

Аналогичные вопросы динамической теории пластин рассмотрены в [7], где получено строгое решение динамической задачи упругости, обоснованы уравнения колебаний тонких пластин и установлены границы их применимости. Интересно, что пределы применимости динамических уравнений слоя и пластины оказались практически одинаковы ($\varepsilon = h/R < 1$, $\omega < \pi b/h$).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и программ Государственного комитета РФ по науке и высшей школе "Университеты России".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
2. *Ферри Дж.* Вязкоупругие свойства полимеров. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 536 с.
3. *Эйрих Ф.Р., Смит Т.Л.* Молекулярно-механические аспекты изотермического разрушения эластомеров. // Разрушение. Т. 7. Ч. 2. М.: Мир, 1976. С. 104–390.
4. *Мальков В.М.* Линейная теория тонкого слоя из малосжимаемого материала // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. № 1. С. 52–54.
5. *Мальков В.М.* Деформация тонкого слоя из малосжимаемого материала // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 87–93.
6. *Мальков В.М.* Уравнения динамики тонкого слоя эластомера // Вестн. ЛГУ. Сер. 1. 1989. Вып. 2. № 8. С. 98–100.
7. *Петрашень Г.И.* К теории колебаний тонких пластин // Уч. записки ЛГУ. Сер. матем. наук. 1951. № 149. Вып. 24. С. 172–249.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
23.III.1994