УДК 539.3

© 1995 г. Л.М. Зубов, А.Н. Рудев

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ ПРИЗНАКАХ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ СРЕДЫ

Найдены необходимые и достаточные условия эллиптичности уравнений равновесия однородного изотропного сжимаемого упругого материала, состоящие из конечной системы элементарных неравенств, накладывающих явные ограничения на удельную потенциальную энергию деформации материала и главные относительные удлинения, а также ряда соотношений для областей знакопостоянства некоторых полиномов от одной вещественной переменной, коэффициенты которых определяются функцией удельной энергии и главными удлинениями. Степени полиномов равны соответственно единице, двум и шести. Сформулирован эффективный достаточный признак, гарантирующий эллиптичность уравнений равновесия и не содержащий никаких вспомогательных параметров. Установлено, что если материал удовлетворяет некоторым разумным с физической точки зрения и не слишком ограничительным требованиям, то критерий эллиптичности допускает более простую формулировку. При этом отпадает необходимость в исследовании полиномов.

Требование эллиптичности уравнений равновесия нелинейно-упругой среды [1–3], исключающее существование в статическом состоянии упругого тела поверхностей слабого разрыва поля перемещений, накладывает определенные ограничения на функцию удельной потенциальной энергии деформации упругого материала П и может считаться одним из определяющих неравенств нелинейной теории упругости [1, 2]. Существует и альтернативная точка зрения, связывающая нарушение эллиптичности уравнений равновесия с некоторыми видами потери устойчивости упругого тела [4–7]. Каждая из этих концепций свидетельствует о целесообразности использования понятия эллиптичности в теории упругости.

Прежде чем перейти к строгим определениям, введем ряд обозначений. Пусть w, W – области, занимаемые упругим телом соответственно до и после деформации, $\mathbf{r}$, $\mathbf{R}$ – векторы места произвольной частицы в конфигурациях w, W соответственно. Деформацией тела в дальнейшем считается любое непрерывно дифференцируемое и биективное преобразование $\mathbf{R} = f(\mathbf{r})$ области w в области $W = f(w)$, сохраняющее ориентацию в каждой точке $\mathbf{r} \in w$. Предполагается, что материал является сжимаемым и гиперупругим [1, 2], т.е. обладает функцией запасенной энергии $\Pi = \Pi(\mathbf{r}, \mathbf{C})$, где $\mathbf{C} = \nabla\mathbf{R}$ – градиент деформации. Обозначим через $\mathbf{e}_m (m = 1, 2, 3)$ координатные орты некоторой фиксированной системы прямоугольных декартовых координат. Тогда уравнения равновесия упругого тела могут быть записаны в форме [3]

$$\frac{\partial^2\Pi(\mathbf{r}, \mathbf{C})}{\partial C_{ij}\partial C_{kl}} \frac{\partial^2 X_l(r)}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2\Pi(\mathbf{r}, \mathbf{C})}{\partial x_i \partial C_{ij}} + \rho_0(\mathbf{r}) g_j(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = 0 \quad (j = 1,2,3) \tag{0.1}$$

Здесь x_k, X_l, $C_{kl} = \partial X_l / \partial x_k$, $g_k (k, l = 1, 2, 3)$ – компонентные разложения величин $\mathbf{r}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{g}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{C})$ – интенсивность массовых сил, $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{r})$ – плотность материала в отсчетной конфигурации w. По повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до 3. Вторые производные потенциала $\Pi(\mathbf{r}, \mathbf{C})$, входящие в уравнения (0.1), а также величины $\rho_0(\mathbf{r})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{C})$, считаются непрерывными в области их задания. Заметим, что для плотности $\rho_0(\mathbf{r})$ эта область совпадает с множеством w, а для интенсивности $\mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{C})$ и потенциала $\Pi(\mathbf{r}, \mathbf{C})$ – с множеством $w \times D$, где D – наделенное евклидовой нормой пространство неособых тензоров второго ранга над трехмерным евклидовым пространством [1, 2].

Система (0.1) квазилинейна, так как она линейна относительно старших производных неизвестных функций $X_l(\mathbf{r})$ (l = 1, 2, 3). Тензор четвертого ранга $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{C})$ с компонентами $A_{ijkl} = \partial^2\Pi/\partial C_{ij}\partial C_{kl}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ называется тензором упругости [1, 2].

Определение 1. Статически возможной деформацией рассматриваемого упругого тела считается всякое дважды дифференцируемое и биективное отображение $\mathbf{R} = f(\mathbf{r})$ множества w на множество $W = f(w)$, удовлетворяющее уравнениям равновесия (0.1) и сохраняющее ориентацию в каждой точке $\mathbf{r} \in w$.

Определение 2. Квазилинейная система (0.1) называется эллиптической [2] (или ординарно эллиптической) в точке $\mathbf{r}_0 \in w$ для заданной статически возможной деформации $\mathbf{R}_* = f_*(\mathbf{r})$, если для всякого единичного вектора $\mathbf{a}$ выполняется условие

$$\det\| A_{ijkl}[\mathbf{r}_0, \mathbf{C}_*(\mathbf{r}_0)] a_i a_k \|_{j,l=1,2,3} \neq 0 \quad (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 1) \tag{0.2}$$

$$\mathbf{C}_* = \nabla\mathbf{R}_* = \nabla f_*(\mathbf{r}), \quad a_m = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_m \quad (m = 1,2,3)$$

Если требование (0.2) соблюдается в каждой точке $\mathbf{r}_0 \in w$, то система (0.1) считается эллиптической для рассматриваемой статически возможной деформации $\mathbf{R}_* = f_*(\mathbf{r})$. Наконец, система (9.1) называется эллиптической в области w, если она обладает этим свойством для любой статически возможной деформации упругого тела.

Определение 3. Квазилинейная система (0.1) удовлетворяет неравенству Адамара [1, 2] (или является слабо эллиптической) в точке $\mathbf{r}_0 \in w$ для заданной статически возможной деформации $\mathbf{R}_* = f_*(\mathbf{r})$, если для всякой пары единичных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ выполняется условие

$$A_{ijkl}[\mathbf{r}_0, \mathbf{C}_*(\mathbf{r}_0)] a_i a_k b_j b_l \geqslant 0 \quad (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 1) \tag{0.3}$$

Если ограничение (0.3) соблюдается в каждой точке $\mathbf{r}_0 \in w$, то считается, что система (0.1) удовлетворяет неравенству Адамара для рассматриваемой статически возможной деформации $\mathbf{R}_* = f_*(\mathbf{r})$. Наконец, квазилинейная система (0.1) подчиняется неравенству Адамара в области w, если она обладает этим свойством для любой статически возможной деформации упругого тела.

Аналогично вводятся понятия сильной эллиптичности и положительной продольной упругости [1, 2], при этом соответствующие ограничения на тензор $\mathbf{A}$ имеют вид

$$A_{ijkl}[\mathbf{r}_0, \mathbf{C}_*(\mathbf{r}_0)] a_i a_k b_j b_l > 0 \quad (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 1) \tag{0.4}$$

$$A_{ijkl}[\mathbf{r}_0, \mathbf{C}_*(\mathbf{r}_0)] a_i a_k a_j a_l > 0 \quad (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 1) \tag{0.5}$$

Из соотношений (0.2)–(0.5) следует, что сильная эллиптичность влечет неравенство Адамара, ординарную эллиптичность и положительную продольную упругость.

Физический смысл этих понятий заключается в следующем. Неравенство Адамара (0.3) является необходимым условием устойчивости произвольной статически возможной деформации упругого тела под действием "мертвых" внешних сил, а также при смешанных граничных условиях, когда на части поверхности тела заданы перемещения, а на другой части – "мертвая" нагрузка. Кроме того, оно обеспечивает вещественность скоростей распространения волн ускорения в упругой среде [1, 2].

Свойство сильной эллиптичности (0.4) гарантирует устойчивость однородной деформации упругого тела при жестком закреплении его граничной поверхности и положительность квадратов скоростей распространения волн ускорения в упругой среде [1, 2]. Вместе с тем это требование является необходимым условием существования в "малом", т.е. на коротком промежутке времени, решения первой краевой задачи (с заданными на границе перемещениями) для динамических уравнений нелинейной теории упругости [8]. Кроме того, при действии на тело консервативных внешних сил, когда соответствующая краевая задача для уравнений равновесия (0.1) сводится к проблеме стационарности функционала потенциальной энергии тела, условие сильной эллиптичности играет важную роль при исследовании вопроса о регулярности функций, доставляющих последнему стационарное значение [9].

Далее требование положительной продольной упругости (0.5) является необходимым условием существования в упругом теле хотя бы одной продольной волны ускорения [1]. На первый взгляд это утверждение может показаться тривиальным, однако следует иметь в виду, что в сжимаемой нелинейно-упругой среде в отличие от линейно-упругой в общем случае волна ускорения не является ни продольной, ни поперечной.

Наконец, следствием ординарной эллиптичности уравнений равновесия (0.1) в области w прежде всего служит тот факт, что всякая статически возможная деформация упругого тела представляет собой дважды непрерывно-дифференцируемое отображение области w на область W. Другими словами, если система (0.1) эллиптична в области w, то в равновесном состоянии упругого тела не могут существовать поверхности слабого разрыва поля перемещений [1–3]. Более того, было доказано [10], что для изотропного несжимаемого материала, подчиняющегося неравенствам Бейкера – Эриксена [1, 2] (см. ниже соотношения (2.17)), свойство эллиптичности эквивалентно требованию сильной эллиптичности, а следовательно, гарантирует наличие всех только что перечисленных эффектов, связанных с этим понятием.

Заметим также, что из результатов данной статьи вытекает, что при выполнении неравенств Бейкера – Эриксена и TE^+-условий [1] для изотропного сжимаемого упругого материала условие эллиптичности обеспечивает положительность квадратов скоростей распространения волн слабого разрыва по крайней мере для всех направлений N, лежащих в главных плоскостях меры деформации Фингера $\mathbf{F} = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C}$ [1, 2] (индекс T указывает на операцию транспонирования тензора второго ранга). Если же в рассматриваемой частице $\mathbf{r}_0$ упругого тела тензор $\mathbf{F}$ транстропный или изотропный, то квадраты скоростей распространения волн ускорения положительны в точке $\mathbf{r}_0$ для любой волновой нормали $\mathbf{N}$.

Отметим, что при сделанных ранее допущениям о регулярности величин $\rho_0(\mathbf{r})$, $\mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{C})$, $\Pi(\mathbf{r}, \mathbf{C})$ можно доказать, что в случае произвольного сжимаемого гиперупругого материала (в том числе неоднородного и анизотропного) свойства ординарной и слабой эллиптичности в совокупности эквивалентны требованию сильной эллиптичности.

Так как описанные выше понятия определяются заданием удельной потенциальной энергии деформации упругого материала $\Pi(\mathbf{r}, \mathbf{C})$, то можно относить их непосредственно к рассматриваемому материалу и говорить, например, о слабой или сильной эллиптичности последнего. Принятые здесь определения допускают обобщение и на случай более сложных нелинейных систем (не обязательно квазилинейных).

Основная цель работы состоит в установлении новых взаимосвязей между свойствами ординарной, слабой и сильной эллиптичности (и другими дополнительными неравенствами нелинейной теории упругости), а также в упрощении критерия ординарной эллиптичности (0.2), а именно приведении его к виду, удобному для практического использования. Эффективные способы проверки условий (0.3), (0.4) для изотропного упругого материала уже известны (см. ниже соотношения (2.8), (2.10), где даются необходимые ссылки). Сказанное относится и к требованию положительной продольной упругости (0.5) [11].

Ограничения (0.2)–(0.5) нередко формулируются в терминах акустического тензора упругой среды $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{N})$ [1–3], связанного с тензором упругости $\mathbf{A}$ соотношением

$$\mathbf{Q} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{A}^{T(3,4)} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{N} \qquad (0.6)$$

где $\mathbf{N}$ – произвольный единичный вектор. Помимо $\mathbf{N}$ тензор $\mathbf{Q}$ зависит также от $\mathbf{r}$ и $\mathbf{C}$, но эти аргументы для краткости опускаются. Пометка $T(3, 4)$ в формуле (0.6) означает операцию транспонирования тензора четвертого ранга $\mathbf{A}$ по третьему и четвертому индексам. Известно [1, 2], что собственные значения $Q_m (m = 1, 2, 3)$ тензора $\mathbf{Q}(\mathbf{N})$, называемые акустическими числами, выражаются через скорости $s_m (m = 1, 2, 3)$, с которыми распространяются волны ускорения, имеющие волновую нормаль $\mathbf{N}$, по формулам $Q_m = \rho s_m^2$, где ρ – плотность среды в актуальной конфигурации. Поскольку тензор $\mathbf{C}$ неособый, то ясно, что неравенство Адамара (0.3) и условие сильной эллиптичности (0.4) эквивалентны соответственно требованиям неотрицательной и положительной определенности тензора Q(N) для всех направлений N, тогда как условие положительной продольной упругости (0.5) сводится к требованию $\mathbf{N} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{N}) \cdot \mathbf{N} > 0$ $(\forall \mathbf{N} : \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1)$.

1. С помощью акустического тензора Q(N) свойство эллиптичности уравнений равновесия (0.1) можно представить в форме [3]

$$\det \mathbf{Q}(\mathbf{N}) \neq 0 \quad (\forall \mathbf{N} : \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1) \tag{1.1}$$

Из-за присутствия в соотношении (1.1) трех произвольных параметров (компонент нормали N) проверка неравенства (1.1) для конкретных материалов, как правило, сопряжена со значительными трудностями. Поэтому представляет интерес вывод прямых ограничений на потенциал П и градиент деформации C (в фиксированной точке $\mathbf{r}_0$ области w), не содержащих никаких посторонних параметров и обеспечивающих справедливость условия (1.1) при любых $\mathbf{N}(\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1)$. Для однородного изотропного несжимаемого материала эта проблема решена в работе [10], где путем исключения вектора N получена система элементарных неравенств, эквивалентных условию эллиптичности и накладывающих явные ограничения на главные растяжения $\upsilon_q (q = 1, 2, 3)$ [1, 2] и первые и вторые производные по ним по потенциала П. Были найдены необходимые и достаточные условия эллиптичности уравнений равновесия плоской теории упругости для сжимаемого [12] и несжимаемого [13] материалов.

Ниже аналогичные ограничения получены для трехмерных уравнений равновесия (0.1) сжимаемой нелинейно-упругой среды в предположении, что она однородна и изотропна. В этом случае акустический тензор Q(N) не зависит явно от вектора места r, а зависимость от градиента деформации C, в силу принципа материальной объективности [1, 2], сводится к зависимости от меры деформации Фингера $\mathbf{F} = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C}$. Кроме того, потенциал П – функция только главных растяжений.

Воспользуемся известным представлением компонент акустического тензора Q(N) в главных осях тензора F [1–3] (i, j, k – произвольная перестановка индексов 1, 2, 3):

$$JQ_{ij} = \gamma_k M_i M_j, \quad M_q = \upsilon_q N_q \tag{1.2}$$

$$JQ_{kk} = \alpha_j M_i^2 + \alpha_i M_j^2 + \beta_k M_k^2, \quad J = \det \mathbf{C}$$

$$\alpha_k = (\Pi_i \upsilon_i - \Pi_j \upsilon_j)/(\upsilon_i^2 - \upsilon_j^2), \quad \beta_k = \Pi_{kk} \tag{1.3}$$

$$\gamma_k = (\gamma_k^+ - \gamma_k^-)/2, \quad \gamma_k^{\pm} = \pm \Pi_{ij} + (\Pi_i \mp \Pi_j)/(\upsilon_i \mp \upsilon_j)$$

$$\Pi_m \equiv \partial \Pi / \partial \upsilon_m, \quad \Pi_{mn} \equiv \partial^2 \Pi / \partial \upsilon_m \partial \upsilon_n \quad (m, n = 1, 2, 3)$$

Здесь N_q – компоненты нормали N в ортонормированном базисе Σ собственных векторов меры деформации Фингера. Выше и всюду далее $q = 1, 2, 3$. В дальнейшем, если не оговорено противное, все компонентные разложения нескалярных величин берутся по отношению к базису Σ. Функция $\Pi(\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$ считается дважды непрерывно дифференцируемой в области задания $(\upsilon_1 > 0, \upsilon_2 > 0, \upsilon_3 > 0)$ и симметрической (т.е. инвариантной относительно произвольной перестановки своих аргументов).

Наличие указанной симметрии вызвано допущением об изотропии материала. Таким образом, величины $\alpha_q, \beta_q, \gamma_q, \gamma_q^{\pm}$, выражающиеся через потенциал П и главные растяжения υ_q, существуют и непрерывны при любых положительных значениях υ_1, υ_2, υ_3. Эти величины играют вспомогательную роль и, за исключением α_q, β_q, не допускают отчетливого механического истолкования. Что касается параметров α_q, β_q, то они пропорциональны квадратам скоростей распространения главных волн ускорения [1, 2] в однородно деформированной упругой среде с главными растяжениями υ_q. А именно, если для произвольной перестановки i, j, k чисел 1, 2, 3 обозначить через s_{kk} скорость главной продольной волны, распространяющейся вдоль k-го главного направления меры деформации Фингера, а через s_{ij} – скорость главной поперечной волны, распространяющейся в i-м и поляризованной в j-м главных направлениях, то имеют место представления

$$\alpha_k = \frac{\rho_0 s_{ij}^2}{\upsilon_i^2} = \frac{\rho_0 s_{ji}^2}{\upsilon_j^2}, \quad \beta_k = \frac{\rho_0 s_{kk}^2}{\upsilon_k}$$

Оказывается, для реального упругого материала величины α_k, β_k, γ_q, $\gamma_q^\pm$ могут быть найдены экспериментально с помощью чисто статических испытаний. В самом деле, из формул (1.3) и закона состояния изотропного упругого тела в форме Фингера [1, 2] вытекают соотношения

$$\alpha_k = J(t_i - t_j)/(\upsilon_i^2 - \upsilon_j^2), \quad \beta_k = J\upsilon_k^{-1} t_{k,k}$$

$$2\gamma_k = \upsilon_k[(t_i - t_j)(\upsilon_i^2 + \upsilon_j^2)/(\upsilon_i^2 - \upsilon_j^2) + (t_{i,j}\upsilon_j + t_{j,i}\upsilon_i)]$$

$$2\gamma_k^\pm = \pm\upsilon_k[(t_i - t_j)(\upsilon_i \pm \upsilon_j)/(\upsilon_i \mp \upsilon_j) + (t_{i,j}\upsilon_j + t_{j,i}\upsilon_i)]$$

$$t_{m,n} \equiv \partial t_m / \partial \upsilon_n \quad (m, n = 1, 2, 3), \quad J = \upsilon_1 \upsilon_2 \upsilon_3$$

где t_q – главные напряжения Коши, являющиеся для изотропного материала функциями главных растяжений υ_q. Заметим, что квадраты главных растяжений υ_q равны собственным числам тензора $\mathbf{F}$, а величины $\upsilon_q - 1$ совпадают с главными относительными удлинениями.

С помощью представления (1.2) можно записать

$$J^3 \det \mathbf{Q} = \Psi(\mathbf{m}) \equiv \delta_1 m_1^3 + \delta_2 m_2^3 + \delta_3 m_3^3 + (\varepsilon_{12} m_1 + \varepsilon_{21} m_2) m_3^2 + (\varepsilon_{23} m_2 + \varepsilon_{32} m_3) m_1^2 +$$

$$+ (\varepsilon_{31} m_3 + \varepsilon_{13} m_1) m_2^2 + \theta m_1 m_2 m_3 \tag{1.4}$$

$$m_q \equiv M_q^2, \quad \delta_k = \beta_k \alpha_i a_j$$

$$\kappa_k = \beta_i \beta_j + \alpha_k^2 - \gamma_k^2, \quad \varepsilon_{ij} = \alpha_i \kappa_j + \alpha_j \alpha_k \beta_k \tag{1.5}$$

$$\theta = \beta_1 \beta_2 \beta_3 + 2(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3) + \sum_{q=1}^{3} \beta_q \gamma_q^+ \gamma_q^-$$

где $\mathbf{m}$ – вектор с компонентами m_q в базисе Σ.

Лемма 1. Неравенство (1.1) имеет место тогда и только тогда, когда форма $\Psi(\mathbf{m})$ либо положительна, либо отрицательна для всех $\mathbf{m}$, отличных от нуля.

Доказательство. Действительно, в противном случае вследствие непрерывности функции $\Psi(\mathbf{m})$ обязательно найдется такое значение $\mathbf{m}^0$ вектора $\mathbf{m}$, для которого соблюдается равенство $\Psi(\mathbf{m}^0) = 0$, что ввиду (1.4) свидетельствует о нарушении требования (1.1).

Прежде чем сформулировать основную теорему, введем ряд обозначений:

$$A_{ki}(t) = \varepsilon_{ij} t + \varepsilon_{ji}, \quad B_{ki}(t) = \varepsilon_{kj} t^2 + \theta t + \varepsilon_{ki}$$

$$C_{ki}(t) = \delta_i t^3 + \varepsilon_{jk} t^2 + \varepsilon_{ik} t + \delta_j \tag{1.6}$$

$$D_{ki}(t)=4[\delta_k B_{ki}^3(t)+C_{ki}(t)A_{ki}^3(t)]+108\delta_k^2 C_{ki}^2(t)-[A_{ki}(t)B_{ki}(t)+9\delta_k C_{ki}(t)]^2$$

$$R^+=\{t\in R: t>0\},\quad X_{ki}=\{t\in R^+: D_{ki}(t)>0\} \tag{1.7}$$

$$Y_{ki}=\{t\in R^+: A_{ki}(t)B_{ki}(t)>0\}$$

Здесь R – множество вещественных чисел, t – вещественная переменная. Через V условимся обозначать пространство главных растяжений, т.е. совокупность точек $\upsilon \equiv \equiv (\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$ трехмерного арифметического пространства R^3 с положительными компонентами $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3$.

Теорема 1. Однородный изотропный сжимаемый упругий материал обладает свойством эллиптичности в рассматриваемой точке $\upsilon \in V$ тогда и только тогда, когда для всякой перестановки i, j, k индексов 1, 2, 3 соблюдаются следующие условия:

1) имеют место неравенства

$$\alpha_i\alpha_j>0,\quad \beta_i\beta_j>0 \tag{1.8}$$

$$\left[\gamma_k^+ +\sqrt{\beta_i\beta_j}\,\operatorname{sign}(\beta_i+\beta_j)\right]\left[\gamma_k^- +\sqrt{\beta_i\beta_j}\,\operatorname{sign}(\beta_i+\beta_j)\right]\operatorname{sign}[\alpha_k(\beta_i+\beta_j)]>0$$

2) множества X_{ki}, Y_{ki} образуют покрытие положительной полуоси R^+, т.е. справедливо соотношение

$$X_{ki}\cup Y_{ki}=R^+ \tag{1.9}$$

Доказательство. Чтобы установить необходимость неравенств (1.8), рассмотрим сужение $\Psi_k(m_i, m_j)$ функции $\Psi(\mathbf{m})$ на координатную плоскость $m_k = 0$:

$$\Psi_k(m_i,m_j)=(\alpha_j m_i+\alpha_i m_j)(\alpha_k\beta_i m_i^2+\alpha_k\beta_j m_j^2+\kappa_k m_i m_j) \tag{1.10}$$

Каждый из сомножителей в правой части выражения (1.10) должен быть отличным от нуля для всех m_i, m_j, удовлетворяющих условиям $m_i \geqslant 0$, $m_j \geqslant 0$, $m_i + m_j > 0$. При учете обозначений (1.3), (1.5) отсюда сразу же следует неравенство (1.8).

Заметим, что условия (1.8) не только необходимы, но и достаточны для выполнения требования (1.1) на координатных плоскостях $m_q = 0$. Поэтому в дальнейшем можно считать $m_q > 0$.

Представим выражение (1.4) для формы $\Psi(\mathbf{m})$ в виде разложения по степеням m_k:

$$\Psi(\mathbf{m})=\delta_k m_k^3+a_k(m_i,m_j)m_k^2+b_k(m_i,m_j)m_k+c_k(m_i,m_j) \tag{1.11}$$

$$a_k(m_i,m_j)=\varepsilon_{ij}m_i+\varepsilon_{ji}m_j$$

$$b_k(m_i,m_j)=\varepsilon_{kj}m_i^2+\theta m_i m_j+\varepsilon_{ki}m_j^2$$

$$c_k(m_i,m_j)=\delta_i m_i^3+\varepsilon_{jk}m_i^2 m_j+\varepsilon_{ik}m_i m_j^2+\delta_j m_j^3$$

При фиксированных значениях m_i, m_j правая часть в представлении (1.11) – кубический полином относительно m_k. Допустим вначале, что $\beta_k > 0$. Тогда вследствие (1.8), (1.5) имеем $\delta_k > 0$, и на основании леммы 1 для всех $\mathbf{m}$, отличных от нуля, обязано выполняться неравенство $\Psi(\mathbf{m}) > 0$.

Необходимые и достаточные условия положительности полинома третьей степени

$$f(t)=\alpha t^3+\beta t^2+\gamma t+\delta\quad(\alpha>0,\ \delta>0)$$

для всех $t > 0$ получены в [10] и могут быть представлены в виде

$$(\varepsilon>0)\vee[(\beta>0)\wedge(\gamma>0)] \tag{1.12}$$

$$\varepsilon \equiv 4(\alpha\gamma^3 + \delta\beta^3) + 108\alpha^2\delta^2 - (\beta\gamma + 9\alpha\delta)^2$$

Применительно к полиному (1.11) требование (1.12) принимает форму

$$[d_k(m_i, m_j) > 0] \vee \{[a_k(m_i, m_j) > 0] \wedge [b_k(m_i, m_j) > 0]\} \tag{1.13}$$

$$d_k(m_i, m_j) \equiv 4[\delta_k b_k^3(m_i, m_j) + c_k(m_i, m_j) a_k^3(m_i, m_j)] +$$

$$+108\delta_k^2 c_k^2(m_i, m_j) - [a_k(m_i, m_j) b_k(m_i, m_j) + 9\delta_k c_k(m_i, m_j)]^2$$

Заметим, что условие $c_k(m_i, m_j) > 0$ выполняется для всех допустимых значений m_i, m_j в силу (1.8) и очевидного равенства $c_k(m_i, m_j) = \Psi_k(m_i, m_j)$.

Так как $m_j \neq 0$, то положим $t = m_i/m_j$. Тогда в обозначениях (1.6) условие (1.13) равносильно требованию

$$[D_{ki}(t) > 0] \vee \{[A_{ki}(t) > 0] \wedge [B_{ki}(t) > 0]\} \tag{1.14}$$

Аналогично рассматривается случай $\beta_k < 0$. При этом соотношение (1.14) заменяется условием

$$[D_{ki}(t) > 0] \vee \{[A_{ki}(t) < 0] \wedge [B_{ki}(t) < 0]\} \tag{1.15}$$

Объединяя требования (1.14), (1.15), получаем

$$[D_{ki}(t) > 0] \vee [A_{ki}(t) B_{ki}(t) > 0] \tag{1.16}$$

В условии (1.16) знак β_k роли не играет. Так как оно должно выполняться для всякого значения $t > 0$, то, принимая во внимание обозначения (1.7), приходим к равенству (1.9).

Внимательный анализ предыдущих рассуждений показывает, что условия (1.8), (1.9) не только необходимы, но и достаточны. Теорема доказана.

Замечания к теореме 1. 1°. Неравенства (1.8) свидетельствуют о том, что при выполнении условия эллиптичности параметры α_q либо все положительные, либо все отрицательные. Таким же свойством обладают и величины β_q. С физической точки зрения это означает, что акустические числа, отвечающие главным поперечным амплитудам, либо все положительные, либо все отрицательные. То же самое справедливо для акустических чисел, соответствующих главным продольным амплитудам. Таким образом, условие эллиптичности либо полностью исключает существование главных волн, либо допускает наличие всех девяти главных волн, либо только трех продольных, либо только шести поперечных. Все остальные варианты не совместимы с требованием эллиптичности. Здесь под главными волнами понимаются волны, для которых волновые нормали направлены по главным осям меры деформации Фингера.

2°. Если неравенства (1.8) справедливы для произвольной перестановки i, j, k чисел 1, 2, 3, то из доказательства теоремы вытекает, что соотношения (1.9), отвечающие всевозможным перестановкам индексов, выполняются или нарушаются только одновременно. Отсюда следует, что лишь одно из шести равенств (1.9) является независимым. Поэтому условие эллиптичности однородного изотропного сжимаемого материала эквивалентно системе девяти элементарных неравенств (1.8) и одному теоретико-множественному соотношению вида (1.9). Этот факт можно использовать для сокращения объема вычислений и контроля правильности проверки.

Итак, проверка эллиптичности материала сводится к анализу конечной системы элементарных неравенств (1.8) и определению областей знакопостоянства полиномов $D_{ki}(t)$, $A_{ki}(t)$, $B_{ki}(t)$. Для двух последних, являющихся соответственно линейным и квадратичным полиномами, задача не вызывает затруднений и решается аналитически. Что же касается полинома $D_{ki}(t)$, то степень его равна шести, и в общем случае для отыскания области X_{ki} требуется использование ЭВМ.

В качестве примера рассмотрим материал Блейтца и Ко [2, 14] с потенциалом

$$\Pi = \frac{1}{2}\mu\left[I_1 + \frac{1}{\nu}(I_3^{-\nu} - 1) - 3\right] \quad \left(\mu > 0, \quad \nu \geqslant -\frac{1}{2}\right) \tag{1.17}$$

Здесь μ, ν – некоторые постоянные (в частности, μ совпадает с модулем сдвига материала при малых деформациях из натурального состояния), I_1, I_3 – первый и третий главные инварианты меры деформации Фингера, связанные с главными растяжениями соотношениями

$$I_1 = \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \upsilon_3^2, \quad I_3 = \upsilon_1^2\upsilon_2^2\upsilon_3^2 \tag{1.18}$$

При помощи формул (1.3), (1.5), (1.17), (1.18) находим

$$\alpha_k = \mu, \quad \beta_k = \mu[1 + (2\nu + 1)\upsilon_k^{-2}I_3^{-\nu}]$$

$$\gamma_k^{\pm} = \mu[1 \pm (2\nu + 1)\upsilon_i^{-1}\upsilon_j^{-1}I_3^{-\nu}]$$

$$\kappa_k = \mu(\beta_i + \beta_j), \quad \gamma_k = \mu(2\nu + 1)\upsilon_i^{-1}\upsilon_j^{-1}I_3^{-\nu} \tag{1.19}$$

$$\varepsilon_{ij} = \mu^2(\beta_i + 2\beta_k), \quad \theta = 2\mu^2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$$

Используя выражения (1.19), можно убедиться в справедливости неравенств (1.8) при любых деформациях. Кроме того, так как в данном случае параметры θ и $\varepsilon_{pq}(p, q = 1, 2, 3)$ положительны для всех допустимых значений $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3$, то из (1.6), (1.7) следует, что $Y_{ki} = R^+$, т.е. равенства (1.9) выполняются. Таким образом, на основании теоремы 1 заключаем, что материал (1.17) обладает свойством эллиптичности в каждой точке $\upsilon \in V$. Этот результат можно было предвидеть заранее, поскольку, как установлено в [2], материал (1.17) является сильно эллиптическим при любых деформациях.

С помощью теоремы 1 можно получить достаточный признак эллиптичности уравнений равновесия. Предварительно введем ряд обозначений

$$\lambda_k = \delta_i\varepsilon_{ik}^3 + \delta_j\varepsilon_{jk}^3, \quad \mu_{ki} = 3\delta_k\theta\varepsilon_{ki}^2 + \varepsilon_{ji}^2(3\delta_j\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ik}\varepsilon_{ji})$$

$$\nu_{ki} = \zeta_{ki} + \varepsilon_{ji}(\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ji}^2 + 3\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji} + 3\delta_j\varepsilon_{ij}^2)$$

$$\pi_k = \chi_k + \delta_i\varepsilon_{ji}^3 + 3\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}^2 + 3\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ij}^2\varepsilon_{ji} + \delta_j\varepsilon_{ij}^3$$

$$\zeta_{ki} = 3\delta_k\varepsilon_{ki}(\theta^2 + \varepsilon_{ki}\varepsilon_{kj}), \quad \chi_k = \delta_k\theta(\theta^2 + 6\varepsilon_{ki}\varepsilon_{kj}) \tag{1.20}$$

$$\xi_k = \varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk} + 9\delta_i\delta_j, \quad \eta_{ki} = \varepsilon_{ki}\varepsilon_{ij} + \theta\varepsilon_{ji} + 9\delta_k\varepsilon_{ik}$$

$$p_k = 4\lambda_k - \xi_k^2 + 108\delta_i^2\delta_j^2, \quad q_{ki} = 2\mu_{ki} - \eta_{ki}\xi_i + 108\delta_k^2\delta_j\varepsilon_{ik}$$

$$r_{ki} = 4\nu_{ki} - \eta_{ki}^2 - 2\eta_{kj}\xi_i + 108\delta_k^2(\varepsilon_{ik}^2 + 2\varepsilon_{jk}\delta_j)$$

$$s_k = 2\pi_k - \xi_i\xi_j - \eta_{ki}\eta_{kj} + 108\delta_k^2(\delta_i\delta_j + \varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk})$$

$$\rho_{ki} = p_i r_{ki}^3 + 16 s_k q_{ki}^3 - (q_{ki}r_{ki} + 9p_i s_k)^2 + 108 p_i^2 s_k^2$$

$$\sigma_{ki} = r_{ki}r_{kj}^3 + 16 s_k^3 q_{kj} - (s_k r_{kj} + 9q_{kj}r_{ki})^2 + 108 r_{ki}^2 q_{kj}^2$$

В этих обозначениях имеем

$$D_{ki}(t) = p_j t^6 + 2q_{kj}t^5 + r_{kj}t^4 + 2s_k t^3 + r_{ki}t^2 + 2q_{ki}t + p_i \tag{1.21}$$

Теорема 2. Допустим, что в точке $\upsilon \in V$ соблюдаются следующие требования:

1) для всякой перестановки i, j, k индексов 1, 2, 3 имеют место неравенства (1.8);

2) существует перестановка i, j, k чисел 1, 2, 3, для которой выполняется хотя бы один из указанных ниже наборов условий (1.22)–(1.30)

$$\beta_k\varepsilon_{ij} \geq 0, \quad \beta_k\varepsilon_{ji} \geq 0, \quad \beta_k\varepsilon_{ki} \geq 0, \quad \beta_k\varepsilon_{kj} \geq 0$$

$$\theta\,\mathrm{sign}(\beta_k) + 2\sqrt{\varepsilon_{ki}\varepsilon_{kj}} > 0, \quad \varepsilon_{ij}^2 + \varepsilon_{ji}^2 > 0 \tag{1.22}$$

$$p_i \geq 0, \quad p_j \geq 0, \quad r_{ki} \geq 0, \quad r_{kj} \geq 0, \quad s_k \geq 0, \quad \varphi_{ki} > 0, \quad \varphi_{kj} > 0 \tag{1.23}$$

$$p_i \geq 0, \quad p_j \geq 0, \quad q_{ki} \geq 0, \quad q_{kj} \geq 0, \quad r_{ki} \geq 0$$

$$r_{kj} \geq 0, \quad s_k + \sqrt{r_{ki}r_{kj}} > 0 \tag{1.24}$$

$$p_i \geq 0, \quad p_j \geq 0, \quad q_{kj} \geq 0, \quad r_{ki} \geq 0, \quad s_k \geq 0, \quad \tau_{kj} > 0, \quad \varphi_{ki} > 0 \tag{1.25}$$

$$p_i \geq 0, \quad p_j \geq 0, \quad q_{ki} \geq 0, \quad r_{kj} \geq 0, \quad s_k \geq 0, \quad \tau_{ki} > 0, \quad \varphi_{kj} > 0 \tag{1.26}$$

$$p_i \geq 0, \quad p_j \geq 0, \quad r_{kj} \geq 0, \quad s_k > 0, \quad \rho_{ki} > 0, \quad \varphi_{kj} \geq 0 \tag{1.27}$$

$$p_i \geq 0, \quad p_j \geq 0, \quad r_{ki} \geq 0, \quad s_k > 0, \quad \rho_{kj} > 0, \quad \varphi_{ki} \geq 0 \tag{1.28}$$

$$p_i \geq 0, \quad p_j \geq 0, \quad q_{ki} \geq 0, \quad q_{kj} > 0, \quad r_{ki} > 0, \quad \sigma_{ki} > 0 \tag{1.29}$$

$$p_i \geq 0, \quad p_j \geq 0, \quad q_{ki} > 0, \quad q_{kj} \geq 0, \quad r_{kj} > 0, \quad \sigma_{kj} > 0 \tag{1.30}$$

Здесь

$$\varphi_{ki} = q_{ki} + \sqrt{p_i r_{ki}}, \quad \tau_{ki} = r_{ki} + 4\sqrt{q_{ki}s_k}$$

Тогда в рассматриваемой точке $\upsilon \in V$ материал удовлетворяет условию эллиптичности.

Для доказательства достаточно сравнить требования (1.22)–(1.30) с выражениями (1.6), (1.21) для $A_{ki}(t)$, $B_{ki}(t)$, $D_{ki}(t)$ и воспользоваться теоремой 1.

2. Если в рассматриваемой точке $\upsilon \in V$ величины α_q, β_q (q = 1, 2, 3) либо все положительны, либо все отрицательны, то можно получить отличный от теоремы 1 критерий эллиптичности, не требующий исследования полиномов и состоящий из конечной системы элементарных неравенств. Предварительно докажем одно вспомогательное утверждение.

Пусть Λ – совокупность вещественных квадратичных форм от трех вещественных переменных x_1, x_2, x_3. Введем обозначения

$$L(\mathbf{x}) = \sum_{m,n=1}^{3} a_{mn}x_m x_n, \quad a_{mn} = a_{nm} \quad (m, n = 1, 2, 3)$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad A = \| a_{mn} \| \quad (m, n = 1, 2, 3)$$

$$P = \{L \in \Lambda : L(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in R^3, \quad \mathbf{x} \neq 0\}$$

$$N = \{L \in \Lambda : L(\mathbf{x}) < 0, \quad \mathbf{x} \in R^3, \quad \mathbf{x} \neq 0\} \tag{2.1}$$

$$P^0 = \{L \in \Lambda : L(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in R^3\}$$

$$N^0 = \{L \in \Lambda : L(\mathbf{x}) \leq 0, \quad \mathbf{x} \in R^3\}$$

Лемма 2. Для всякой формы $L \in \Lambda$ имеет место эквивалентность

$$(\det A \neq 0) \Leftrightarrow \{(L \in P) \vee (L \in N) \vee [(L \notin P^0) \wedge \wedge (L \notin N^0)]\} \wedge [\forall S: L|_S \equiv 0] \tag{2.2}$$

где S – произвольная плоскость в R^3, проходящая через начало координат O, $L|_S$ – сужение формы L на плоскость S.

Доказательство. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – естественный базис пространства R^3. Обозначим через $\mathbf{L}$ симметричный тензор второго ранга над пространством R^3 с матрицей компонент A в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Тогда, очевидно, справедливо соотношение

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{x} \tag{2.3}$$

Воспользуемся тем, что всякий симметричный тензор второго ранга над R^3 обладает хотя бы одной взаимно ортогональной тройкой собственных векторов. Пусть l_1, l_2, l_3 – ортонормированный триэдр собственных векторов тензора $\mathbf{L}$, L_1, L_2, L_3 – соответствующие собственные значения, X_q – компоненты вектора x в базисе l_1, l_2, l_3. Тогда из соотношения (2.3) следует

$$L(\mathbf{x}) = L_1 X_1^2 + L_2 X_2^2 + L_3 X_3^2 \tag{2.4}$$

Применим к эквивалентности (2.2) операцию логического отрицания:

$$(\det A = 0) \Leftrightarrow [L \in (P^0 \setminus P)] \vee [L \in (N^0 \setminus N)] \vee [\exists S: L|_S \equiv 0] \tag{2.5}$$

Считая $\det A = 0$, покажем, что левая часть высказывания (2.5) влечет правую. В самом деле, так как определитель матрицы A является одним из инвариантов тензора L, то $\det A = L_1 L_2 L_3$. Следовательно, существует перестановка i, j, k чисел 1, 2, 3, такая, что $L_k = 0$. Если при этом $L_i \geqslant 0, L_j \geqslant 0$, то на основании (2.4) приходим к выводу, что $L \in P^0 \setminus P$ (см. обозначения (2.1)). Аналогично при $L_i \leqslant 0, L_j \leqslant 0$ получаем $L \in N^0 \setminus N$. Если же $L_i > 0$, то $L_j < 0$ или $L_i < 0, L_j > 0$, то из формулы (2.4) следует

$$L(\mathbf{x}) = \operatorname{sign}(L_i)(|L_i|^{1/2} X_i + |L_j|^{1/2} X_j)(|L_i|^{1/2} X_i - |L_j|^{1/2} X_j)$$

т.е. форма $L(\mathbf{x})$ тождественно равна нулю на плоскостях $|L_i|^{1/2} X_i \pm |L_j|^{1/2} X_j = 0$, каждая из которых проходит через начало координат O. Таким образом, прямая импликация в (2.5) установлена.

Докажем теперь обратную импликацию, полагая правую часть эквивалентности (2.5) истинной. Опуская тривиальные случаи $L \in P^0 \setminus P$ и $L \in N^0 \setminus N$, допустим, что существует плоскость S, содержащая точку O и такая, что $L|_S \equiv 0$. За счет выбора подходящей перестановки i, j, k-чисел 1, 2, 3 уравнение плоскости S всегда можно записать в виде $X_k = \lambda X_i + \mu X_j$, где λ, μ – некоторые постоянные. При этом с помощью (2.4) находим

$$L|_S = (L_i + L_k \lambda^2) X_i^2 + (L_j + L_k \mu^2) X_j^2 + 2 L_k \lambda \mu X_i X_j$$

Поскольку $L|_S = 0$, то отсюда следуют равенства

$$L_i + L_k \lambda^2 = 0, \quad L_j + L_k \mu^2 = 0, \quad L_k \lambda \mu = 0$$

Видно, что последние совместимы только при $L_1 L_2 L_3 = 0$, что и завершает доказательство леммы.

Заметим, что соотношения (2.2), (2.5) допускают простую геометрическую интерпретацию. Действительно, рассмотрим поверхность второго порядка $\mathbf{x} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{x} = \pm c^2$ ($c = \text{const} > 0$), сопутствующую произвольному самосопряженному линейному преобразованию пространства R^3 и называемую иначе квадрикой Коши. Тогда формулы (2.5), (2.2) означают, что для вырожденного преобразования соответствующая квадрика Коши представляет собой линейчатую поверхность (в данном случае или эллиптический цилиндр, или два сопряженных гиперболических цилиндра, или пару параллельных плоскостей), а для неособого преобразования, напротив, таковой не является и сводится либо к эллипсоиду, либо к паре сопряженных гиперболоидов (однополостного и двуполостного).

Лемма 2, связывающая требование $\det A \neq 0$ с характером поведения формы $L(\mathbf{x})$ как во всем пространстве R^3, так и на произвольных плоскостях S, проходящих через точку O, является основным инструментом дальнейшего анализа. Рассмотрим квадратичную форму $\Phi(\mathbf{M}, \mathbf{x})$, соответствующую акустическому тензору $\mathbf{Q}(\mathbf{N})$ (вектор $\mathbf{M}$, имеющий в базисе Σ компоненты $M_q = \upsilon_q N_q$, $q = 1, 2, 3$, выступает здесь в качестве параметра):

$$\Phi(\mathbf{M},\mathbf{x}) = J\mathbf{x}\cdot\mathbf{Q}(\mathbf{N})\cdot\mathbf{x} = \sum_{q=1}^{3} \sigma_q x_q^2 + 2(\omega_3 x_1 x_2 + \omega_1 x_2 x_3 + \omega_2 x_3 x_1) \tag{2.6}$$

$$\omega_k = \gamma_k M_i M_j, \quad \sigma_k = \alpha_j M_i^2 + \alpha_i M_j^2 + \beta_k M_k^2$$

$$(i,j,k) = (1,2,3), \quad (2,3,1), \quad (3,1,2)$$

Применяя лемму 2 к форме $\Phi(\mathbf{M}, \mathbf{x})$, получаем следующее утверждение.

Теорема 3. Однородный изотропный сжимаемый упругий материал обладает свойством эллиптичности в рассматриваемой точке $\upsilon \in V$ тогда и только тогда, когда для всякого вектора $\mathbf{M}$, отличного от нуля, истинно высказывание

$$\{(\Phi \in P) \vee (\Phi \in N) \vee [(\Phi \notin P^0) \wedge (\Phi \notin N^0)]\} \wedge [\forall S\colon \Phi|_S \equiv 0] \tag{2.7}$$

где S – произвольная плоскость в R^3, проходящая через начало координат O, $\Phi|_S$ – сужение формы Φ на плоскость S.

Заметим, что условие $\Phi \in P$ эквивалентно требованию сильной эллиптичности материала, тогда как включение $\Phi \in P^0$ означает, что материал удовлетворяет неравенству Адамара. Аналогичные толкования допускают включения $\Phi \in N$, $\Phi \in N^0$, но применительно к потенциалу Π, взятому с обратным знаком. Можно показать, что необходимые и достаточные условия принадлежности формы $\Phi(\mathbf{M}, \mathbf{x})$ (для всех $\mathbf{M} \neq 0$) пространствам P, N, P^0, N^0 соответственно состоят из следующих наборов неравенств (см., в частности, работы [15, 16]):

$$\alpha_k > 0, \quad \beta_k > 0, \quad G_k^{\pm} > 0, \quad [(\gamma_i^m < 0) \wedge (\gamma_j^n < 0)] \Rightarrow \zeta_k^{m,n} > 0 \tag{2.8}$$

$$\alpha_k < 0, \quad \beta_k < 0, \quad H_k^{\pm} < 0, \quad [(\gamma_i^m > 0) \wedge (\gamma_j^n > 0)] \Rightarrow \zeta_k^{m,n} > 0 \tag{2.9}$$

$$\alpha_k \geqslant 0, \quad \beta_k \geqslant 0, \quad G_k^{\pm} \geqslant 0, \quad [(\gamma_i^m < 0) \wedge (\gamma_j^n < 0)] \Rightarrow \zeta_k^{m,n} \geqslant 0 \tag{2.10}$$

$$\alpha_k \leqslant 0, \quad \beta_k \leqslant 0, \quad H_k^{\pm} \leqslant 0, \quad [(\gamma_i^m > 0) \wedge (\gamma_j^n > 0)] \Rightarrow \zeta_k^{m,n} \geqslant 0 \tag{2.11}$$

$$G_k^{\pm} = \gamma_k^{\pm} + \sqrt{\beta_i \beta_j}, \quad H_k^{\pm} = \gamma_k^{\pm} - \sqrt{\beta_i \beta_j}$$

$$\zeta_k^{m,n} = \beta_k \gamma_k^{mn} - \gamma_i^m \gamma_j^n + [\beta_k \beta_j - (\gamma_i^m)^2]^{1/2} [\beta_k \beta_j - (\gamma_j^n)^2]^{1/2} \tag{2.12}$$

Здесь предполагается, что верхние индексы m, n принимают значения плюс, минус, причем их произведение mn определяется по правилу умножения чисел $+1$, -1.

Теорема 4. Если в рассматриваемой точке $\upsilon \in V$ параметры α_q, β_q одновременно положительны или отрицательны, то для эллиптичности однородного изотропного сжимаемого упругого материала в точке $\upsilon \in V$ необходимо и достаточно выполнения следующих условий (i, j, k – произвольная перестановка индексов 1, 2, 3):

$$\gamma_k^{\pm}\,\mathrm{sign}(\alpha_k)+\sqrt{\beta_i\beta_j}>0 \tag{2.13}$$

$$(\Phi\in P)\vee(\Phi\in N)\vee[(\Phi\notin P^0)\wedge(\Phi\notin N^0)] \tag{2.14}$$

Доказательство. Необходимость условий (2.13), (2.14) вытекает из теорем 1, 3 соответственно. Остается доказать их достаточность. Покажем, что неравенства (2.13) влекут условие

$$\forall S:\Phi|_S\neq 0 \tag{2.15}$$

где плоскость S проходит через начало координат O. Для этого рассмотрим плоскость S вида $x_k=\lambda x_i+\mu x_j$ (λ, μ = const). Из представления (2.6) получаем

$$\Phi|_S=f_kx_i^2+g_kx_j^2+2h_kx_ix_j$$

$$f_k=\sigma_k\lambda^2+2\omega_j\lambda+\sigma_i,\quad g_k=\sigma_k\mu^2+2\omega_i\mu+\sigma_j$$

$$h_k=\sigma_k\lambda\mu+\omega_i\lambda+\omega_j\mu+\omega_k$$

Так как по условию теоремы параметры α_i, α_j, β_k либо все положительны, либо все отрицательны, то $\sigma_k\neq 0$. Следовательно, величина f_k представляет собой квадратный трехчлен относительно λ с отличным от нуля старшим коэффициентом. Для дискриминанта последнего имеем

$$\begin{aligned}\Delta=\omega_j^2-\sigma_k\sigma_i=-[\alpha_j\beta_iM_i^4+\alpha_i\alpha_kM_j^4+\alpha_j\beta_kM_k^4+\\+(\alpha_j\alpha_k+\alpha_i\beta_i)M_i^2M_j^2+(\alpha_i\alpha_j+\alpha_k\beta_k)M_j^2M_k^2+(\alpha_j^2-\gamma_j^2+\beta_i\beta_k)M_k^2M_i^2]\end{aligned} \tag{2.16}$$

Выражение в квадратных скобках в правой части формулы (2.16) является квадратичной формой относительно M_i^2, M_j^2, M_k^2, все коэффициенты которой, за исключением, быть может, последнего, положительны по условию теоремы. Так как на основании (1.3) справедливы равенства $\gamma_j^+ + \gamma_j^- = 2\alpha_j$, $\gamma_j^+ - \gamma_j^- = 2\gamma_j$, то в силу (2.13) получаем

$$\alpha_j^2-\gamma_j^2+\beta_i\beta_k+2|\alpha_i|\sqrt{\beta_i\beta_k}=[\gamma_j^+\,\mathrm{sign}(\alpha_j)+\sqrt{\beta_i\beta_k}]\times[\gamma_j^-\,\mathrm{sign}(\alpha_j)+\sqrt{\beta_i\beta_k}]>0$$

Следовательно, $\Delta<0$ для всякого вектора **M**, отличного от нуля. Поэтому величина f_k либо положительна, либо отрицательна для всех $\lambda\in R$ и всех **M**, не равных нулю. В любом случае сужение $\Phi|_S$ отлично от тождественного нуля. А так как за счет подходящей перестановки i, j, k чисел 1, 2, 3 уравнение любой плоскости S, проходящей через начало координат O, можно записать в виде $x_k=\lambda x_i+\mu x_j$, то справедливость условия (2.15) установлена.

Таким образом, требования (2.13), (2.14) влекут условие (2.7). Но тогда из теоремы 3 следует, что материал эллиптичен. Теорема доказана.

Следствия теорем 3, 4.

1^0. Если в заданной точке $\upsilon\in V$ параметры α_q, β_q (q = 1, 2, 3) одновременно либо положительные, либо отрицательные, то для эллиптичности материала в рассматриваемой точке достаточно выполнения требований

$$\gamma_k^{\pm}\,\mathrm{sign}(\alpha_k)+\sqrt{\beta_i\beta_j}>0$$

$$\{[\gamma_i^m\,\mathrm{sign}(\alpha_k)<0]\wedge[\gamma_j^n\,\mathrm{sign}(\alpha_k)<0]\}\Rightarrow\zeta_k^{m,n}\neq 0$$

где i, j, k – произвольная перестановка индексов 1, 2, 3, m, n – любая комбинация знаков плюс, минус, а величины $\zeta_k^{m,n}$ определены соотношением (2.12).

2⁰. Допустим, что в пространстве главных растяжений соблюдаются неравенства

$$\alpha_k > 0, \quad \beta_k > 0, \quad \gamma_k^{\pm} + \sqrt{\beta_i \beta_j} > 0$$

Тогда для эллиптичности материала в каждой точке $\upsilon \in V$ необходимо и достаточно, чтобы область его сильной эллиптичности совпадала с областью выполнимости условия Адамара.

3⁰. Если в каждой точке $\upsilon \in V$ соблюдаются требования

$$\alpha_k > 0, \quad \beta_k > 0$$

$$[(\gamma_i^m < 0) \wedge (\gamma_j^n < 0)] \Rightarrow \beta_k \gamma_k^{mn} - \gamma_i^m \gamma_j^n \geqslant 0$$

где i, j, k – произвольная перестановка индексов 1, 2, 3, а m, n – любая комбинация знаков плюс, минус, то области эллиптичности и сильной эллиптичности для данного материала совпадают.

Доказательство следствий опускается.

Для того чтобы учесть некоторые физические соображения, касающиеся поведения упругих материалов при деформации, различными авторами были предложены ограничения в форме неравенств, налагаемые на определяющие соотношения упругих тел и называемые определяющими, или дополнительными, неравенствами. К таким неравенствам относятся, в частности, неравенства Бейкера – Эриксена [1, 2, 17]

$$(t_i - t_j)/(\upsilon_i - \upsilon_j) > 0, \quad \upsilon_i \neq \upsilon_j \tag{2.17}$$

Здесь t_q (q = 1, 2, 3) – главные напряжения, т.е. собственные числа тензора напряжений Коши, являющиеся в случае изотропного материала функциями главных растяжений. Под усиленной версией неравенств Бейкера – Эриксена ниже будем понимать, помимо положительности отношений вида $(t_i - t_j)/(\upsilon_i - \upsilon_j)$ при $\upsilon_i \neq \upsilon_j$, существование у последних положительных предельных значений при $\upsilon_i \to \upsilon_j$.

Условия $\partial t_q/\partial \upsilon_q > 0$ (не суммировать по q) называются TE^+ – неравенствами [1, 2].

Некоторые определяющие неравенства формулируются в дифференциальной форме, как условие положительности свертки тензора скоростей деформаций с какой-либо индифферентной (т.е. независимой от системы отсчета) производной по времени от тензора напряжений Коши. Таковы неравенство Колемана – Нолла [1, 2, 18].

$$[\mathbf{S}(\mathbf{C}, \boldsymbol{\epsilon}) + \mathbf{T}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\epsilon} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\epsilon})] \cdot\cdot\ \boldsymbol{\epsilon} > 0 \quad (\boldsymbol{\epsilon} \neq 0) \tag{2.18}$$

неравенство Хилла [19]

$$[\mathbf{S}(\mathbf{C}, \boldsymbol{\epsilon}) + \mathbf{T}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\epsilon}] \cdot\cdot\ \boldsymbol{\epsilon} > 0 \quad (\boldsymbol{\epsilon} \neq 0) \tag{2.19}$$

и условие гидростатической устойчивости материала [20]

$$\mathbf{S}(\mathbf{C}, \boldsymbol{\epsilon}) \cdot\cdot\ \boldsymbol{\epsilon} > 0 \quad (\boldsymbol{\epsilon} \neq 0) \tag{2.20}$$

Здесь $\mathbf{T}$ – тензор напряжений Коши, $\boldsymbol{\epsilon}$ – тензор скоростей деформаций, $\mathbf{S}$ – производная тензора напряжений в смысле Яуманна. Для изотропного материала зависимость тензора $\mathbf{S}$ от градиента деформации сводится к зависимости от меры деформации Фингера, причем функция $\mathbf{S}(\mathbf{F}, \boldsymbol{\epsilon})$ легко вычисляется по заданному потенциалу $\Pi(\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$.

Заметим, что условие положительной продольной упругости записывается через тензор $\mathbf{S}$ следующим образом

$$\mathbf{S}(\mathbf{C}, \mathbf{xx}) \cdot\cdot\ \mathbf{xx} > 0 \quad (\mathbf{x} \neq 0) \tag{2.21}$$

где $\mathbf{x}$ – произвольный вектор.

Проверка эллиптичности упрощается, если упругий материал подчиняется некоторым из определяющих неравенств. Более точно, справедлива

Теорема 5. Допустим, что в точке $\upsilon \in V$ выполняется хотя бы одно из перечисленных ниже требований 1) – 4):

1) справедливы неравенства Бейкера – Эриксена (2.17) (усиленная версия) и материал удовлетворяет либо TE^+ – условию, либо требованию положительной продольной упругости (2.21), либо неравенству Колемана – Нолла (2.18);

2) соблюдается TE^+ – условие и неравенство Хилла (2.19);

3) выполняется условие гидростатической устойчивости материала (2.20);

4) акустические числа, соответствующие главным продольным и главным поперечным амплитудам, либо все положительные, либо все отрицательные.

Тогда для эллиптичности материала в точке $\upsilon \in V$ необходимо и достаточно выполнения условий (2.13), (2.14).

Доказательство, использующее теоремы 3, 4, опускается.

Теорема 5 говорит о том, что при физически правдоподобных допущениях критерий эллиптичности сжимаемого материала состоит из конечного набора элементарных неравенств, не содержащих никаких посторонних параметров, и прибегать к общей теореме 1, предполагающей исследование полинома шестой степени, нет необходимости. Расшифровка составного условия (2.14) легко осуществляется при помощи соотношений (2.8)–(2.11).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16497) и Международного научного фонда (MTA 000).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
2. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
3. *Лурье А.И.* Критерий эллиптичности уравнений равновесия нелинейной теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 2. С. 23–34.
4. *Knowles J.K., Sternberg E.* On the failure of ellipticity and the emergence of discontinuous deformation gradients in plane finite elastostatics // J. Elast. 1978. V. 8. № 4. P. 329–379.
5. *Knowles J.K.* On the dissipation assosiated with equilibrium shocks in finite elasticity // J. Elast. 1979. V. 9. № 2. P. 131–158.
6. *Knowles J.K.* The finite anti-plane shear field near the tip of a crack for a class of incompressible elastic solids // Intern. J. Fracture. 1977. V. 13. № 5. P. 611–639.
7. *Abeyaratne R.C.* Discontinuous deformation gradients away from the tip of a crack in anti-plane shear // J. Elast. 1981. V. 11. № 4. P. 373–388.
8. *Wheeler L.* A uniqueness theorem for the displacement problem in finite elastodynamics // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1977. V. 63. № 2. P. 183–189.
9. *Necas J.* On regular solutions to the displacement boundary value problem in finite elasticity // Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics, 1983. Ed. J. Brilla. Boston: Pitman, 1983. V. IV. P. 176–185.
10. *Zee L., Sternberg E.* Ordinary and strong ellipticity in the equilibrium theory of incompressible hyper elastic solids // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1983. V. 83. № 1. P. 53–90.
11. *Зубов Л.М., Рудев А.Н.* Об условиях существования продольных волн в анизотропной нелинейно-упругой среде // Докл. РАН. 1994. Т. 334. № 2. С. 156–158.
12. *Knowles J.K., Sternberg E.* On the failure of ellipticity of the equations for finite elastostatics plane strain // Arch. for Ration. Mech. and Analysis. 1977. V. 63. № 4. P. 321–336.
13. *Abeyaratne R.C.* Discontinuous deformation gradients in plane finite elastostatics of incompressible materials // J. Elast. 1980. V. 10. № 3. P. 255–270.
14. *Blatz P.J., Ko W.L.* Applications of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials // Trans. Soc. Rheol. 1962. V. 6. P. 223–251.
15. *Зубов Л.М., Рудев А.Н.* Эффективный способ проверки условия Адамара для нелинейно-упругой сжимаемой среды // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 296–305.

16. *Гурвич Е.Л., Лурье А.И.* К теории распространения волн в нелинейно-упругой среде (Эффективная проверка условия Адамара) // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 6. С. 110–116.
17. *Backer M., Ericksen J.L.* Inequalities restricting the form on the stress-deformation relations for isotropic elastic solids and Reiner–Rivlin fluids // J. Wash. Acad. Sci. 1954. V. 44. N 2. P. 33–35.
18. *Coleman B.D., Noll W.* Material symmetry and thermostatic inequalities in finite elastic deformations // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1964. V. 15. № 2. P. 87–111.
19. *Hill R.* On constitutive inequalities for simple materials. II // J. Mech. and Phys. Solids. 1968. V. 16. № 5. P. 315–322.
20. *Зубов Л.М.* Об условиях единственности в малом состояния гидростатического сжатия упругого тела // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 497–506.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
9.XI.1993