УДК 531.38

© 1995 г. И.Е. Бирман, Г.В. Горр

К ДИНАМИКЕ ПРЕЦЕССИОННЫХ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Получены условия существования прецессионных движений связки двух несимметричных твердых тел в поле силы тяжести в случае, когда одно из тел системы вращается равномерно относительно вертикали, а другое тело совершает прецессию относительно вертикали. Рассмотрена регулярная прецессия несимметричных тел, соединенных сферическим шарниром.

В динамике одного твердого тела найдены многочисленные классы прецессионных движений в различных силовых полях[1]. Для классической задачи характерными свойствами прецессионности движения являются условия на распределение масс типа Лагранжа, Гесса и Гриоли и постоянство угла между барицентрической осью в теле и осью прецессии. При рассмотрении движения твердого тела в более общих силовых полях указанные свойства могут не выполняться[1]. В задаче о движении системы связанных твердых тел в поле силы тяжести получены условия существования регулярных прецессий гироскопов Лагранжа [1], полурегулярных прецессий гироскопов Гесса [2] и установлены некоторые свойства прецессионных движений системы двух связанных твердых тел в поле силы тяжести в случае, когда одно из тел является гироскопом Лагранжа или Гесса, а другое гироскопом Гриоли [3].

Все указанные исследования базируются на условиях конкретного распределения масс в рассматриваемой системе.

Данная работа посвящена изучению прецессионных движений системы двух твердых тел в поле силы тяжести без априорного предположения относительно распределения масс тел системы. Особое внимание уделено рассмотрению случаев, когда одно из тел вращается равномерно относительно вертикали. Очевидно, что если тело S_2 будет подвешено в теле S_1 в своем центре масс, то оно будет вращаться как свободное твердое тело. В этом случае динамика прецессий тела S_1 такая же, как в классическом случае. Этот вариант в дальнейшем исключаем из рассмотрения.

Проведенные в статье исследования динамики прецессионных движений в задаче о движении системы двух тяжелых несимметричных твердых тел дополняют результаты для случая прецессий с априорным распределением масс [1–3] и показывают, что часть полученных свойств аналогична тем, которые имеют место в классической задаче. Однако при этом наряду с фактами, типичными для классической задачи, установлены и новые факты, которые в первую очередь касаются свойств равномерных движений в рассматриваемой системе двух тяжелых тел.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение системы двух твердых тел S_1 и S_2, которая имеет следующие характеристики: O_1 – неподвижная точка, принадлежащая телу S_1; точка O – общая точка тел S_1 и S_2, в этой точке находится идеальный сферический шарнир; C_1 и C_2 – центры масс тел S_1 и S_2; m_1 и m_2 – их массы. Тогда

[1] *Горр Г.В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел: Препринт № 89.03. Донецк: Ин-т прикл. математики и механики АН УССР, 1989. 66 с.

уравнения движения системы твердых тел S_1 и S_2 в поле силы тяжести в предположении, что трение в точках O_1, O_2 отсутствует, таковы [1]:

$$A_1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1+\boldsymbol{\omega}_1\times A_1\boldsymbol{\omega}_1+m_2\mathbf{s}\times\left[\frac{d\mathbf{v}_0}{dt}+\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{e}_2)-g\boldsymbol{\nu}\right]-m_1g\mathbf{e}_1\times\boldsymbol{\nu}=0 \tag{1.1}$$

$$A_2\overset{*}{\boldsymbol{\omega}}_2+\boldsymbol{\omega}_2\times A_2\boldsymbol{\omega}_2+m_2\mathbf{e}_2\times(d\mathbf{v}_0/dt-g\boldsymbol{\nu})=0 \tag{1.2}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}=\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}_1,\quad \overset{*}{\boldsymbol{\nu}}=\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}_2 \tag{1.3}$$

В формулах (1.1)–(1.3) введены следующие обозначения: $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ – векторы абсолютных угловых скоростей тел S_1 и S_2; $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор, указывающий направление силы тяжести, $\mathbf{v}_0$ – скорость точки O; $\mathbf{e}_1=\mathbf{O}_1\mathbf{C}_1$, $\mathbf{e}_2=\mathbf{OC}_2$, $\mathbf{s}=\mathbf{O}_1\mathbf{O}$; A_1 и A_2 – тензоры инерции тел S_1 и S_2, постоянные в точках O_1 и O; g – ускорение свободного падения; точка и звездочка над переменными обозначают относительные производные в базисах $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ и $\mathbf{э}_1$, $\mathbf{э}_2$, $\mathbf{э}_3$, жестко связанных с телами S_1 и S_2. Очевидны следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\mathbf{v}_0=\frac{d\mathbf{s}}{dt}=\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{s},\quad \frac{d\mathbf{v}_0}{dt}=\dot{\boldsymbol{\omega}}_1\times\mathbf{s}+\boldsymbol{\omega}_1\times(\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{s})\\ \frac{d\mathbf{e}_1}{dt}=\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{e}_1,\quad \frac{d\mathbf{e}_2}{dt}=\boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{e}_2\end{gathered} \tag{1.4}$$

Уравнения (1.1)–(1.3) допускают первые интегралы:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\nu}\cdot[A_1\boldsymbol{\omega}_1+A_2\boldsymbol{\omega}_2+m_2(\mathbf{e}_2+\mathbf{s})\times\mathbf{v}_0+m_2\mathbf{s}\times(\boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{e}_2)]=k\\ (A_1\boldsymbol{\omega}_1\cdot\boldsymbol{\omega}_1)+(A_2\boldsymbol{\omega}_2\cdot\boldsymbol{\omega}_2)+m_2\upsilon_0^2+2m_2\mathbf{v}_0\cdot(\boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{e}_2)-\\ -2m_1g(\mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\nu})-2m_2g(\mathbf{s}+\mathbf{e}_2)\cdot\boldsymbol{\nu}=2E,\quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}=1\end{gathered} \tag{1.5}$$

Пусть

$$\boldsymbol{\omega}_1=\sum_{j=1}^{3}p_j^{(1)}\mathbf{i}_j,\quad \boldsymbol{\omega}_2=\sum_{k=1}^{3}p_k^{(2)}\mathbf{э}_k,\quad \boldsymbol{\nu}=\sum_{n=1}^{3}\mathbf{v}_n^{(1)}\mathbf{i}_n \tag{1.6}$$

$$\mathbf{э}_i=\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}\mathbf{i}_j,\quad \mathbf{i}_l=\sum_{n=1}^{3}\beta_{ln}\mathbf{э}_n,\quad (i=1,2,3;\ l=1,2,3) \tag{1.7}$$

где очевидно произведение матриц (α_{ij}), (β_{ln}) равно единичной матрице. Обозначим через $O_1\xi\eta\zeta$ неподвижную систему координат, полагая $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}=\boldsymbol{\nu}$ ее единичными векторами. Положение базисов тел S_1 и S_2 относительно $O_1\xi\eta\zeta$ определим углами Эйлера θ_1, φ_1, ψ_1 и θ_2, φ_2, ψ_2 и матрицами $(\gamma_{ij}^{(1)})$, $(\gamma_{ij}^{(2)})$ соответственно, где $\theta_1 = \angle(\boldsymbol{\nu},\mathbf{i}_3)$, $\theta_2=\angle(\boldsymbol{\nu},\mathbf{э}_3)$, а положение базиса тела S_2 относительно тела S_1 – углами θ, φ, ψ, где $\theta=\angle(\mathbf{i}_3,\mathbf{э}_3)$. Тогда:

$$\begin{gathered}\gamma_{11}^{(i)}=\cos\varphi_i\cos\psi_i-\cos\theta_i\sin\varphi_i\sin\psi_i\\ \gamma_{12}^{(i)}=\cos\varphi_i\sin\psi_i+\cos\theta_i\sin\varphi_i\cos\psi_i,\quad \gamma_{13}^{(i)}=\sin\varphi_i\sin\theta_i\\ \gamma_{21}^{(i)}=-\sin\varphi_i\cos\psi_i-\cos\theta_i\sin\psi_i\cos\varphi_i\\ \gamma_{22}^{(i)}=-\sin\varphi_i\sin\psi_i+\cos\theta_i\cos\varphi_i\cos\psi_i,\quad \gamma_{23}^{(i)}=\cos\varphi_i\sin\theta_i\\ \gamma_{31}^{(i)}=\sin\theta_i\sin\psi_i,\quad \gamma_{32}^{(i)}=-\sin\theta_i\cos\psi_i,\quad \gamma_{33}^{(i)}=\cos\theta_i,\quad i=1,2\end{gathered} \tag{1.8}$$

Здесь:

$$(\gamma_{ij}^{(2)}) = (\gamma_{il}^{(1)})(\alpha_{lj})$$

$$\alpha_{11} = \cos\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi, \quad \alpha_{12} = \cos\varphi\sin\psi + \cos\theta\cos\psi\sin\varphi$$

$$\alpha_{13} = \sin\varphi\sin\theta, \quad \alpha_{21} = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\theta\cos\varphi\sin\psi$$

$$\alpha_{22} = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi, \quad \alpha_{23} = \cos\varphi\sin\theta \tag{1.9}$$

$$\alpha_{31} = \sin\theta\sin\psi, \quad \alpha_{32} = -\sin\theta\cos\psi, \quad \alpha_{33} = \cos\theta$$

Для абсолютных угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ имеем

$$p_1^{(i)} = \dot\psi_i\sin\theta_i\sin\varphi_i + \dot\theta_i\cos\varphi_i, \quad p_2^{(i)} = \dot\psi_i\sin\theta_i\cos\varphi_i - \dot\theta_i\sin\varphi_i$$
$$p_3^{(i)} = \dot\psi_i\cos\theta_i + \dot\varphi_i, \quad (i = 1,2) \tag{1.10}$$

Пусть $\boldsymbol{\omega}_*$ – угловая скорость тела S_2 относительно S_1, тогда

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_* \tag{1.11}$$

где

$$\boldsymbol{\omega}_* = (\dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi)\mathbf{э}_1 + (\dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi)\mathbf{э}_2 + (\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi)\mathbf{э}_3 \tag{1.12}$$

Используя (1.6)–(1.12), можно записать систему (1.1) и (1.2) через переменные θ_1, φ_1, ψ_1 и θ, φ, ψ. Однако при этом получится весьма громоздкая система дифференциальных уравнений, которая плохо приспособлена к исследованию специального класса прецессионных движений. Поэтому в данной статье будем использовать другой подход, который основан в первую очередь на свойстве прецессионных движений. После получения условий существования таких движений в данной задаче будем в ряде случаев указывать и положение базисов тел S_1, S_2 относительно $O_1\xi\eta\zeta$ и относительно друг друга, опираясь на указанные выше кинематические характеристики.

2. Прецессионные движения. Пусть каждое из тел S_1 и S_2 совершает прецессионное движение. Это значит, что в S_1 и S_2 найдутся такие неизменные единичные векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, а в пространстве $O_1\xi\eta\zeta$ – единичные векторы $\boldsymbol{\gamma}_1$ и $\boldsymbol{\gamma}_2$, что углы между $\mathbf{a}_1$ и $\boldsymbol{\gamma}_1$ и $\mathbf{a}_2$ и $\boldsymbol{\gamma}_2$ соответственно в течение всего времени остаются постоянными. Указанное свойство запишем так:

$$\mathbf{a}_1\cdot\boldsymbol{\gamma}_1 = a_0^{(1)}, \quad \mathbf{a}_2\cdot\boldsymbol{\gamma}_2 = a_0^{(2)}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}_1 = \boldsymbol{\gamma}_1\times\boldsymbol{\omega}_1, \quad \overset{*}{\boldsymbol{\gamma}}_2 = \boldsymbol{\gamma}_2\times\boldsymbol{\omega}_2 \tag{2.1}$$

Тогда из (2.1) получаем

$$\boldsymbol{\omega}_1 = u_1(t)\mathbf{a}_1 + \upsilon_1(t)\boldsymbol{\gamma}_1, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = u_2(t)\mathbf{a}_2 + \upsilon_2(t)\boldsymbol{\gamma}_2 \tag{2.2}$$

Если $u_1(t)$ и $\upsilon_1(t)$ не зависят от времени, то прецессия тела S_1 называется регулярной. Когда одна из указанных функций постоянна, то прецессия называется полурегулярной. Если ни одна из функций $u_1(t)$, $\upsilon_1(t)$ не является постоянной, то имеем прецессию общего вида. Аналогичны определения прецессионных движений тела S_2. Кроме того, если вектор $\boldsymbol{\gamma}_1 = \boldsymbol{\nu}$, то прецессионное движение называют прецессией тела S_1 относительно вертикали, в противном случае говорят о прецессионном движении тела S_1 относительно наклонной оси. Обзор результатов полученных в исследовании прецессий в динамике одного твердого тела подробно изложен в цитируемом выше препринте. Следует только отметить, что в классической задаче о движении тела в поле силы тяжести имеют место регулярная прецессия гироскопа Лагранжа, полурегулярная прецессия гироскопа Гесса для случая прецессии относительно вертикали и регулярная прецессия гироскопа Гриоли относительно наклонной оси. Одним из характерных свойств является то, что вектор $\mathbf{a}_i$ направлен по барицентрической оси. В динамике систем последнее свойство также присуще многим прецессиям, поэтому будем считать, что рассматриваются только прецессии такого типа.

Пусть тело S_1 совершает прецессионное движение и $\varkappa_1$ – угол между векторами $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\gamma}_1$. Будем считать, что $\mathbf{i}_3 = \mathbf{a}_1$ и θ_1 – угол между γ_1 и $\mathbf{i}_3$. Тогда очевидно, что $a_0^{(1)} = \cos\theta_1$ и $\theta_1 = \theta_1^{(0)}$, где $\theta_1^{(0)}$ – постоянная. Подстановка $\boldsymbol{\omega}_1 = u_1(t)\mathbf{i}_3 + \upsilon_1(t)\boldsymbol{\gamma}_1$ в уравнение для производных векторов $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\gamma}_1$ из (1.3) и (2.1) дает

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_1 = u_1(t)(\boldsymbol{\gamma}_1 \times \mathbf{i}_3), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = u_1(t)(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{i}_3) + \upsilon_1(t)(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\gamma}_1) \tag{2.3}$$

Учитывая, что векторы $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\gamma}_1$ единичные, а также полагая, что ψ_1 – угол прецессии с осью прецессии, направленной по вектору $\boldsymbol{\gamma}_1$, для векторов $\boldsymbol{\gamma}_1$ и $\boldsymbol{\nu}$ из (2.3) получим следующие представления:

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = a_{01}^{(1)} \sin\varphi_1 \mathbf{i}_1 + a_{01}^{(1)} \cos\varphi_1 \mathbf{i}_2 + a_0^{(1)} \mathbf{i}_3 \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{\nu} = (c_0 + b_0' a_0^{(1)} \sin\psi_1)\boldsymbol{\gamma}_1 - b_0' \sin\psi_1 \mathbf{i}_3 - b_0'(\boldsymbol{\gamma}_1 \times \mathbf{i}_3)\cos\psi_1 \tag{2.5}$$

где φ_1 – угол собственного вращения с осью, направленной по вектору $\mathbf{i}_3$, $a_{01}^{(1)} = \sin\theta_1^0$, $c_0 = \cos\varkappa_1$, $b_0' = \sin\varkappa_1 / \sin\theta_1^{(0)}$. При этом $u_1(t) = \dot{\varphi}_1$, $\upsilon_1(t) = \dot{\psi}_1$, т.е. из (2.2) имеем

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\varphi}_1 \mathbf{a}_1 + \dot{\psi}_1 \boldsymbol{\gamma}_1 \tag{2.6}$$

Такой подход позволяет получить явную зависимость векторов $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\omega}_1$ от соответствующих переменных и рассматривать только динамические уравнения движения тела S_1. Это же обстоятельство касается и исследования динамики прецессионных движений тела S_2. Отметим, что введенная здесь переменная ψ_1 отличается от соответствующей переменной из раз. 2 только в случае прецессионных движений относительно наклонной оси. Поэтому, чтобы не вводить новые обозначения, используется угол ψ_1.

В данной статье будем изучать прецессионные движения связи тел S_1 и S_2 в предположении, что прецессии тел S_1 и S_2 происходят относительно вертикали, т.е. полагаем $\boldsymbol{\gamma}_1 = \boldsymbol{\gamma}_2 = \boldsymbol{\nu}$. Кроме того, как уже отмечалось, считаем, что векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ направлены по барицентрическим осям тел S_1 и S_2 и центр масс тела S_1 лежит на отрезке $[O_1O]$. Пусть в уравнениях (1.1), (1.2) $\mathbf{s} = s\mathbf{i}_3$, $\mathbf{e}_1 = e_1\mathbf{i}_3$, $\mathbf{e}_2 = e_2\boldsymbol{э}_3$. Тогда в силу (1.4), (2.2) и указанных предположений из (1.1), (1.2) получим

$$A_1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times A_1\boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{i}_3 \times [P_2(\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \mathbf{i}_3 + \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{i}_3) - \mathbf{i}_3\omega_1^2) +$$
$$+P_1(\overset{*}{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \boldsymbol{э}_3 + \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \boldsymbol{э}_3) - \omega_2^2\boldsymbol{э}_3) - \Gamma_3\boldsymbol{\nu}] - \Gamma_1(\mathbf{i}_3 \times \boldsymbol{\nu}) = 0 \tag{2.7}$$

$$A_2\overset{*}{\boldsymbol{\omega}}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times A_2\boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{э}_3 \times [P_1(\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \mathbf{i}_3 + \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{i}_3) - \omega_1^2\mathbf{i}_3) - \Gamma_2\boldsymbol{\nu}] = 0 \tag{2.8}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}_1, \quad \overset{*}{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}_2 \tag{2.9}$$

Интегралы (1.5) таковы:

$$\boldsymbol{\nu} \cdot [A_1\boldsymbol{\omega}_1 + A_2\boldsymbol{\omega}_2 + (P_1\boldsymbol{э}_3 + P_2\mathbf{i}_3) \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{i}_3) + P_1\mathbf{i}_3 \times (\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{э}_3)] = k, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1$$
$$(2.10)$$
$$(A_1\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1) + (A_2\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_2) + P_2(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{i}_3)^2 \times 2P_1(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{i}_3) \cdot (\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{э}_3) -$$
$$-2\Gamma_1(\mathbf{i}_3 \cdot \boldsymbol{\nu}) - 2(\Gamma_3\mathbf{i}_3 + \Gamma_2\boldsymbol{э}_3) \cdot \boldsymbol{\nu} = 2E$$

В (2.7)–(2.10) обозначено $P_1 = m_2e_2s$, $P_2 = m_2s^2$, $\Gamma_1 = m_1e_1g$, $\Gamma_2 = m_2e_2g$, $\Gamma_3 = m_2sg$.

Предположим, что тела S_1, S_2 совершают прецессионные движения относительно вертикали при указанных выше ограничениях. Тогда из (2.1), (2.2) имеем

$$\mathbf{i}_3 \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0^{(1)}, \quad \mathbf{э}_3 \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0^{(2)}$$
$$\boldsymbol{\omega}_1 = u_1(t)\mathbf{i}_3 + \upsilon_1(t)\boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = u_2(t)\mathbf{э}_3 + \upsilon_2(t)\boldsymbol{\nu} \tag{2.11}$$

Внесем $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ в (2.7) и (2.8):

$$\dot{u}_1(t)A_1\mathbf{i}_3 + \dot{\upsilon}_1(t)A_1\boldsymbol{\nu} + u_1(t)\upsilon_1(t)[\mathrm{tr}(A_1)(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{i}_3) - 2(A_1\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{i}_3)] +$$
$$+\dot{u}_1^2(t)(\mathbf{i}_3\times A_1\mathbf{i}_3) + \dot{\upsilon}_1^2(t)(\boldsymbol{\nu}\times A_1\boldsymbol{\nu}) + \mathbf{i}_3\times[P_2\dot{\upsilon}_1(t)(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{i}_3) + P_1\dot{\upsilon}_2(t)(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{э}_3) +$$
$$+(P_2\upsilon_1^2(t)a_0^{(1)} + P_1\upsilon_2^2(t)a_0^{(2)} - \Gamma_3)\boldsymbol{\nu} - P_1\upsilon_2^2(t)\mathbf{э}_3] - \Gamma_1(\mathbf{i}_3\times\boldsymbol{\nu}) = 0 \tag{2.12}$$

$$\dot{u}_2(t)A_2\mathbf{э}_3 + \dot{\upsilon}_2(t)A_2\boldsymbol{\nu} + u_2(t)\upsilon_2(t)[\mathrm{tr}(A_2)(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{э}_3) - 2(A_2\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{э}_3)] +$$
$$+u_2^2(t)(\mathbf{э}_3\times A_2\mathbf{э}_3) + \upsilon_2^2(t)(\boldsymbol{\nu}\times A_2\boldsymbol{\nu}) + \mathbf{э}_3\times[P_1\dot{\upsilon}_1(t)(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{i}_3) +$$
$$+P_1\upsilon_1^2(t)a_0^{(1)} - \Gamma_2)\boldsymbol{\nu} - P_1\upsilon_1^2(t)\mathbf{i}_3] = 0 \tag{2.13}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = u_1(t)(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{i}_3), \quad \overset{*}{\boldsymbol{\nu}} = u_2(t)(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{э}_3) \tag{2.14}$$

где $\mathrm{tr}(A_i)$ – следы матриц A_1 и A_2: $A_1 = (A_{ij})$, $A_2 = (B_{ij})$.

Для абсолютных производных векторов $\mathbf{i}_3$ и $\mathbf{э}_3$ по аналогии с (1.4) имеем

$$\frac{d\mathbf{i}_3}{dt} = \upsilon_1(t)(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{i}_3), \quad \frac{d\mathbf{э}_3}{dt} = \upsilon_2(t)(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{э}_3) \tag{2.15}$$

Исследование условий существования прецессионных движений связки тел S_1 и S_2 приводит к необходимости рассмотрения особых случаев, когда одно из тел вращается равномерно [3]. Отметим, что эти случаи представляют самостоятельный интерес.

3. Первый режим движения связки. Пусть тело S_1 совершает регулярную прецессию, а тело S_2 равномерно вращается относительно барицентрической оси, которая направлена по вертикали. Тогда из (2.11) имеем

$$\mathbf{i}_3 \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0^{(1)}, \quad a_0^{(2)} = 1, \quad \boldsymbol{\omega}_1 = n_0\mathbf{i}_3 + m_0\boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = m_0'\mathbf{э}_3 \tag{3.1}$$

т.е. $u_1(t) = n_0$, $\upsilon_1(t) = m_0$, $u_2(t) = m_0'$, $\upsilon_2(t) = 0$. Внесем эти значения в (2.12), (2.13) и первое уравнение из (2.14):

$$n_0m_0[\mathrm{tr}(A_1)(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{i}_3) - 2(A_1\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{i}_3)] + n_0^2(\mathbf{i}_3\times A_1\mathbf{i}_3) + m_0^2(\boldsymbol{\nu}\times A_1\boldsymbol{\nu}) +$$
$$+(P_2m_0^2a_0^{(1)} - \Gamma_3 - \Gamma_1)(\mathbf{i}_3\times\boldsymbol{\nu}) = 0 \tag{3.2}$$

$$m_0'^2(\mathbf{э}_3\times A_2\mathbf{э}_3) - P_1m_0^2(\mathbf{э}_3\times\mathbf{i}_3) = 0, \tag{3.3}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = n_0(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{i}_3) \tag{3.4}$$

Для вектора $\boldsymbol{\nu}$ из (3.4) получим представление

$$\boldsymbol{\nu} = a_{01}^{(1)}\sin\varphi_1\mathbf{i}_1 + a_{01}^{(1)}\cos\varphi_1\mathbf{i}_2 + a_0^{(1)}\mathbf{i}_3 \tag{3.5}$$

где $a_{01}^{(1)} = \sqrt{1 - a_0^{(1)2}}$, $\varphi_1 = n_0t + \varphi_1^{(0)}$. Пусть на основе (1.7) $\mathbf{i}_3 = \beta_{31}\mathbf{э}_1 + \beta_{32}\mathbf{э}_2 + \beta_{33}\mathbf{э}_3$. Тогда, учитывая, что $A_2 = (B_{ij})$ из уравнения (3.3) имеем

$$P_1m_0^2\beta_{32} - m_0'^2B_{23} = 0, \quad P_1m_0^2\beta_{31} - m_0'^2B_{13} = 0 \tag{3.6}$$

Отсюда вытекает, что β_{31} и β_{32} – постоянные и в силу $\beta_{31}^2 + \beta_{32}^2 + \beta_{33}^2 = 1$ величина β_{33} также постоянная. Таким образом, вектор $\mathbf{i}_3$ неподвижен в базисе тела S_2. На основе первого уравнения из (2.15) при постоянных $\beta_{31}, \beta_{32}, \beta_{33}$ можно показать, что $m_0' = m_0$, тогда из (3.6) следует

$$\beta_{31} = B_{13} / P_1, \quad \beta_{32} = B_{23} / P_1, \quad \beta_{33} = \cos\theta_1^{(0)} = (1 - (B_{13}^2 + B_{23}^2) / P_1^2]^{1/2}$$

Подстановка (3.5) в уравнение (3.2) и требование того, чтобы полученное уравнение было тождеством по t, приводит к условиям

$$A_{12} = A_{13} = A_{23} = 0, \quad A_{11} = A_{22}$$
$$m_0 n_0 A_{33} + m_0^2 a_0^{(1)} (A_{33} - A_{11}) - P_2 m_0^2 a_0^{(1)} + \Gamma_3 + \Gamma_1 = 0 \tag{3.7}$$

Соотношения (3.7) говорят о том, что тело S_1 – гироскоп Лагранжа. Пусть

$$\beta_{31} = a_{01}^{(1)} \cos\alpha_0, \quad \beta_{32} = a_{01}^{(1)} \sin\alpha_0, \quad \beta_{33} = a_0^{(1)}, \quad \sin\alpha_0 = \frac{B_{23}}{P_1 a_{01}^{(1)}}, \quad \cos\alpha_0 = \frac{B_{13}}{P_1 a_{01}^{(1)}}$$

Тогда условия на параметры тела можно записать так:

$$B_{13}^2 + B_{23}^2 = (a_{01}^{(1)} P_1)^2 \tag{3.8}$$

Положение тела S_2 по отношению к телу S_1 задается первой формулой из (1.7), где:

$$\alpha_{11} = -a_0^{(1)} \cos\alpha_0 \sin\varphi_1 - \sin\alpha_0 \cos\varphi_1$$
$$\alpha_{12} = -a_0^{(1)} \cos\alpha_0 \cos\varphi_1 + \sin\alpha_0 \sin\varphi_1$$
$$\alpha_{13} = a_0^{(1)} \cos\alpha_0, \quad \alpha_{21} = -a_0^{(1)} \sin\alpha_0 \sin\varphi_1 + \cos\alpha_0 \cos\varphi_1$$
$$\alpha_{22} = -a_0^{(1)} \sin\alpha_0 \cos\varphi_1 - \cos\alpha_0 \sin\varphi_1, \quad \alpha_{23} = a_0^{(1)} \sin\alpha_0$$
$$\alpha_{31} = a_{01}^{(1)} \sin\varphi_1, \quad \alpha_{32} = a_{01}^{(1)} \cos\varphi_1, \quad \alpha_{33} = a_0^{(1)}$$

Для первого режима связки решение уравнений (1.1)–(1.3) таково:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = n_0 \mathbf{i}_3 + m_0 \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = m_0 \boldsymbol{э}_3$$
$$\boldsymbol{\nu} = a_{01}^{(1)} \sin\varphi_1 \mathbf{i}_1 + a_{01}^{(1)} \cos\varphi_1 \mathbf{i}_2 + a_0^{(1)} \mathbf{i}_3, \quad \varphi_1 = n_0 t + \varphi_1^{(0)}$$

Положение тела S_1 относительно неподвижной системы координат $O_1\xi\eta\zeta$ определяется матрицей $(\gamma_{ij}^{(1)})$. Ее компоненты имеют вид соотношений (1.8), в которых необходимо положить $i = 1$ и $\theta_1 = \theta_1^{(0)}$, $\varphi_1 = n_0 t + \varphi_1^{(0)}$, $\psi_1 = m_0 t + \psi_1^{(0)}$.

Если предположить, что тело S_2 является также гироскопом Лагранжа, то из (3.8) вытекает, что оно должно быть подвешено на теле S_1 в своем центре масс. Следовательно, в общем случае тело S_2 не может быть симметричным относительно своей оси равномерного вращения. Таким образом, характерными свойствами первого режима связки служат условия, что тело S_1 – гироскоп Лагранжа а тело S_2 таковым не является и ось его равномерного вращения в общем случае не может быть главной в теле S_2.

4. Второй режим движения связки. Пусть тело S_1 совершает регулярную прецессию, а тело S_2 равномерно вращается относительно небарицентрической оси, которая направлена по вертикали

$$\mathbf{i}_3 \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0^{(1)}, \quad a_0^{(2)} = 1, \quad \boldsymbol{\omega}_1 = n_0 \mathbf{i}_3 + m_0 \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = m_0' \mathbf{b} \tag{4.1}$$

где $\mathbf{b} \neq \boldsymbol{э}_3$, $\mathbf{b} = \boldsymbol{\nu}$. Тогда уравнение движения тела S_2 из (2.13) таково:

$$m_0'^2 (\mathbf{b} \times A_2 \mathbf{b}) + \boldsymbol{э}_3 \times [(P_1 m_0^2 a_0^{(1)} - \Gamma_2)\boldsymbol{\nu} - P_1 m_0^2 \mathbf{i}_3] = 0 \tag{4.2}$$

Введем в S_2 промежуточный базис $\mathfrak{э}_1^*, \mathfrak{э}_2^*, \mathfrak{э}_3^* = \mathbf{b}$ так, чтобы $\mathfrak{э}_3 = \gamma_1 \mathfrak{э}_1^* + \gamma_3 \mathfrak{э}_3^*$. Положим

$$\mathbf{i}_3 = \beta_{31}^* \mathfrak{э}_1^* + \beta_{32}^* \mathfrak{э}_2^* + \beta_{33}^* \mathfrak{э}_3^* \tag{4.3}$$

Из уравнения (4.2) в силу (4.3) найдем

$$\begin{gathered} P_1 \gamma_3 m_0^2 \beta_{32}^* - m_0'^2 B_{23}^* = 0, \quad \gamma_1 \beta_{32}^* = 0 \\ m_0'^2 B_{13}^* - \gamma_1 (P_1 m_0^2 a_0^{(1)} - \Gamma_2 - P_1 m_0^2 \beta_{33}^*) - P_1 \gamma_3 m_0^2 \beta_{31}^* = 0 \end{gathered} \tag{4.4}$$

Так как $\gamma_1 \neq 0$, то $\beta_{32}^* = 0$, $B_{23}^* = 0$. Кроме того, из (2.15) при условиях (4.1)–(4.4) следует, что $m_0' = m_0$, $\beta_{33}^* = a_0^{(1)}$, $\beta_{31}^* = a_{01}^{(1)}$. Пусть $\gamma_1 = \cos \alpha_0^*$, $\gamma_3 = \sin \alpha_0^*$, тогда из (4.4) имеем

$$m_0^2 B_{13}^* + \Gamma_2 \cos \alpha_0^* - P_1 m_0^2 a_0^{(1)} \sin \alpha_0^* = 0 \tag{4.5}$$

Если ось вращения является главной в теле S_2, то из (4.5) следует: $\operatorname{tg} \alpha_0^* = \Gamma_2 / P_1 m_0^2 a_0^{(1)}$. При условиях (3.5), (4.1)–(4.4) уравнение (2.12) дает первые два условия из (3.7).

Таким образом, для второго режима тело S_1 опять является гироскопом Лагранжа. Отличие от первого режима состоит в том, что равномерное вращение тела S_2 может происходить относительно главной оси в теле S_2 в точке O, которая однако не может быть барицентрической. Положение базисов тел S_1 и S_2 легко определить на основе указанных в разделах 3, 4 соотношений.

5. Третий режим движения связки. Пусть тело S_1 равномерно вращается относительно вертикали, а тело S_2 совершает регулярную прецессию:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = m_0 \boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{i}_3 \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0^{(1)}, \quad \mathfrak{э}_3 \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0^{(2)}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = n_0' \mathfrak{э}_3 + m_0' \boldsymbol{\nu} \tag{5.1}$$

В теле S_1 вектор $\boldsymbol{\nu}$ неподвижен. Обозначим его $\mathbf{a}_1$. Считаем, что вектор $\mathbf{a}_1$, вообще говоря, не совпадает с вектором $\mathbf{i}_3$. Введем в теле S_1 базис $\mathbf{i}_1^*, \mathbf{i}_2^*, \mathbf{i}_3^* = \mathbf{a}_1$, причем положим

$$\mathbf{i}_3 = \delta_{31} \mathbf{i}_1^* + \delta_{33} \mathbf{i}_3^*, \quad \mathfrak{э}_3 = \sigma_{31} \mathbf{i}_1^* + \sigma_{32} \mathbf{i}_2^* + \sigma_{33} \mathbf{i}_3^* \tag{5.2}$$

Анализ уравнения (2.12) при указанных предположениях (5.1), (5.2) дает условия

$$\begin{gathered} \delta_{31} \sigma_{32} = 0, \quad P_1 \sigma_{32} \delta_{33} - A_{23}^* = 0 \\ A_{13}^* m_0^2 - \delta_{31} (P_2 m_0^2 \delta_{33} + P_1 m_0'^2 a_0^{(2)} - \Gamma_3 - \Gamma_1) + P_1 m_0'^2 (\delta_{31} \sigma_{33} - \delta_{33} \sigma_{31}) = 0 \end{gathered} \tag{5.3}$$

Если $\delta_{31} = 0$, т.е. равномерное вращение тела S_1 происходит относительно барицентрической оси, то $\delta_{33} = 1$ и из (5.3) имеем

$$P_1 \sigma_{32} = A_{13}, \quad P_1 \sigma_{31} = A_{23} \tag{5.4}$$

Здесь учтено, что $m_0' = m_0$. Это условие вытекает из уравнения

$$d\mathfrak{э}_3 / dt = m_0' (\boldsymbol{\nu} \times \mathfrak{э}_3)$$

при учете, что σ_{ij} из (5.4) постоянны. Из (5.4) следует, что если барицентрическая ось тела S_1 является главной, т.е. тело S_2 также вращается равномерно. Это значит, что для существования прецессии тела S_2 необходимо считать, что барицентрическая ось не является главной осью в S_1.

Если в (5.3) $\delta_{31} \neq 0$, то $\sigma_{32} = 0$, $A_{23}^* = 0$. Тогда можно положить $\sigma_{33} = a_0^{(2)}$, $\sigma_{31} = a_{01}^{(2)}$ и из (5.3) получим

$$A_{13}^* m_0^2 - m_0^2 P_2 \delta_{31} \delta_{33} + \Gamma_1 \delta_{31} - P_1 m_0^2 \delta_{33} a_0^{(2)} = 0 \tag{5.5}$$

Рассмотрение уравнения (2.13) дает условия

$$B_{12} = B_{13} = B_{23} = 0, \qquad B_{11} = B_{22} \tag{5.6}$$

$$B_{33}a_{01}^{(2)}n_0'm_0 - (B_{11} - B_{33})a_0^{(2)}a_{01}^{(2)}m_0^2 - a_{01}^{(2)^2}(m_0^2P_1\delta_{33} - \Gamma_2) +$$

$$+P_1m_0^2[\sigma_{33} - a_0^{(2)}(\delta_{31}\sigma_{31} + \delta_{33}\sigma_{33})] = 0 \tag{5.7}$$

Таким образом, из (5.6) следует, что тело S_2 – гироскоп Лагранжа. Условия существования указанного типа движений имеют вид (5.5), (5.7). Решение для третьего режима таково:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = m_0\boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = n_0'\mathbf{э}_3 + m_0\boldsymbol{\nu}$$

$$\boldsymbol{\nu} = a_{01}^{(2)}\sin\varphi_2\mathbf{э}_1 + a_{01}^{(2)}\cos\varphi_2\mathbf{э}_2 + a_0^{(2)}\mathbf{э}_3, \quad \varphi_2 = n_0't + \varphi_2^{(0)}$$

6. Четвертый режим движения связки. Пусть тело S_1 совершает полурегулярную прецессию первого типа относительно вертикали, а тело S_2 равномерно вращается относительно $\mathbf{b} = \boldsymbol{\nu}$ В (2.11) необходимо положить

$$\boldsymbol{\omega}_1 = u_1(t)\mathbf{i}_3 + m_0\boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = m_0'\boldsymbol{\nu} \tag{6.1}$$

При этом уравнение (2.13) дает (4.2) и его анализ можно провести так же как в разделе 4. Из уравнения (2.12) получим (очевидно, в (6.1) $m_0' = m_0$)

$$\dot{u}_1(t)A_1\mathbf{i}_3 + u_1(t)m_0[\mathrm{tr}(A_1)(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{i}_3) - 2(A_1\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{i}_3)] + u_1^2(t)(\mathbf{i}_3\times A_1\mathbf{i}_3) +$$

$$+m_0^2(\boldsymbol{\nu}\times A_1\boldsymbol{\nu}) + (\mathbf{i}_3\times\boldsymbol{\nu})(P_2m_0^2a_0^{(1)} - \Gamma_3 - \Gamma_1) + P_1m_0^2a_0^{(2)}(\mathbf{i}_3\times\boldsymbol{\nu}) - P_1m_0^2(\mathbf{i}_3\times\mathbf{э}_3) = 0 \tag{6.2}$$

Для вектора $\boldsymbol{\nu}$ имеем разложение (3.5), где $u_1 = \dot{\varphi}_1$. Из рассуждений раздела 4 следует, что в исследуемом случае $\boldsymbol{\nu}\cdot(\mathbf{э}_3\times\mathbf{i}_3) = 0$

Умножим левую часть (6.2) скалярно на $\mathbf{i}_3$ и $\boldsymbol{\nu}$ соответственно

$$\begin{gathered}\ddot{\varphi}_1(A_1\mathbf{i}_3\cdot\mathbf{i}_3) + m_0^2\mathbf{i}_3\cdot(\boldsymbol{\nu}\times A_1\boldsymbol{\nu}) = 0\\ \ddot{\varphi}_1(A_1\mathbf{i}_3\cdot\boldsymbol{\nu}) - 2\dot{\varphi}_1m_0\boldsymbol{\nu}\cdot(A_1\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{i}_3) + \dot{\varphi}_1^2\boldsymbol{\nu}\cdot(\mathbf{i}_3\times A_1\mathbf{i}_3) = 0\end{gathered} \tag{6.3}$$

Из первого уравнения (6.3) в скалярной форме получим

$$\dot{\varphi}_1^2(t) = \frac{a_{01}^{(1)}m_0^2}{2A_{33}}[a_{01}^{(1)}(A_{22} - A_{11})\cos2\varphi_1 + 2a_{01}^{(1)}A_{12}\sin2\varphi_1 +$$

$$+4A_{23}a_0^{(1)}\cos\varphi_1 + 4A_{13}a_0^{(1)}\sin\varphi_1 + c_*] \tag{6.4}$$

где c_* – произвольная постоянная.

При подстановке (6.4) во второе уравнение из (6.3) найдем условия на параметры

$$A_{12} = A_{23} = 0, \quad A_{13}^2 = A_{33}(A_{11} - A_{22}) \tag{6.5}$$

и зависимость

$$\dot{\varphi}_1 = -\frac{m_0}{A_{33}}(A_{13}a_{01}^{(1)}\sin\varphi_1 + A_{33}a_0^{(1)}) \tag{6.6}$$

Рассмотрение проекции левой части уравнения (6.2) на вектор $\mathbf{i}_3\times\boldsymbol{\nu}$ дает условие

$$A_{22}a_{01}^{(1)}a_0^{(1)^2}m_0^2 + a_{01}^{(1)^2}(P_2m_0^2a_0^{(1)} - \Gamma_3 - \Gamma_1) + P_1m_0^2a_{01}^{(1)^2}a_0^{(2)} -$$

$$-P_1m_0^2[a_0^{(2)} - a_0^{(1)}(\mathbf{i}_3\cdot\mathbf{э}_3)] = 0 \tag{6.7}$$

На основе соотношений (6.5)–(6.7) заключаем, что указанный режим движения связки двух тел S_1 и S_2 возможен только тогда, когда тело S_1 – гироскоп Гесса, $\dot{\varphi}_1$ определяется формулой (6.6), свойства равномерного движения тела S_2 аналогичны тем, которые даны в разделе 6, а параметры тел S_1 и S_2 удовлетворяют условию (6.7). Полученный результат для тела S_1 аналогичен результату для классической задачи одного твердого тела с неподвижной точкой.

7. О динамической невозможности полурегулярной прецессии второго типа. В силу полученной в разделе 6 аналогии с классической задачей одного твердого тела представляет интерес исследование полурегулярных прецессий второго типа. Итак, пусть тело S_1 совершает полурегулярную прецессию второго типа, а тело S_2 равномерно вращается относительно вертикали

$$\boldsymbol{\omega}_1 = n_0\mathbf{i}_3 + \upsilon(t)\boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = m_0'\mathbf{b}, \quad \mathbf{i}_3 \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0^{(1)}, \quad \mathbf{b} = \boldsymbol{\nu} \tag{7.1}$$

Уравнение (2.13) примет вид

$$m_0'^2(\mathbf{b} \times A_2\mathbf{b}) + \mathbf{э}_3 \times [P_1\dot{\upsilon}_1(t)(\mathbf{b} \times \mathbf{i}_3) + P_1\upsilon_1^2(t)a_0^{(1)} - \Gamma_2)\mathbf{b} - P_1\upsilon_1^2(t)\mathbf{i}_3 = 0 \tag{7.2}$$

В теле S_2 введем базис $\mathbf{э}_1^*, \mathbf{э}_2^*, \mathbf{э}_3^* = \mathbf{b}$ так, что

$$\mathbf{э}_3 = \sin\alpha_0\mathbf{э}_1^* + \cos\alpha_0\mathbf{э}_3^*, \quad \mathbf{i}_3 = a_{01}^{(1)}\sin u\mathbf{э}_1^* + a_{01}^{(1)}\cos u\mathbf{э}_2^* + a_0^{(1)}\mathbf{э}_3 \tag{7.3}$$

где u – вспомогательная переменная. Рассмотрим кинематику данного движения. Очевидно

$$\frac{d\mathbf{i}_3}{dt} = \upsilon_1(t)(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{i}_3), \quad \frac{d\mathbf{э}_1^*}{dt} = m_0'\mathbf{э}_2^*, \quad \frac{d\mathbf{э}_2^*}{dt} = -m_0'\mathbf{э}_1^* \tag{7.4}$$

После подстановки (7.3) в первое уравнение из (7.4) имеем

$$\upsilon_1(t) = m_0' - \dot{u} \tag{7.5}$$

В скалярной форме уравнение (7.2) дает равенства

$$\begin{gathered} \sin\alpha_0(\dot{\upsilon}_1(t)\sin u - \upsilon_1^2\cos u) = 0 \\ m_0'^2 B_{23}^* + P_1 a_0^{(1)}\cos\alpha_0(\dot{\upsilon}_1(t)\sin u - \upsilon_1^2(t)\cos u) = 0 \\ m_0'^2 B_{13}^* - P_1 a_0^{(1)}\cos\alpha_0(\dot{\upsilon}_1\cos u - \upsilon_1^2\sin u) + \Gamma_2\sin\alpha_0 = 0 \end{gathered} \tag{7.6}$$

Если в (7.6) $\sin\alpha_0 = 0$, то из этих соотношений получим

$$\begin{gathered} m_0'^2(B_{13}^*\sin u + B_{23}^*\cos u) - P_1 a_{01}^{(1)}\dot{\upsilon}_1(t) = 0 \\ m_0''^2(B_{23}^*\sin u - B_{13}^*\cos u) + P_1 a_{01}^{(1)}\dot{\upsilon}_1(t) = 0 \end{gathered} \tag{7.7}$$

Когда u = const, из (7.3) следует, что $\upsilon_2(t) = m_0'$, т.е. прецессия тела S_1 не может быть полурегулярной. Дифференцируя первое соотношение из (7.7) в силу второго, найдем

$$(B_{13}^*\cos u + B_{23}^*\sin u)(\dot{u} - 2\upsilon_1(t)) = 0$$

Случай $B_{13}^* = B_{23}^* = 0$ невозможен в силу (7.7). Поэтому $\dot{u} = 2\upsilon_1(t)$ и из (7.5) получим, что возможна только регулярная прецессия тела S_1. Таким образом, в системе (7.6) $\sin\alpha_0 \neq 0$, $B_{23}^* = 0$ и

$$\dot{\upsilon}_1(t)\sin u - \upsilon_1^2(t)\cos u = 0, \quad \upsilon_1^2(t) = \kappa_0\sin u \tag{7.8}$$

где

$$\kappa_0 = (m_0'^2 B_{13}^* + \Gamma_2\sin\alpha_0) / P_1 a_{01}^{(1)}\cos\alpha_0 \tag{7.9}$$

Считаем, что $\cos\alpha_0 \neq 0$. В этом случае из второго уравнения (7.8), которое представим в виде $2\dot{\upsilon}_1(t)\upsilon_1(t)=\kappa_0\dot{u}\cos u$, а также из первого уравнения системы (7.8) и уравнения (7.5) вытекает, что $\dot{u}=\frac{2}{3}m_0'$, т.е. u – постоянная. Значит, необходимо в (7.6) положить $\cos\alpha_0 = 0$. Итак, система (7.6) дает равенства

$$B_{23}^* = 0, \quad B_{13}^* = -\frac{\Gamma_2}{m_0'}, \quad \dot{\upsilon}_1(t)\sin u - \upsilon_1^2(t)\cos u = 0 \tag{7.10}$$

При полученных условиях в силу (3.5) интегралы (2.10) преобразуем к виду:

$$\begin{gathered}\upsilon_1^2(t)(a_2\sin 2\varphi_1 + a_2'\cos 2\varphi_1 + 2a_1\sin\varphi_1 + 2a_1'\cos\varphi_1 + a_0)+\\ +2\upsilon_1(t)[P_1 m_0' a_{01}^{(1)}\sin u + n_0(b_1\sin\varphi_1 + b_1'\cos\varphi_1 + b_0)] = 2E^*\\ \upsilon_1(t)[(a_2\sin 2\varphi_1 + a_2'\cos 2\varphi_1 + a_1\sin\varphi_1 + a_1'\cos\varphi_1 + a_0^*)+\\ +P_1 a_{01}^{(1)}\sin u] + P_1 m_0' a_{01}^{(1)}\sin u + n_0(b_1\sin\varphi_1 + b_1'\cos\varphi_1 + b_0) = k^*\end{gathered} \tag{7.11}$$

где E^*, k^* – новые постоянные и

$$a_2 = A_{12}a_{01}^{(1)^2}, \quad a_2' = \tfrac{1}{2}(A_{22}-A_{11})a_{01}^{(1)^2}, \quad a_1 = A_{13}a_0^{(1)}a_{01}^{(1)}$$

$$a_1' = A_{23}a_0^{(1)}a_{01}^{(1)}, \quad a_0^* = A_{33}a_0^{(1)^2} + \tfrac{1}{2}(A_{11}+A_{22})a_{01}^{(1)^2}$$

$$a_0 = a_0^* + m_2 s^2 a_{01}^{(1)^2}, \quad b_1 = A_{13}a_{01}^{(1)}, \quad b_1' = A_{23}a_{01}^{(1)}, \quad b_0 = A_{33}a_0^{(1)}$$

При условиях (3.5), (7.1) проекция левой части уравнения (2.12) на вектор $\mathbf{i}_3$ дает

$$\dot{\upsilon}_1(t)(b_1\sin\varphi_1 + b_1'\cos\varphi_1 + b_0) = \upsilon_1^2(t)(a_2\cos 2\varphi_1 - a_2'\sin 2\varphi_1 + a_1\cos\varphi_1 - a_1'\sin\varphi_1) \tag{7.12}$$

где $\varphi_1 = n_0 t + \varphi_1^{(0)}$.

Подставим (7.5) в последнее уравнение из (7.10) и сделаем замену $z = \operatorname{ctg} u$ в полученном уравнении. Тогда

$$\ddot{z}(1+z^2) - \dot{z}^2 z + 2m_0' z\dot{z}(1+z^2) + m_0'^2(1+z^2)^2 = 0 \tag{7.13}$$

Сопоставляя (7.10) и (7.12), имеем

$$z(t) = P_2(\varphi_1)/P_1(\varphi_1) \tag{7.14}$$

$$P_2(\varphi_1) = a_2\cos 2\varphi_1 - a_2'\sin 2\varphi_1 + a_1\cos\varphi_1 - a_1'\sin\varphi_1$$

$$P_1(\varphi_1) = b_1\sin\varphi_1 + b_1'\cos\varphi_1 + b_0$$

Подставим (7.14) в уравнение (7.13) и потребуем, чтобы полученное уравнение было тождеством по φ_1. Особый случай, возникающий на этом пути, характеризуется условиями $A_{12} = A_{13} = A_{23} = 0$, $A_{11} = A_{22}$, $a_0^{(1)} = 0$, которые на основании интегралов (7.11) дают регулярную прецессию. Исключая его из рассмотрения, в результате указанной подстановки получим $a_2 = 0$, $a_2' = 0$, $b_1 = 0$, $b_1' = 0$, $a_1 = 0$, $a_1' = 0$. Но это значит, что прецессия тела S_1 становится регулярной. Итак, доказано, что режим 5, для которого первое тело совершает полурегулярную прецессию второго типа, а тело S_2 равномерно вращается относительно вертикали, невозможен.

Отметим, что режим, для которого тело S_1 равномерно вращается относительно вертикали, а тело S_2 совершает полурегулярную прецессию также динамически невозможен.

8. Случай регулярной прецессии. Было установлено [1], что гироскопы Лагранжа в связке n тел допускают регулярную прецессию. Однако исследование проведено с начальным предположением, что все тела в связке являются гироскопами Лагранжа.

Здесь не будем следовать этому предположению и рассмотрим регулярную прецессию двух тел S_1, S_2 в общем случае.

Пусть $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ – базис в теле S_1, $\mathbf{э}_1$, $\mathbf{э}_2$, $\mathbf{э}_3$ – базис в теле S_2. Кроме того, положим

$$\mathbf{i}_3 = \beta_{31}\mathbf{э}_1 + \beta_{32}\mathbf{э}_2 + \beta_{33}\mathbf{э}_3 \tag{8.1}$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 = n_0\mathbf{i}_3 + m_0\boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = n_0'\mathbf{э}_3 + m_0'\boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{i}_3\cdot\boldsymbol{\nu} = a_0^{(1)}, \quad \mathbf{э}_3\cdot\boldsymbol{\nu} = a_0^{(2)} \tag{8.2}$$

Из системы (2.12), (2.13) на основе (8.1), (8.2) и при условии, что

$$\boldsymbol{\nu} = a_{01}^{(1)}\sin\varphi_1\mathbf{i}_1 + a_{01}^{(1)}\cos\varphi_1\mathbf{i}_2 + a_0^{(1)}\mathbf{i}_3$$

$$\boldsymbol{\nu} = a_{01}^{(2)}\sin\varphi_2\mathbf{э}_1 + a_{01}^{(2)}\cos\varphi_2\mathbf{э}_2 + a_0^{(2)}\mathbf{э}_3$$

для тела S_1

$$\begin{gathered}A_{12}=0, \quad A_{11}=A_{22}, \quad A_{13}a_0^{(1)}=0, \quad A_{23}a_0^{(1)}=0\\ n_0^2(c_1\cos\varphi_1 - c_1'\sin\varphi_1) + P_1 a_{01}^{(2)} m_0^2\sin u\sin(\varphi_2-\upsilon)=0\\ m_0 n_0 a_0^* + n_0^2(c_1\sin\varphi_1 + c_1'\cos\varphi_1) + m_0^2(g_1\sin\varphi_1 + g_1'\cos\varphi_1 + g_0) + P_2 a_0^{(1)} a_{01}^{(1)} m_0^2 -\\ -P_1 a_0^{(2)} a_{01}^{(1)^2} m_0'^2 - \Gamma_1 a_{02}^{(1)^2} + P_1 a_0^{(1)} m_0'^2\beta_{33} = 0\end{gathered} \tag{8.3}$$

для тела S_2

$$\begin{gathered}B_{12}=0, \quad B_{11}=B_{22}, \quad B_{13}a_0^{(2)}=0, \quad B_{23}a_0^{(2)}=0\\ n_0'^2(d_1\cos\varphi_2 - d_1'\sin\varphi_2) - P_1 m_0^2 a_{01}^{(2)}\sin u\sin(\varphi_2-\upsilon)=0\\ m_0'^2 a_{01}^{(1)^2}[a_0^{(1)}(B_{11}-B_{33}) - B_{13}a_{01}^{(2)}\sin\varphi_2 - B_{23}a_{01}^{(2)}\cos\varphi_2] +\\ +m_0'n_0'b_0^* + n_0'^2(d_1\sin\varphi_2 + d_1'\cos\varphi_2) + a_{01}^{(1)^2}(P_2 a_0^{(1)} m_0 - \Gamma_3) - P_1 m_0^2(a_0^{(1)} - \beta_{33}a_0^{(2)}) = 0\end{gathered} \tag{8.4}$$

Здесь

$$g_0 = \tfrac{1}{2}a_0^{(1)}a_{01}^{(1)^2}(A_{11}+A_{22}-2A_{33}), \quad b_0^* = B_{33}a_0^{(1)^2} + \tfrac{1}{2}(B_{11}+B_{22})a_{01}^{(1)^2},$$

$$c_1 = A_{13}a_{01}^{(1)}, \quad c_1' = A_{23}a_{01}^{(1)}, \quad g_1 = -a_{01}^{(1)^3}A_{13}, \quad g_1' = -a_{01}^{(1)^3}A_{23}, \quad d_1 = B_{13}a_{01}^{(2)},$$

$$d_1' = B_{23}a_{01}^{(1)}, \quad \beta_{31} = \sin u\sin\upsilon, \quad \beta_{32} = \sin u\cos\upsilon, \quad \beta_{33} = \cos u$$

(u, υ – новые переменные). Если предположить, что $a_0^{(1)} = a_0^{(2)} = 0$, то очевидно, $\sin u$ = = 0, и поэтому $A_{13} = A_{23} = 0$ и $B_{13} = B_{23} = 0$. Когда $a_0^{(1)} = 0$, $a_0^{(2)} = 0$, из (8.3), (8.4) следует, что $B_{13} = B_{23} = 0$, т.е. sin и $\sin(\varphi_2 - \upsilon) = 0$. А это значит, что и $A_{13} = A_{23} = 0$. К аналогичному выводу приходим и в случае $a_0^{(1)} \neq 0$, $a_0^{(2)} = 0$. Таким образом, в любом случае оба тела представляют собой гироскоп Лагранжа. При этом переменная u становится постоянной, и легко из (8.3), (8.4) получить окончательные условия существования регулярных прецессий. Этот результат дополняет исследования П.В. Харламова [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1972. Вып. 4. С. 52–73.
2. *Горр Г.В., Рубановский В.Н.* Об одном классе движения системы тяжелых шарнирно связанных твердых тел // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 5. С. 707–712.
3. *Горр Г.В., Бирман И.Е.* О прецессионных движениях связки двух твердых тел в поле силы тяжести // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1992. Вып. 24. С. 56–61.

Донецк

Поступила в редакцию 2.III.1994