

УДК 539.3

© 1995 г. В.Г. Блинова, А.М. Линьков

## МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ АСИМПТОТИК В ОБЩЕЙ ВЕРШИНЕ УПРУГИХ КЛИНЬЕВ

Предлагается эффективный метод нахождения асимптотик напряжений и смещений в окрестности общей вершины упругих клиньев. По сравнению с другими известными подходами преимущество метода состоит в том, что независимо от числа клиньев используются матрицы не выше второго порядка. Это обеспечивается учетом геометрической особенности проблемы – клинья образуют систему типа цепочки. Тогда применение преобразования Меллина и использование этой особенности приводит задачу к системе трехточечных разностных уравнений с матрицами не выше второго порядка. Ее определитель легко вычисляется методом прогонки. Приводятся соответствующие формулы для открытых и замкнутых систем упругих клиньев, при полном сцеплении и проскальзывании на контактах, для плоской и антиплоской деформации. В последнем случае метод включает асимптотики для задач, описываемых уравнением Лапласа.

Развитие метода граничных элементов или метода конечных элементов требует учета углов взаимодействующих клиньев. Углы представляют точки пересечения трещин или границ плоских областей с различными свойствами. Они могут принадлежать внешней границе или находиться внутри тела. В первом случае (фиг. 1) имеем конфигурацию "открытого" типа; во втором (фиг. 2) – "замкнутого" типа. Иногда углы возникают в результате искусственного деления области при сопряжении граничных и конечных элементов. Для пространственных систем блоков (зерен) соответствующие точки находятся на гладких частях общих ребер.

Геометрический разрыв, порождаемый даже одним клином, требует специального учета для получения надежных численных результатов [1, 2]. С этой целью предлагались разные подходы. Часть из них – полуэмпирические или "экспериментальные" [2–5]. Они удовлетворительны для одного клина (особенно при острых углах). Однако весьма проблематична возможность получения правильных результатов в общем случае без привлечения фактических асимптотик [6].

Другой, "регулярный" путь состоит в учете фактических асимптотик в окрестности угла. Зная строгие теоретические асимптотики, можно использовать их для конструирования специальных функций формы для граничных или конечных элементов, прилежащих к углу [7, 8].

Этот подход состоит из двух этапов. Первый из них заключается в нахождении строгих теоретических асимптотик около угла. На втором этапе эти асимптотики вводятся в функции формы для специальных "сингулярных" элементов. Простейший пример такого рода – концевой элемент, учитывающий корневую асимптотику в окрестности кончика трещины [9]. Он обеспечивает резкое повышение точности численных результатов [9, 10].

Сосредоточимся на первом этапе. Цель работы – дать эффективный алгоритм, который послужит созданию компьютерного модуля. Последний должен использовать в качестве входных данных только локальную геометрию и свойства клиньев в окрестности угла. На выходе он должен давать характеристики асимптотик. Эти выходные асимптотики в свою очередь служат входной информацией для модулей, создающих функции формы и работающих с ними.

Классический путь получения необходимых асимптотик для клина с произвольным

углом заключается в применении преобразования Меллина, либо, что эквивалентно, в использовании надлежащей формы метода разделения переменных [11–31].

Ранее [11–25] были рассмотрены случаи не более трёх клиньев. Однако общий случай трёх и более клиньев оказывается вполне доступным, если иметь решение для одного клина. Действительно, для  $n$  клиньев достаточно использовать преобразованные по Меллину решения для каждого клина и сопрячь эти решения с помощью граничных и контактных условий. Этот естественный путь может быть реализован в различных формах.

Простейший подход заключается в прямом объединении упомянутых решений в систему [26, 27]. Характеристический определитель системы имеет порядок  $4n$ . Он выписан в явном виде для частного случая трёх клиньев ( $n = 3$ ), когда его порядок равен 12 [27].

С тем чтобы избежать матриц и определителей высоких порядков, можно использовать другой подход. Он извлекает преимущество из специфической геометрии задачи: рассматриваемая система клиньев есть система типа цепочки. Это позволяет [32] перейти к трехточечным разностным уравнениям, которые эффективно решаются методом прогонки. Ниже развивается метод, основанный на этом подходе.

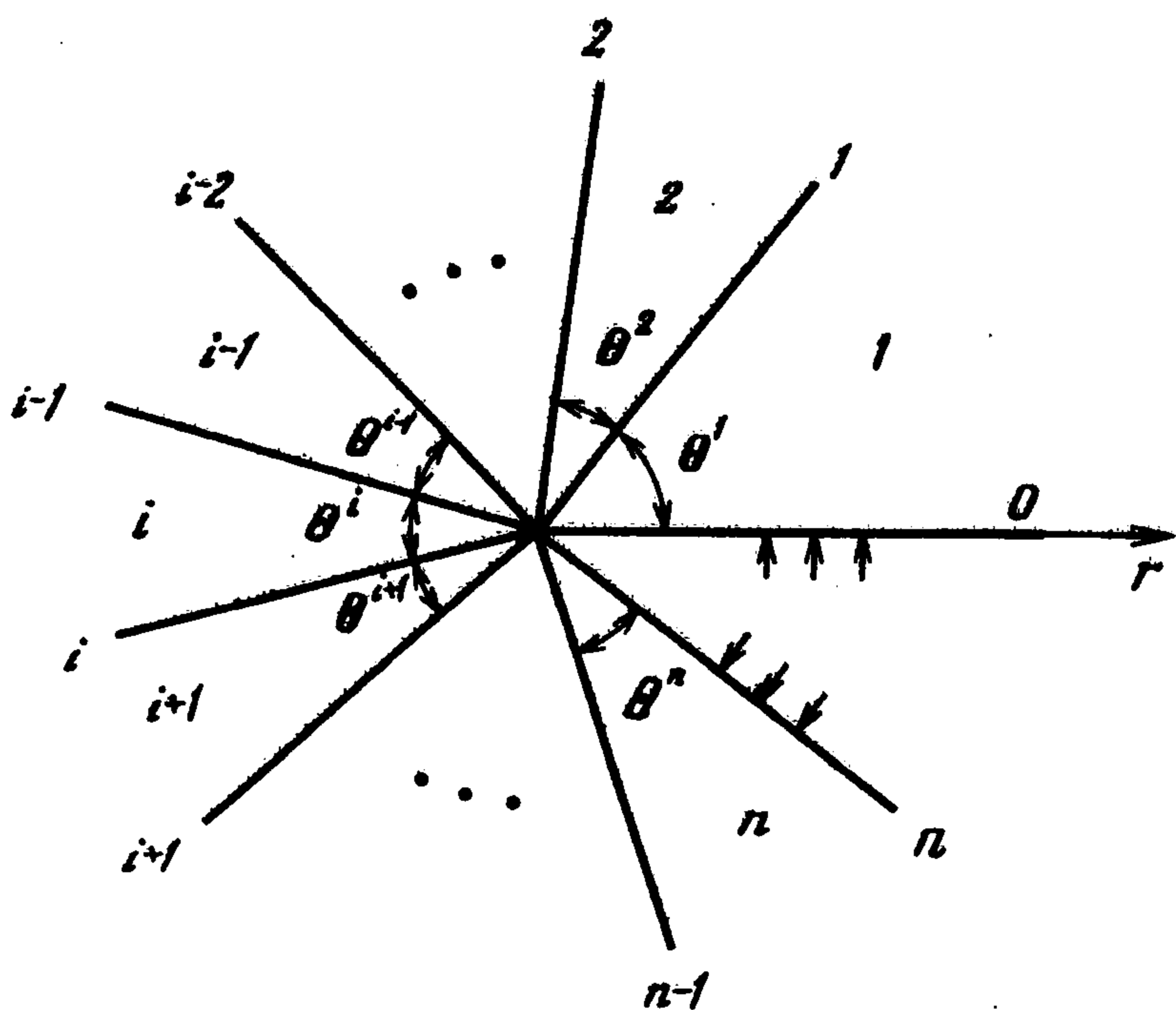
По сути, в отличие от предшествующих работ, используется специальная форма упомянутого характеристического определителя порядка  $4n$ .

Эта форма учитывает отмеченную геометрическую особенность задачи. Она такова, что метод исключения Гаусса для нее сводится к методу прогонки, причем в последнем участвуют матрицы не выше второго порядка. Низкий порядок этих матриц, а также известная устойчивость и эффективность метода прогонки обеспечивают преимущества предлагаемого метода по сравнению с ранее применявшимися подходами. В частности, он безусловно устойчивее метода матричного переноса [26] (причины неустойчивости последнего и иллюстрирующие примеры приведены, например, в [32–34]).

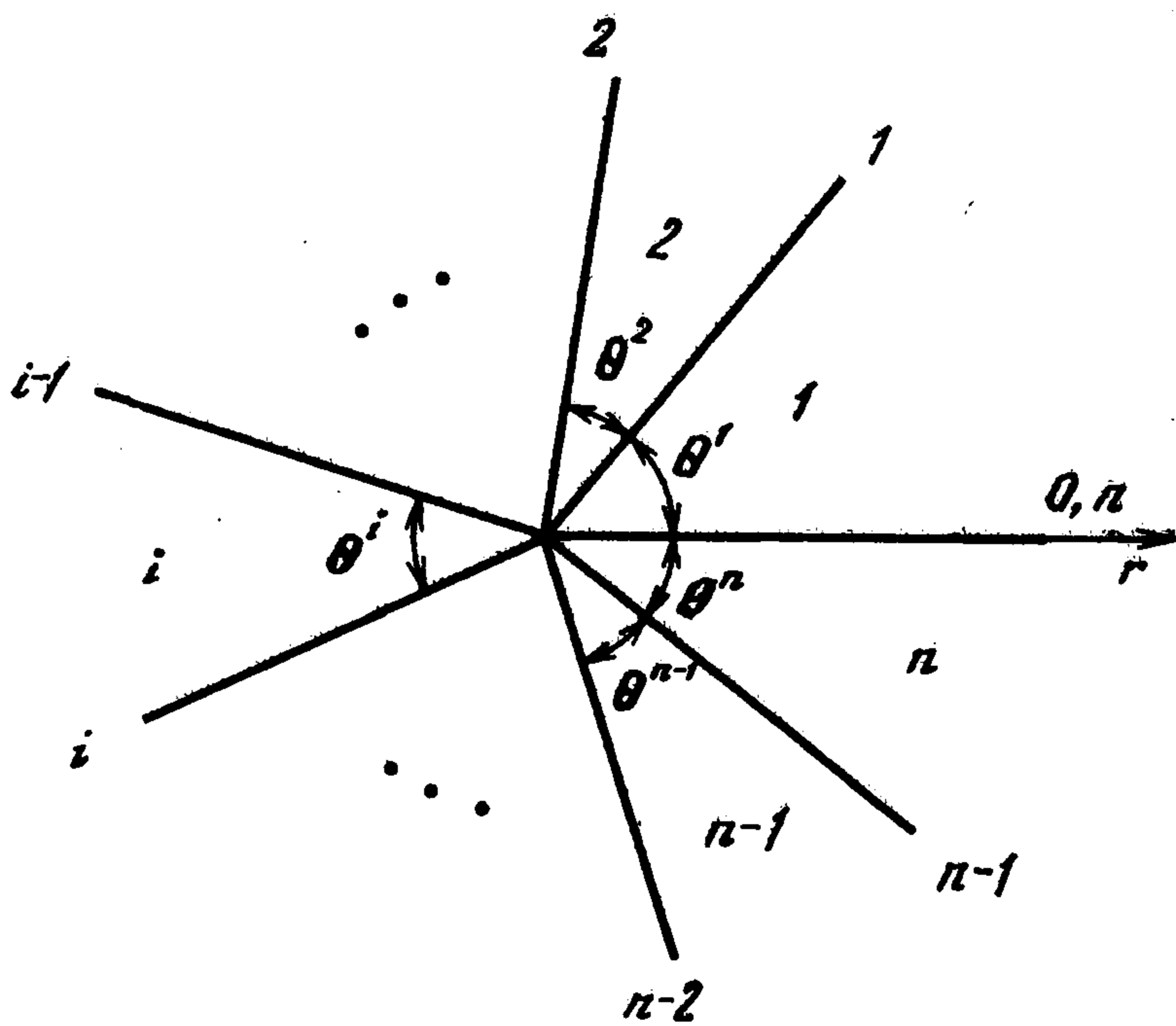
**1. Исходные соотношения.** Решение задачи об асимптотиках в окрестности общей вершины клиньев будем искать в полярных координатах  $(r, \theta)$ . Начало координат помещается в общей вершине (фиг. 1, 2). Для определенности пронумеруем клинья в порядке возрастания угловой координаты  $\theta$ . (В случае замкнутой системы полярную ось выбираем в произвольном клине.) Угол раствора  $i$ -го клина обозначим  $\Theta^i$ .

Контактам также присвоим номера. Общей границе  $i$ -го и  $(i + 1)$ -го клина дадим номер  $i$ . В случае открытой системы (фиг. 1) свободной от контакта границе (внешней) первого клина присвоим номер 0. В случае замкнутой системы (фиг. 2) нулевая и  $n$ -я границы совпадают.

Величины, относящиеся к  $i$ -му клину, будем отмечать верхним индексом  $i$ . Для его



Фиг. 1



Фиг. 2

контакта с  $(i - 1)$ -ым клином используем нижний индекс  $b$ ; для контакта с  $(i + 1)$ -ым клином — индекс  $t$ .

Прямое и обратное преобразования Меллина имеют вид

$$f(s, \theta) = \int_0^{\infty} f(r, \theta) r^{s-1} dr, \quad f(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s, \theta) r^{-s} ds \quad (1.1)$$

Здесь и в дальнейшем аргумент  $r$  относится к самой функции, аргумент  $s$  отмечает её изображение по Меллину. Для напряжений, как обычно [12], используем преобразование Меллина напряжений, умноженных на  $r^2$ , а смещения умножаются на  $r$ , так что, например,

$$\sigma_{\theta\theta}(s, \theta) = \int_0^{\infty} r^2 \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) r^{s-1} dr, \quad u_{\theta}(s, \theta) = \int_0^{\infty} r u_{\theta}(r, \theta) r^{s-1} dr \quad (1.2)$$

Это соглашение принимается всюду, где речь идет о бигармонической проблеме. (В задачах для уравнения Лапласа, в частности в задаче об антиплоской деформации, напряжения умножаются на  $r$ , а смещения берутся без этого множителя.)

Построение системы начнём с рассмотрения одного клина. Для упрощения обозначений пока не будем фиксировать его номер и расположим полярную ось вдоль его оси симметрии. Обозначим угол раствора клина  $\Theta$ . Тогда, используя функцию Эри и преобразование Меллина, получим

$$\sigma_{ij}(s, \theta) = \sigma_{ij}^s(s, \theta) + \sigma_{ij}^a(s, \theta) \quad (i, j = \theta, r) \quad (1.3)$$

$$u_i(s, \theta) = u_i^s(s, \theta) + u_i^a(s, \theta) \quad (i = \theta, r)$$

где верхний индекс  $s$  отмечает симметричную (относительно оси симметрии) часть, а индекс  $a$  — антисимметричную часть, причем:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^s(s, \theta) &= A_1^s (s+1) \cos \theta + A_2^s s(s+1) \cos(s+2)\theta \\ \sigma_{r\theta}^s(s, \theta) &= -A_1^s s(s+1) \sin \theta - A_2^s (s+1)(s+2) \sin(s+2)\theta \\ \sigma_{rr}^s(s, \theta) &= -A_1^s s(s+1) \cos \theta - A_2^s (s+1)(s+4) \cos(s+2)\theta \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$u_{\theta}^s(s, \theta) = A_1^s \frac{1}{2\mu} s \sin s\theta + A_2^s \left( \frac{1}{2\mu} (s+2) - \frac{4k}{2\mu} \right) \sin(s+2)\theta$$

$$u_r^s(s, \theta) = A_1^s \frac{1}{2\mu} s \cos s\theta + A_2^s \left( \frac{1}{2\mu} s + \frac{4k}{2\mu} \right) \cos(s+2)\theta$$

а антисимметричной части соответствуют формулы (1.4) при замене индекса  $s$  на  $a$ ,  $\cos(\cdot)$  на  $\sin(\cdot)$  и  $\sin(\cdot)$  на  $-\cos(\cdot)$ .  $A_1^s, A_2^s, A_1^a, A_2^a$  — коэффициенты, зависящие только от  $s$ ,  $\mu$  — модуль сдвига,  $k = 1 - \nu$  при плоском деформированном состоянии и  $k = 1/(1 + \nu)$  при плоском напряженном состоянии (параметр  $k$  связан с параметром  $\kappa$  Мусхелишвили [35] формулой  $\kappa = 4k - 1$ ; для параметра  $m$  Боджи [21] имеем  $m = 4k$ ).

Асимптотическое поведение напряжений и смещений в вершине клина полностью определяется полюсами функций параметра  $s$ :  $A_1^s, A_2^s, A_1^a, A_2^a$ . Задача заключается в нахождении этих полюсов.

Прежде всего запишем соотношения, выражающие смещения  $u_t, u_b$  на гранях клина через усилия  $p_t, p_b$  на них. Используя соотношения (1.3), (1.4), получим систему:

$$u_t = R_{tt} p_t + R_{tb} p_b \quad (1.5)$$

$$u_b = R_{bt} p_t + R_{bb} p_b$$

$$\mathbf{p}_t = \begin{Bmatrix} \sigma_{\theta\theta}(s, \Theta/2) \\ \sigma_{r\theta}(s, \Theta/2) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p}_b = \begin{Bmatrix} \sigma_{\theta\theta}(s, -\Theta/2) \\ \sigma_{r\theta}(s, -\Theta/2) \end{Bmatrix} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{u}_t = \begin{Bmatrix} u_\theta(s, \Theta/2) \\ u_r(s, \Theta/2) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}_b = \begin{Bmatrix} u_\theta(s, -\Theta/2) \\ u_r(s, -\Theta/2) \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

$$\mathbf{R}_{tt} = \frac{1}{2} (\mathbf{R}^s + \mathbf{R}^a), \quad \mathbf{R}_{tb} = -\frac{1}{2} (\mathbf{R}^s - \mathbf{R}^a)_1 \quad \text{разность в задаче плоской деформации} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{R}_{tb} = \frac{1}{2} (\mathbf{R}^s - \mathbf{R}^a)', \quad \mathbf{R}_{bb} = -\frac{1}{2} (\mathbf{R}^s + \mathbf{R}^a)'$$

$$\mathbf{R}^s = \frac{1}{s+1} \frac{1}{T^s} \frac{1}{2\mu} \begin{Bmatrix} ka_- & -T^s + kb_+ \\ T^s + kb_- & -ka_+ \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{R}^a = \frac{1}{s+1} \frac{1}{T^a} \frac{1}{2\mu} \begin{Bmatrix} ka_+ & -T^a + kb_- \\ T^a + kb_+ & -ka_- \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

$$T^s = (s+1)\sin\Theta + \sin(s+1)\Theta, \quad T^a = (s+1)\sin\Theta - \sin(s+1)\Theta \quad (1.11)$$

$$a_\pm = 2(\cos\Theta \pm \cos(s+1)\Theta), \quad b_\pm = 2(\sin\Theta \pm \sin(s+1)\Theta) \quad (1.12)$$

Нижний индекс "1" означает, что в соответствующей матрице первый столбец умножается на  $-1$ ; штрих означает, что на  $-1$  умножается первая строка.

Соотношения (1.5) справедливы для каждого из клиньев. Их использование для системы клиньев требует привлечения контактных условий. Одним из таких условий служит непрерывность усилий на контактах. На  $i$ -м контакте имеем

$$\mathbf{p}_b^{i+1} = \mathbf{p}_t^i = \mathbf{p}^i \quad (1.13)$$

Другим условием может быть заданный разрыв смещений:

$$\Delta \mathbf{u}^i = \mathbf{u}_b^{i+1} - \mathbf{u}_t^i = \Delta \mathbf{u}_0^i \quad (1.14)$$

Условие полного сцепления представляет частный случай (1.14), когда  $\Delta \mathbf{u}_0^i = \mathbf{0}$ . Для упрощения рассуждений будем считать, что функции  $\Delta \mathbf{u}_0^i(s)$  не имеют полюсов в любой конечной части плоскости  $S$ .

Соотношения (1.5), контактные условия (1.13), (1.14) и граничные условия (для открытой системы) позволяют построить трёхточечные разностные уравнения второго порядка относительно двумерных векторов  $\mathbf{p}^i$ . Вид системы уравнений и краевых условий зависит от типа задачи. Поэтому случаи открытой (фиг. 1) и замкнутой (фиг. 2) систем рассматриваются по отдельности.

**2. Открытая система.** При наличии внешних границ приходим [32] к системе разностных уравнений вида

$$\mathbf{A}^i \mathbf{p}^{i-1} - \mathbf{C}^i \mathbf{p}^i + \mathbf{B}^i \mathbf{p}^{i+1} + \mathbf{F}^i = \mathbf{0} \quad (i = 1, \dots, n-1) \quad (2.1)$$

где

$$\mathbf{A}^i = -\mathbf{R}_{tb}^i, \quad \mathbf{C}^i = \mathbf{R}_{tt}^i - \mathbf{R}_{bb}^{i+1}, \quad \mathbf{B}^i = \mathbf{R}_{bt}^i, \quad \mathbf{F}^i = -\Delta \mathbf{u}_0^i \quad (2.2)$$

При её решении используются условия

$$-\mathbf{C}^0 \mathbf{p}^0 + \mathbf{B}^0 \mathbf{p}^1 + \mathbf{F}^0 = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{A}^n \mathbf{p}^{n-1} - \mathbf{C}^n \mathbf{p}^n + \mathbf{F}^n = \mathbf{0}$$

Соотношения (2.3) охватывают основные типы граничных условий. А именно, если на нулевой ( $i = 0$ ) границе заданы усилия  $\mathbf{p}^0$ , то следует считать

$$\mathbf{C}^0 = \mathbf{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B}^0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}^0 = \mathbf{p}^0$$

В случае заданных смещений  $\Delta \mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^0$  имеем

$$\mathbf{C}^0 = -\mathbf{R}_{bb}^1, \quad \mathbf{B}^0 = \mathbf{R}_{bt}^1, \quad \mathbf{F}^0 = -\mathbf{u}^0$$

Аналогично, для последней ( $i = n$ ) границы при заданных усилиях  $\mathbf{p}^n$

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{0}, \quad \mathbf{C}^n = \mathbf{I}, \quad \mathbf{F}^n = \mathbf{p}^n$$

а при заданных смещениях  $\Delta \mathbf{u}^n = -\mathbf{u}^n$

$$\mathbf{A}^n = -\mathbf{R}_{tb}^n, \quad \mathbf{C}^n = \mathbf{R}_{tt}^n, \quad \mathbf{F}^n = \mathbf{u}^n$$

Задача (2.1), (2.3) решается методом матричной прогонки [36]. При прямом ходе последовательно находятся матрицы  $\alpha^i$  и векторы  $\beta^i$ :

$$\alpha^1 = (\mathbf{C}^0)^{-1} \mathbf{B}^0, \quad \beta^1 = (\mathbf{C}^0)^{-1} \mathbf{F}^0$$

$$\alpha^{i+1} = (\mathbf{C}^i - \mathbf{A}^i \alpha^i)^{-1} \mathbf{B}^i \quad (i = 1, \dots, n-1) \quad (2.4)$$

$$\beta^{i+1} = (\mathbf{C}^i - \mathbf{A}^i \alpha^i)^{-1} (\mathbf{F}^i + \mathbf{A}^i \beta^i) \quad (i = 1, \dots, n)$$

После этого обратным ходом определяются отображения усилий на контактах

$$\mathbf{p}^n = \beta^{n+1}, \quad \mathbf{p}^i = \alpha^{i+1} \mathbf{p}^{i+1} + \beta^{i+1} \quad (i = n-1, \dots, 1) \quad (2.5)$$

Применение обратного преобразования Меллина к полученным выражениям  $\mathbf{p}^i$  приводит к решению исходной задачи. По теореме о вычетах главные и последующие члены его асимптотик определяются полюсами подынтегральных функций. Эти полюса полностью характеризуются определителем  $D$  системы (2.1), (2.3). Ввиду её специфической структуры, определитель  $D$  может быть выражен с помощью прогоночных матриц второго порядка  $\alpha^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Соответствующая формула имеет вид

$$D(s) = \det \prod_{i=0}^n (\mathbf{A}^i \alpha^i - \mathbf{C}^i) = \prod_{i=0}^n \det(\mathbf{A}^i \alpha^i - \mathbf{C}^i) \quad (2.6)$$

где  $\alpha^0 = \mathbf{0}$ .

Можно показать, на чем останавливаться не будем, что корни уравнения

$$D(s) = 0 \quad (2.7)$$

определяют асимптотики усилий (и смещений) не только на контактах, но и внутри клиньев. Асимптотики одинаковы во всех клиньях.

Корни уравнения (2.7) симметричны относительно вещественной оси и прямой  $\operatorname{Re} s = -1$ . Поэтому, если  $s = a + ib$  ( $a > -1, b > 0$ ) – корень уравнения, то числа  $a - ib$ ,  $-a + ib - 2$ ,  $-a - ib - 2$  также будут корнями. Они определяют асимптотики при  $r \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow \infty$ .

При  $r \rightarrow 0$  асимптотика для напряжений определяется корнями (2.7), лежащими левее прямой  $\operatorname{Re} s = -1$ . При  $r \rightarrow \infty$  значение имеют корни, расположенные правее этой прямой. (Здесь учтено, что образы напряжений и усилий, согласно (1.2), определены для напряжений, умноженных на  $r^2$ .)

Рассмотрим асимптотику при  $r \rightarrow 0$ . Тогда в (2.7) учитываем корни с  $\operatorname{Re} s < -1$ . Из комплексных корней будем учитывать только те, для которых  $\operatorname{Im} s > 0$ . Пронумеруем все такие корни в порядке невозрастания вещественной части. Сопряженные корни,

для которых  $\text{Im } s_i < 0$ , обеспечивают вещественность обратного преобразования для усилий и всех компонент напряжений. В результате при  $r < 1$  компоненты физических напряжений (без умножения на  $r^2$ ) имеют вид

$$\sigma = \text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} C_k r^{-s_k-2} \quad (r < 1) \quad (2.8)$$

где  $\text{Re } s_k < -1$ ;  $\text{Im } s_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Представление (2.8) подразумевает, что все корни простые. Кратным корням отвечают члены с множителем  $\ln r$ .

Для асимптотик смещений имеют место аналогичные представления

$$u = \text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} B_k r^{-s_k-1} \quad (r < 1) \quad (2.9)$$

причем корни  $s_k$  те же, что в (2.8).

Для практических целей используют первый или несколько первых членов представлений (2.8), (2.9). К сингулярным напряжениям приводят только корни, находящиеся в полосе  $-2 < \text{Re } s < -1$ . Такие корни, как известно [14, 20, 28–30], существуют не всегда. Однако и в случае, когда  $s_1 < -2$ , использование первых членов асимптотических представлений (2.8), (2.9) целесообразно для обеспечения точных и устойчивых численных результатов.

**3. Замкнутая система.** Системы замкнутого типа (фиг. 2) вполне обычны для блочных и зернистых структур, а также для сварных соединений. Важные численные результаты для двух и трех жестко соединенных клиньев содержатся в [31]. Общие системы такого вида можно рассмотреть, лишь слегка модифицировав выкладки разд. 2. Использование (1.5), (1.13) и (1.14) приводит к следующей системе разностных уравнений:

$$A^0 p^{n-1} - C^0 p^0 + B^0 p^1 + F^0 = 0 \quad (i=0) \quad (3.1)$$

$$A^1 p^{i-1} - C^i p^i + B^i p^{i+1} + F^i = 0 \quad (i=1, \dots, n-1) \quad (3.2)$$

$$p^n = p^0 \quad (3.3)$$

где

$$A^0 = A^n = -R_{tb}^n, \quad C^0 = C^n = R_{ti}^n - R_{bb}^1, \quad B^0 = B^n = R_{bt}^1, \quad F^0 = F^n = -\Delta u_0^n$$

при  $i = 1, \dots, n-1$  коэффициенты  $A^i$ ,  $C^i$ ,  $B^i$  и  $F^i$  определены формулами (2.2). Условие (3.3) выделено, чтобы не исключать  $p^n$  из (3.2) при  $i = n-1$ : это позволяет сохранить вид (3.2) при  $i = 1, n-1$ .

Для решения уравнений (3.1)–(3.3) используем вариант метода матричной прогонки, – циклическую матричную прогонку. Он следует аналогичному методу для скалярных систем [36]. В результате в прямом ходе имеем

$$\alpha^1 = 0, \quad \beta^1 = 0, \quad \gamma^1 = V^0 = I$$

$$\alpha^{i+1} = (C^i - A^i \alpha^i)^{-1} B^i, \quad \beta^{i+1} = (C^i - A^i \alpha^i)^{-1} (F^i + A^i \beta^i) \quad (3.4)$$

$$\gamma^{i+1} = (C^i - A^i \alpha^i)^{-1} A^i \gamma^i \quad (i=1, \dots, n-1)$$

Обратный ход определяет вспомогательные величины

$$q^n = 0, \quad V^n = I \quad (3.5)$$

$$q^i = \alpha^{i+1} q^{i+1} + \beta^{i+1}, \quad V^i = \alpha^{i+1} V^{i+1} + \gamma^{i+1} \quad (i=n-1, \dots, 1)$$

причем векторы  $q^i$  представляют решение неоднородных уравнений при однородных краевых условиях

$$A^i q^{i-1} - C^i q^i + B^i q^{i+1} + F^i = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

$$q^0 = 0, \quad q^n = 0$$

а матрицы  $V^i$  – решение однородной задачи при неоднородных краевых условиях

$$A^i V^{i-1} - C^i V^i + B^i V^{i+1} = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

$$V^0 = I, \quad V^n = I$$

( $I$  – единичная  $(2 \times 2)$ -матрица).

Тогда решение уравнений (3.1)–(3.3) выражается формулами

$$p^0 = p^n = -(A^0 V^{n-1} - C^0 + B^0 V^1)^{-1} (F^0 + A^0 q^{n-1} + B^0 q^1) \quad (3.6)$$

$$p^i = q^i + V^i p^0 \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

Определитель системы (3.1)–(3.3) полностью характеризует асимптотики напряжений и смещений при  $r \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow \infty$ . В рассматриваемом случае, как следует из (3.4)–(3.6), определитель имеет вид

$$D = \det(A^0 V^{n-1} - C^0 + B^0 V^1) \prod_{i=1}^{n-1} \det(A^i \alpha^i - C^i) \quad (3.7)$$

Как и в случае открытой системы, он выражается через определители второго порядка. Корни уравнения  $D = 0$  определяют показатели степеней  $s_k$  в представлениях (2.8) и (2.9) для напряжений и смещений.

**4. Случай гладких контактов.** При отсутствии трения на контактах имеем нулевые касательные усилия и заданные разрывы нормальных смещений на каждом из контактов. Тогда в (1.5)–(1.7) следует оставить только нормальные компоненты векторов  $p_r, p_b, u_r, u_b$ . Поэтому обозначим

$$p_r^i = \sigma_{\theta\theta}^i(s, \Theta/2), \quad p_b^i = \sigma_{\theta\theta}^i(s, -\Theta/2)$$

$$u_r^i = u_{\theta}^i(s, \Theta/2), \quad u_b^i = u_{\theta}^i(s, -\Theta/2)$$

$$\Delta u^i = u_b^{i+1} - u_r^i, \quad \Delta u_0^i = \Delta u_{\theta 0}^i$$

все эти величины скалярные.

Применяя (1.5), контактные условия (1.13), (1.14) и определения (1.8)–(1.10) только для нормальных компонент, приходим к формулам вида (2.1), где теперь

$$R_{rr} = -R_{bb} = \frac{1}{2} \frac{k}{2\mu} \frac{1}{s+1} \left( \frac{a_-}{T^s} + \frac{a_+}{T^a} \right) \quad (4.1)$$

$$R_{rb} = -R_{br} = \frac{1}{2} \frac{k}{2\mu} \frac{1}{s+1} \left( \frac{a_-}{T^s} - \frac{a_+}{T^a} \right)$$

и  $T^s, T^a, a_+, a_-$  определены формулами (1.11), (1.12).

Дальнейшие рассуждения не отличаются от проведенных в разд. 2, 3. Приходим к системе (скалярных) уравнений вида (2.1), (2.3). Коэффициенты в ней определены формулами (2.2), однако при новых выражениях (4.1) для  $R_{rr}, R_{rb}, R_{br}, R_{bb}$ . Система (2.1), (2.2) решается методом прогонки по формулам (2.4), (2.5). Корни её определи-

теля полностью характеризуют асимптотики. Единственное отличие состоит в том, что теперь все коэффициенты  $A^i, C^i, B^i, \alpha^i$  – скалярные. Тогда  $A^i \alpha^i - C^i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) в (2.6) – число, и характеристический определитель (2.6) можно записать в виде

$$D = \prod_{i=0}^n (A^i \alpha^i - C^i) \quad (4.2)$$

где  $\alpha^0 = 0$ .

В случае замкнутой системы точно так же получим из (3.7)

$$D = (A^0 V^{n-1} - C^0 + B^0 V^1) \prod_{i=1}^{n-1} (A^i \alpha^i - C^i) \quad (4.3)$$

где теперь  $V^i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) – также скаляры; при их вычислении считаем  $V^0 = V^n = 1$ .

**5. Антиплоская деформация.** Случай антиплоской деформации интересен не только сам по себе (как представляющий особый вид деформирования). Асимптотики для него сохраняют значение в более общей ситуации: они представляют составную часть асимптотик для трёхмерных блоков около общих точек на гладких частях их взаимодействующих рёбер. Кроме того, обсуждение антиплоской деформации даёт пример рассмотрения типичной гармонической задачи.

При антиплоской деформации смещение  $u_z$  – гармоническая функция. Применяя к ней и к уравнению Лапласа преобразование Меллина (1.1), получаем общее решение преобразованного уравнения:

$$u_z(s, \theta) = A_1 \cos s\theta + A_2 \sin s\theta$$

Тогда для образов напряжений, умноженных на  $r$  (а не на  $r^2$ , как в предыдущих разделах), имеем

$$\sigma_{\theta z}(s, \theta) = \int_0^{\infty} r \sigma_{\theta z}(r, \theta) r^{s-1} dr = -\mu s (A_1 \sin s\theta - A_2 \cos s\theta)$$

$$\sigma_{rz}(s, \theta) = \int_0^{\infty} r \sigma_{rz}(r, \theta) r^{s-1} dr = -\mu s (A_1 \cos s\theta + A_2 \sin s\theta)$$

В рассматриваемом случае формулы (1.5) скалярные. В них

$$p_t = \sigma_{\theta z}(s, \Theta/2), \quad p_b = \sigma_{\theta z}(s, -\Theta/2)$$

$$u_t = u_z(s, \Theta/2), \quad u_b = u_z(s, -\Theta/2)$$

$$R_{tt} = -R_{bb} = -\frac{1}{\mu s} \operatorname{ctg} s\Theta, \quad R_{tb} = -R_{bt} = \frac{1}{\mu s} \frac{1}{\sin s\Theta} \quad (5.1)$$

Дальнейшие рассуждения прежние. Для открытой системы, применяя соотношения (1.5), (1.13), (1.14), приходим к разностным уравнениям (2.1), (2.3). Теперь это скалярные уравнения. Их коэффициенты определены формулами (2.2) при новых выражениях (5.1) для  $R_{tt}, R_{tb}, R_{bt}, R_{bb}$ .

Все последующие рассуждения не отличаются от рассуждений из разд. 2 и 3. Единственное различие состоит в том, что формулы для прогоночных коэффициентов и определителя  $D$  содержат только скалярные величины. Для  $D$  имеем формулу вида (4.2) в случае открытой системы и вида (4.3) для замкнутой системы. Вновь уравнение  $T = 0$  полностью характеризует асимптотики. Но теперь корни симметричны относительно оси  $\operatorname{Re} s = 0$ . Тогда в случае простых корней вместо (2.8), (2.9) имеем

$$\sigma = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} C_k r^{-s_k-1}, \quad u_z = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} B_k r^{-s_k} \quad (r < 1)$$

где  $\operatorname{Re} s_k < 0$ ,  $\operatorname{Im} s_k \geq 0$ . Это небольшое отличие обусловлено тем, что в рассматриваемом случае напряжения умножаются на  $r$  (вместо  $r^2$  в (1.2)), а смещения  $u_z$  не умножаются на  $r$  (в отличие от (1.2)).

Отметим, что выражения для характеристических определителей нетрудно получить в альтернативной форме. Для этого вместо соотношений (1.5), разрешенных относительно смещений, можно использовать соотношения, разрешенные относительно усилий. Окончательные формулы эквивалентны приведенным выше, но более громоздки.

Главным приложением метода может стать разработка универсального программного модуля, служащего построению функций формы для специальных "сингулярных" элементов метода граничных элементов и метода конечных элементов. Только с помощью таких элементов возможно существенное повышение точности и надежности расчетов для блочных (зернистых) сред.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бенерджи П.К., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
2. Jaswon M.A., Symm G.T. Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics. London: Acad. Press, 1977. 287 p.
3. Lachat J.C., Watson J.O. A second generation boundary integral equation program for three-dimensional stress analysis // Boundary Integral Equation Method: Computational Applications in Applied Mechanics / Eds. New-York: T.A. Cruse, F.J. Rizzo. ASME, 1975. P. 85–100.
4. Chaudonneret M. Sur la discontinuite' du vecteur contrainte dans les calculs de structure par la methode des equations integrales. // C.r. Acad. Sci. Paris. 1977. Т. 284. № 8. P. 463–466.
5. Gray L.J., Lutz E. On the treatment of corners in the boundary element method. // J. Comput. and Appl. Math. 1990. V. 32. № 3. P. 369–386.
6. Costabel M., Stephan E.P. An improved boundary element Galerkin method for three-dimensional crack problems. // Integr. Equat. and Oper. Theory. 1987. V. 10. № 4. P. 467–504.
7. Kemandis T. Kupradze's functional equation for the torsion problem of prismatic bars. Pt 2. // Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng. 1976. V. 7. № 2. P. 249–259.
8. Kelly D.W., Mustoe G.G.W., Zienkiewicz O.C. On an hierarchical order for trail functions in numerical procedures based on satisfaction of the governing differential equations // Proc. Intern. Conf. on Recent Advances in Boundary Element Methods. Southampton Univ. 1978. P. 359–373.
9. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987. 328 с.
10. Линьков А.М., Могилевская С.Г. Гиперсингулярные интегралы в плоских задачах теории упругости // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 1. С. 116–122.
11. Tranter C.J. The use of the Mellin transform in finding the stress distribution in an infinite wedge // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1948. V. 1. № 2. P. 125–130.
12. Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 667 с.
13. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
14. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. Appl. Mech. 1952. V. 19. № 4. P. 526–528.
15. Каландия А.И. Замечания об особенностях упругих решений вблизи углов // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 1. С. 132–135.
16. Godfrey D.E.R. Generalized plane stress in an elastic wedge under isolated loads // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1955. V. 8. № 2. P. 226–236.
17. Karp S.N., Karal F.C. The elastic-field behavior in neighborhood of a crack of arbitrary angle // Commun. Pure and Appl. Math. 1962. V. 15. № 4. P. 413–421.
18. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1963. Т. 16. С. 209–292.
19. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками // Math. Nachr. 1977. V. 76. S. 29–60.

20. *Bogy D.B.* Edge-bounded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading. // *Trans. ASME. Ser. E.J. Appl. Mech.* 1968. V. 35. № 3. P. 460–466.
21. *Bogy D.B.* Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions // *Trans. ASME. Ser. E.J. Appl. Mech.* 1971. V. 38. № 2. P. 377–386.
22. *Hein V.L., Erdogan F.* Stress singularities in a two-material wedge // *Intern. J. Fract. Mech.* 1971. V. 7. № 3. P. 317–330.
23. *Чубанян К.С., Геворкян С.Х.* Поведение поля напряжений около угловой точки линии раздела в задаче плоской деформации составного упругого тела // *Изв. АН АрмССР. Механика.* 1971. Т. 24. № 5. С. 16–24.
24. *Zak A.R., Williams M.L.* Crack point stress singularities at a bi-material interface // *Trans. ASME. Ser. E.J. Appl. Mech.* 1963. V. 30. № 1. P. 142–143.
25. *Cook T.S., Erdogan F.* Stresses in bounded materials with a crack perpendicular to the interface // *Intern. J. Engng. Sci.* 1972. V. 10. № 8. P. 677–697.
26. *Dempsey J.P., Sinclair G.B.* On the stress singularities in the plain elasticity of the composite wedge // *J. Elast.* 1979. V. 9. № 4. P. 373–391.
27. *Theocaris P.S.* The order of singularity at multi-wedge corner of a composite plate // *Intern. J. Engng. Sci.* 1974. V. 12. № 2. P. 107–120.
28. *Аксентян О.К.* Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // *ПММ.* 1967. Т. 31. Вып. 1. С. 178–186.
29. *Луцник О.Н.* О поведении корней уравнения, определяющего особенность напряженного состояния в окрестности вершины составного клина. // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1979. № 5. С. 82–92.
30. *Аксентян О.К., Луцник О.Н.* Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины стыкового соединения. // *Прикладная механика.* 1982. Т. 18. № 7. С. 66–73.
31. *Луцник О.Н.* Напряженно-деформированное состояние в окрестности внутренней особой точки составного тела. // *Изв. Северо-кавказ. научн. центра высшей школы. Сер. Естеств. науки.* 1983. № 1. С. 33–38.
32. *Linkov A.M., Filippov N.A.* Difference equations approach to the analysis of layered system. // *Meccanica.* 1991. V. 26. P. 195–209.
33. *Maier G., Novati G.* On boundary element-transfer matrix analysis of layered elastic systems // *Eng. Anal.* 1986. V. 3. № 4. P. 208–216.
34. *Novati G.* On the analysis of elastic layers by a Fourier series, Green's function approach // *Atti Acad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci., Fis., Mat., Natur. Ser. 8.* 1987. V. 81. № 3. P. 293–304.
35. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954. 647 с.
36. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 591 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию  
19.VII.1993