

УДК 629.7.087.22

© 1995 г. Ф.Л. Черноусько

ДИНАМИКА СВЕРТЫВАНИЯ КОСМИЧЕСКОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ

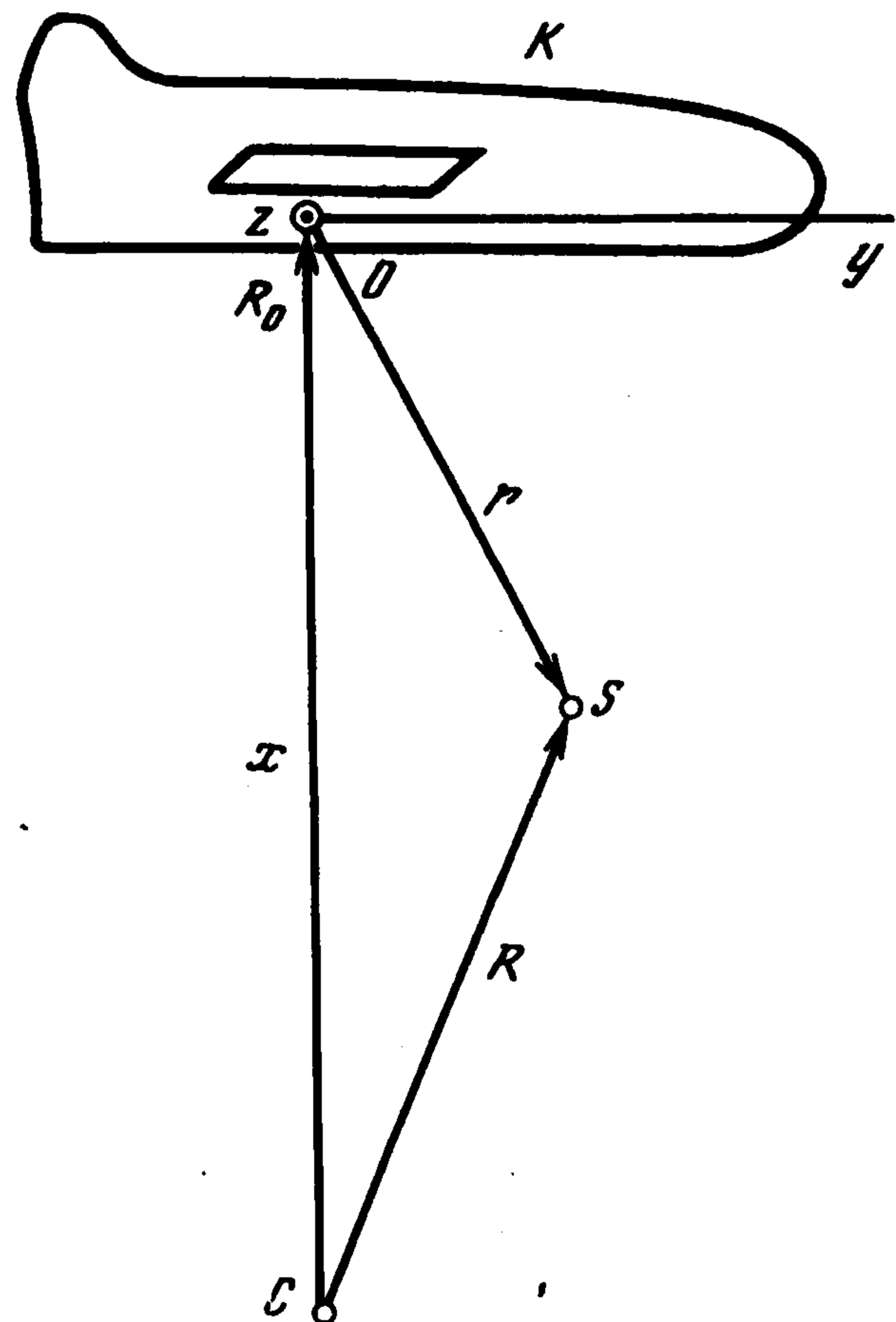
На простой нелинейной модели исследуются движения тросовой системы в процессе свертывания. Найдено единственное движение системы при постоянной скорости намотки троса, при котором угол отклонения троса обращается в нуль в конце свертывания. Предлагается способ управления процессом свертывания, позволяющий избежать нарастания амплитуды колебаний.

Вопросы динамики космических тросовых систем в последние годы привлекают внимание исследователей в связи с возможным использованием этих систем в различных приложениях [1, 2]. При этом существенной проблемой представляется построение рационального управления процессом свертывания троса, так как при свертывании могут развиваться колебания троса с нарастающей амплитудой.

1. Уравнения движения. Рассмотрим движение спутника – зонда S массы m , соединенного тросом с космическим кораблем K , движущимся по круговой орбите радиуса R_0 вокруг Земли (фиг. 1). Предполагаем, что масса корабля K значительно больше массы спутника, а положение и ориентация корабля жестко стабилизированы в орбитальной системе координат. Трос предполагается абсолютно гибким и нерастяжимым, его масса много меньше массы спутника m . Линейные размеры спутника малы по сравнению с длиной троса, так что спутник можно рассматривать как точечную массу m . Ограничимся рассмотрением плоских движений троса со спутником в плоскости круговой орбиты корабля K .

Введем правую декартову систему координат $Oxuz$, жестко связанную с кораблем K . Ее начало O поместим в точке корабля, из которой исходит трос. Ось x направим по местной вертикали к центру Земли C , ось y – вдоль вектора скорости корабля, а ось z – по нормали к плоскости орбиты (фиг. 1). Обозначим через R_0 и R радиусы-векторы точек O и S относительно центра Земли C . Тогда вектор $r = R - R_0$, направленный вдоль троса OS , представляет собой радиус-вектор спутника S в системе координат $Oxuz$.

Обозначим через θ угол между вектором r и осью x . Тогда вектор r , скорость $v = r'$ и уско-



Фиг. 1

рение $w = \dot{v} = \ddot{r}$ спутника S в системе координат $Oxyz$ имеют следующие компоненты:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (r \cos \theta, r \sin \theta, 0) \\ \mathbf{v} &= (r' \cos \theta - r \theta' \sin \theta, r' \sin \theta + r \theta' \cos \theta, 0) \\ \mathbf{w} &= (r'' \cos \theta - 2r' \theta' \sin \theta - r \theta'' \sin \theta - r(\theta')^2 \cos \theta \\ &\quad r'' \sin \theta + 2r' \theta' \cos \theta + r \theta'' \cos \theta - r(\theta')^2 \sin \theta, 0) \end{aligned} \quad (1.1)$$

На спутник S в системе координат $Oxyz$ действуют следующие силы: сила натяжения троса T , сила тяготения F_1 , а также силы инерции – центробежная сила F_2 и кориолисова сила F_3 . Последние три силы определяются соотношениями

$$\mathbf{F}_1 = -m\Omega^2 R_0^3 R^{-3} \mathbf{R}, \quad \mathbf{F}_2 = m\Omega^2 \mathbf{R}, \quad \mathbf{F}_3 = -2m\Omega(\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \quad (1.2)$$

Здесь Ω – угловая скорость обращения корабля K по орбите, \mathbf{n} – единичная нормаль к плоскости орбиты, направленная по оси z .

Упростим выражения (1.2), для чего подставим в них равенство $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}$ и примем во внимание, что длина троса мала по сравнению с радиусом орбиты: $r \ll R_0$. Учитывая, что в системе координат $Oxyz$ имеем $\mathbf{R}_0 = (-R_0, 0, 0)$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 &= m\Omega^2 \mathbf{R} [1 - R_0^{-3} (R_0^2 + 2\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{r} + r^2)^{-3/2}] = \\ &= 3m\Omega^2 R_0^{-2} (\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{R}_0 = (3m\Omega^2 r \cos \theta, 0, 0) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Выражение (1.2) для силы \mathbf{F}_3 преобразуем, подставляя в него компоненты вектора \mathbf{v} из (1.1)

$$\mathbf{F}_3 = 2m\Omega(r' \sin \theta + r \theta' \cos \theta, -r' \cos \theta + r \theta' \sin \theta, 0) \quad (1.4)$$

Составим уравнения движения спутника S в системе координат $Oxyz$. Первое уравнение получим, применяя теорему об изменении момента количества движения спутника S относительно полюса O

$$m(r^2 \theta')' = [\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3)] \cdot \mathbf{n}$$

Подставим в полученное уравнение соотношения (1.3), (1.4), а также компоненты векторов \mathbf{r} из (1.1) и $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ и введем безразмерное время – истинную аномалию – соотношением $v = \Omega t$. Переходя к новой независимой переменной v , получим после упрощений

$$\frac{d^2 \theta}{dv^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{dv} \left(\frac{d\theta}{dv} + 1 \right) + 3 \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (1.5)$$

Для получения второго уравнения спроектируем векторное уравнение движения спутника S в системе координат $Oxyz$ на направление вектора \mathbf{r}

$$m\mathbf{w} \cdot \mathbf{e} = (T + F_1 + F_2 + F_3) \cdot \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad (1.6)$$

Сила натяжения троса T , приложенная к спутнику, направлена против орта \mathbf{e} : $T = -T\mathbf{e}$. Подставляя в уравнение (1.6) соотношения (1.1) для \mathbf{w} , а также (1.3) и (1.4), получим

$$T = m\Omega^2 r \Phi, \quad \Phi = 3 \cos^2 \theta + 2\theta'_v + (\theta'_v)^2 - r^{-1} r''_{vv} \quad (1.7)$$

Для того чтобы трос был постоянно в натянутом состоянии, что предполагается в данной работе, необходимо и достаточно, чтобы $T \geq 0$, или $\Phi \geq 0$.

Соотношения (1.5), (1.7), а также уравнения динамики космической тросовой системы в более общем случае получены в [1].

2. Процесс свертывания троса. При свертывании троса ($dr/dv \leq 0$), как показывают качественные исследования и численные расчеты, амплитуда колебаний, как правило, быстро нарастает, что связано с особенностью уравнения (1.5) при $r \rightarrow 0$. Возможен даже переход колебательных движений по углу θ во вращательные. Движения такого рода, конечно, недопустимы, и поэтому возникает задача управления процессом свертывания, при котором угол отклонения троса θ остается ограниченным при $r \rightarrow 0$.

Возможны различные способы управления процессом свертывания: 1) на спутнике S могут быть установлены небольшие двигатели, которые могут создавать реактивные силы, перпендикулярные тросу; за счет этих сил можно парировать большие отклонения троса от вертикали; 2) точка подвеса троса O может совершать движения относительно корпуса космического корабля K ; за счет выбора этих движений можно гасить колебания троса; 3) сам корабль может совершать небольшие движения относительно выбранной круговой орбиты; этот способ, с точки зрения динамики системы, близок предыдущему; 4) можно управлять силой натяжения троса в процессе его свертывания; этот способ исследовался в [2], где рассмотрена линеаризованная постановка задачи.

В данной работе рассматривается возможность управления процессом свертывания при помощи выбора закона изменения длины троса $r(v)$. Другими словами, предлагается закон наматывания троса, при котором угол θ отклонения троса от вертикали остается ограниченным или стремится к нулю при $r \rightarrow 0$. При этом скорость намотки $u = -r'$ в процессе свертывания будет принимать одно из двух постоянных значений $u = 0$ и $u_0 > 0$. Таким образом, в каждый момент времени трос либо сохраняет постоянную длину, либо свертывается с постоянной скоростью u_0 . Такой характер работы наматывающего устройства достаточно прост и удобен для практической реализации.

Для того чтобы построить искомый режим свертывания, предварительно рассмотрим отдельно пассивные участки, на которых длина троса постоянна и свертывания вообще не происходит ($u = 0, r = \text{const}$), и активные участки с постоянной скоростью намотки ($dr/dt = -u_0 < 0$).

3. Случай постоянной длины троса. При постоянной длине троса ($r = \text{const}$) уравнение (1.5) приводится к уравнению маятника

$$d^2(2\theta)/dv^2 + 3\sin 2\theta = 0 \quad (3.1)$$

которое интегрируется в эллиптических функциях. Уравнение (3.1) имеет первый интеграл (интеграл энергии)

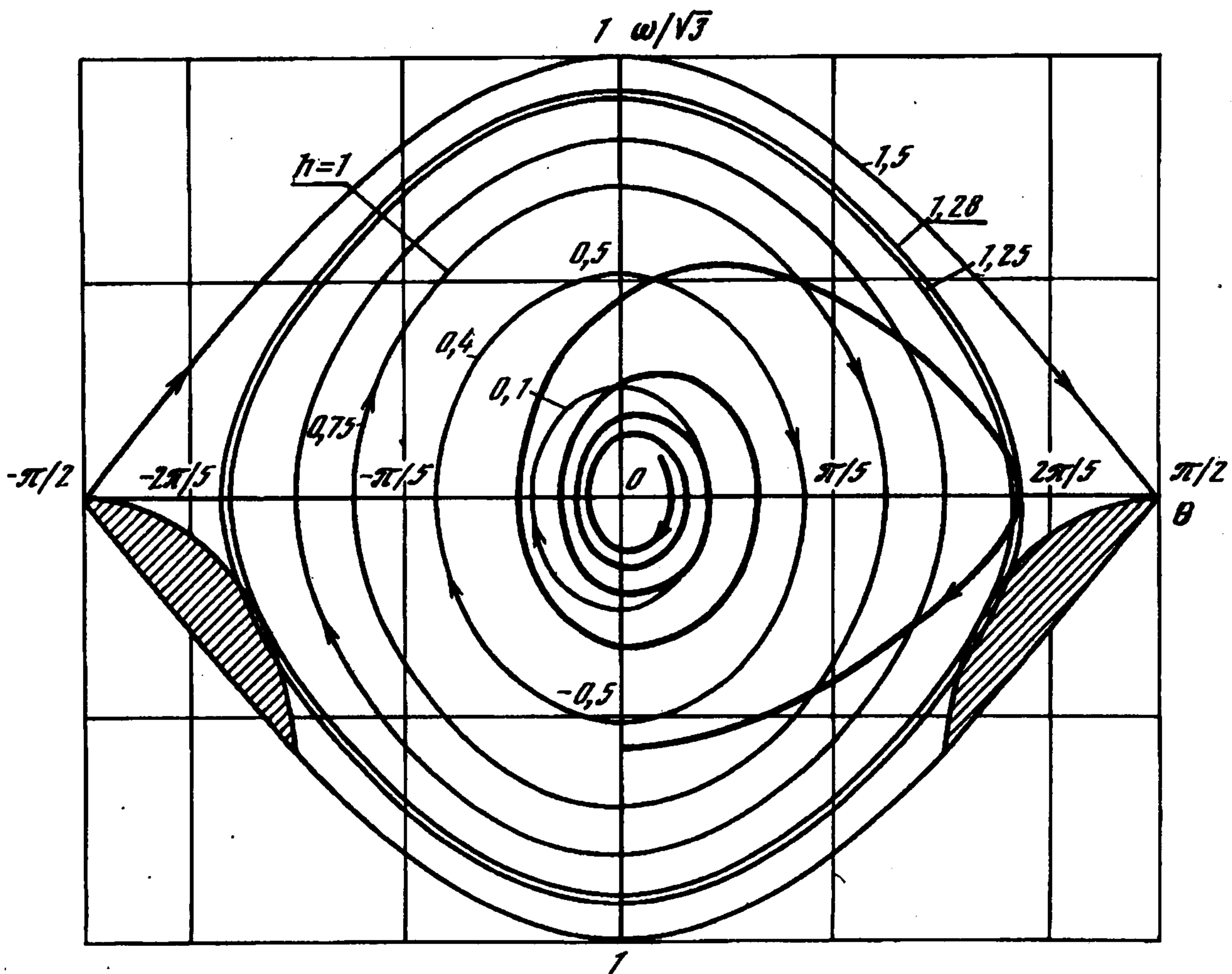
$$\omega^2/2 + 3/4(1 - \cos 2\theta) = h, \quad \omega = d\theta/dv \quad (3.2)$$

Здесь ω – безразмерная угловая скорость колебаний троса, $h \geq 0$ – постоянная энергия. Значение $h = 0$ отвечает устойчивым состояниям равновесия $\theta = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \dots$), $\omega = 0$, значения $h \in (0, 3/2)$ – колебания троса, а $h > 3/2$ – вращениям троса вокруг точки подвеса.

Не нарушая общности, будем для определенности рассматривать приведение системы в устойчивое состояние $\theta = 0, \omega = 0$. При $h = 3/2$ имеем апериодические движения по сепаратрисам в фазовой плоскости, проходящим через особые точки типа седла (неустойчивые положения равновесия $\theta = \pm\pi/2$). Для апериодических движений имеем в силу (3.2)

$$\omega = \pm 3^{1/2} \cos \theta \quad (3.3)$$

Фазовые траектории колебательных и апериодических движений при постоянной длине троса изображены на фиг. 2 тонкими линиями. Стрелки указывают направление движения. Область колебаний ограничена двумя фазовыми траекториями апериодических движений (3.3). Вне этой области имеют место вращательные движения.



Фиг. 2

Величина Φ из (1.7) для движений с постоянной длиной троса ($r = \text{const}$) равна

$$\Phi = 3\cos^2\theta + 2\omega + \omega^2 \quad (3.4)$$

В области, где $\Phi \geq 0$, трос остается натянутым, а в области, где $\Phi < 0$, происходит его ослабление, и имеет место сход с неудерживающей связи, осуществляемой тросом. Области $\Phi < 0$ заштрихованы на фиг. 2. Вычисляя условный минимум величины h из (3.2) при условии $\Phi = 0$, найдем координаты точек, в которых он достигается, и величину минимума

$$\theta = \pm\pi/3, \quad \omega = -1/2, \quad h = 5/4 \quad (3.5)$$

В точках (3.5) кривая $\Phi = 0$ касается фазовой траектории нелинейных колебаний, отвечающей значению $h = 1,25$. При $h \leq 1,25$ сход со связи не имеет места, и трос остается натянутым [1].

4. Колебания при постоянной скорости намотки. При постоянной скорости намотки длина троса изменяется линейно по времени

$$r = r_0 - u_0 t = r_0 - u_0 \Omega^{-1} v \quad (v = \Omega t) \quad (4.1)$$

Здесь r_0 – начальная длина троса в момент $t = 0$, $u_0 \geq 0$ – постоянная скорость намотки.

Выберем начало отсчета безразмерного времени τ так, чтобы длина троса в момент $\tau = 0$ обращалась в нуль. Для этого положим

$$r_0 = -u_0 \Omega^{-1} \tau, \quad \tau = -\Omega u_0^{-1} r = v - r_0 u_0^{-1} \Omega \quad (4.2)$$

где τ – новое безразмерное время, с точностью до знака совпадающее с безразмерной длиной троса. Подставляя соотношения (4.2) в уравнение (1.5), получим

$$\theta''_{\tau\tau} + 2\tau^{-1}(\theta'_{\tau} + 1) + \frac{3}{2}\sin 2\theta = 0 \quad (4.3)$$

Аргумент τ в (4.3) принимает только неположительные значения: $\tau \leq 0$. Отметим, что при постоянной скорости свертывания, как и при постоянной длине троса, имеем $r''_{vv} = 0$, и величина Φ из (1,7) снова приводится к виду (3.4). Поэтому области фазовой плоскости, в которых $\Phi < 0$ и имеет место сход со связи, по-прежнему задаются заштрихованными областями фиг. 2 (см. разд. 3).

5. Малые колебания троса. Рассмотрим сначала случай малых колебаний $|\theta| \leq 1$ при постоянной скорости намотки. В этом случае уравнение (4.3) можно линеаризовать, заменяя последнее слагаемое в левой части на 3θ .

Общее решение линеаризованного уравнения имеет вид [1]

$$\theta = \tau^{-1} [A \cos(\sqrt{3}\tau) + B \sin(\sqrt{3}\tau) - \frac{2}{3}] \quad (5.1)$$

где A, B – произвольные постоянные.

Найдем его частное решение, удовлетворяющее условию гашения колебаний в конце процесса свертывания троса ($\theta \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow -0$). Искомое решение имеет вид

$$\theta = \frac{2}{3} \tau^{-1} [\cos(\sqrt{3}\tau) - 1] \quad (5.2)$$

Абсолютная величина решения (5.2) достигает при $\tau = -1,34$ своего максимума, равного 0,841. При таком размахе колебаний использование линеаризованного подхода, основанного на допущении $|\theta| \ll 1$, нельзя признать корректным.

6. Нелинейные колебания троса. Обратимся к нелинейному уравнению (4.3) и найдем его частное решение, удовлетворяющее условиям

$$\theta \rightarrow 0, \quad \theta'_\tau \rightarrow \text{const} \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow -0 \quad (6.1)$$

Таким образом, требуется, чтобы угол отклонения троса в конце процесса свертывания обращался в нуль, а угловая скорость оставалась конечной. Искомое решение при малых τ ищем в виде разложения

$$\theta^*(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i \tau^i \quad (6.2)$$

где θ_i – неопределенные коэффициенты. Заметим, что искомое решение является нечетной функцией τ , так что все коэффициенты с четными номерами равны нулю. Подставляя разложение (6.2) в уравнение (4.3) и приравнявая нулю коэффициенты при последовательных степенях аргумента τ , найдем

$$\theta^*(\tau) = -\tau + \tau^3/4 - 11\tau^5/120 + O(\tau^7) \quad (6.3)$$

Дифференцируя (6.3), получим разложение для угловой скорости $\omega = d\theta/d\tau$

$$\omega^*(\tau) = -1 + 3\tau^2/4 - 11\tau^4/24 + O(\tau^6) \quad (6.4)$$

Исключим τ из разложений (6.3), (6.4). Для этого будем искать зависимость $\omega = \omega(\theta)$ в виде степенного разложения с неопределенными коэффициентами, которые определим, подставляя в указанное разложение представления (6.3), (6.4) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях τ . В результате получим

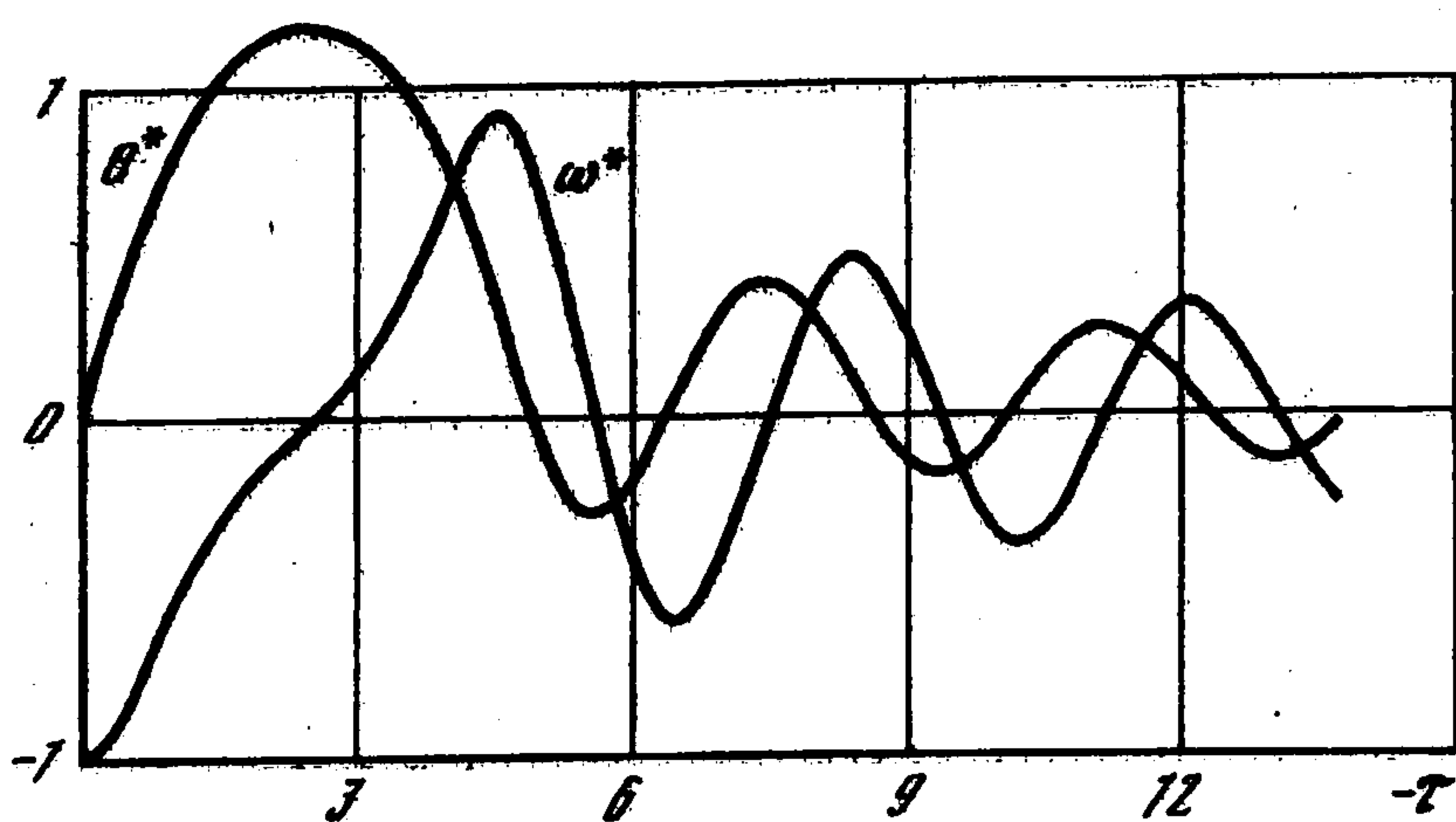
$$\omega = -1 + 3\theta^2/4 - \theta^4/12 + O(\theta^6) \quad (6.5)$$

Соотношения (6.3), (6.4) определяют искомое решение при $\tau \rightarrow -0$, т.е. в конце процесса свертывания троса. Равенство (6.5) задает соответствующий участок фазовой траектории.

Найдем еще разложения для выражений h и Φ . Подставляя соотношения (6.3), (6.4) в (3.2) и (3.4), получим

$$h^*(\tau) = \omega^2/2 + 3(1 - \cos 2\theta)/4 = \frac{1}{2} + 3\tau^2/4 - 49\tau^4/96 + O(\tau^6) \quad (6.6)$$

$$\Phi^*(\tau) = 3\cos^2 \theta + 2\omega + \omega^2 = 2 - 3\tau^2 + 49\tau^4/16 + O(\tau^6)$$



Фиг. 3

Искомое решение $\theta^*(\tau)$ нелинейного уравнения (4.3), удовлетворяющее условиям (6.1), было построено численно. Интегрирование проводилось в обратном времени, причем разложения (6.3), (6.4) использовались для задания начальных данных при малых отрицательных τ . Зависимости $\theta^*(\tau)$ и $\omega^*(\tau)$, полученные в результате численного интегрирования, представлены на фиг. 3. Они являются ограниченными функциями при всех $\tau \leq 0$, причем $\theta^* \rightarrow 0$ и $\omega^* \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow -\infty$. Фазовая

траектория $\omega(\theta)$ для построенного решения изображена жирной линией на фиг. 2. Эта траектория целиком лежит в области колебательных движений $h < 1,5$. На ней выполнено строгое неравенство $\Phi > 0$ при всех $\tau \leq 0$, так что натяжение троса нигде не обращается в нуль. Это видно также из фиг. 2: фазовая траектория найденного решения лежит вне заштрихованных областей, в которых $\Phi < 0$. Зависимость $h = h^*(\tau)$ для построенного решения $\theta^*(\tau)$, вычисленная при помощи (3.2), изображена на фиг. 4 жирной линией.

Построенное решение $\theta^*(\tau)$ существенно отличается от решения (5.2) линеаризованного уравнения. Так, угол отклонения троса в решении $\theta^*(\tau)$ достигает при $\tau = 2,5$ величины $\theta = 1,167$, что лежит за пределами применимости линейного приближения.

Отметим, что вместо условий (6.1) можно наложить более общие условия

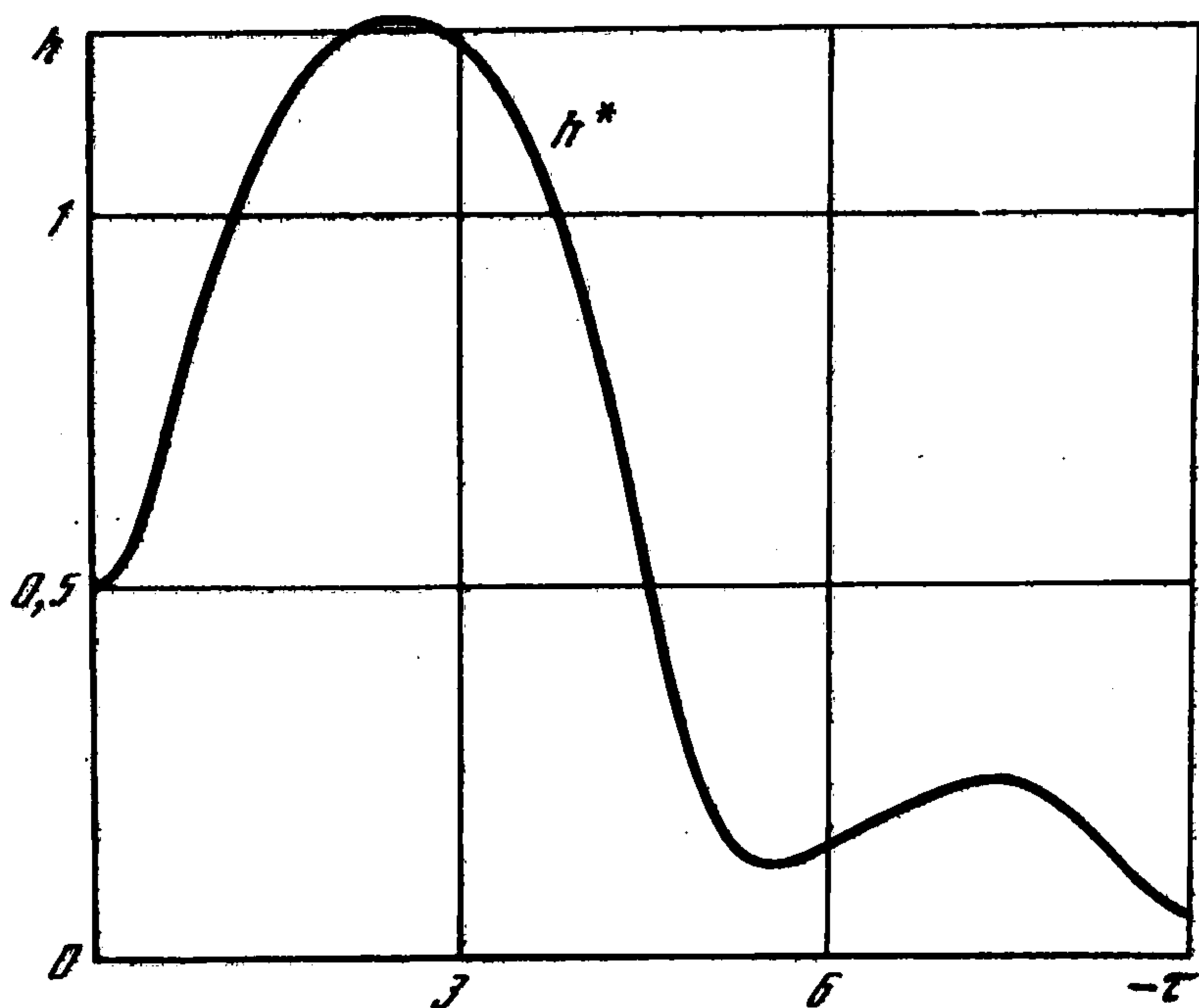
$$\theta \rightarrow \delta, \quad \theta'_\tau \rightarrow \text{const} \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow -0 \quad (6.7)$$

где δ — заданная постоянная. Решение уравнения (4.3), удовлетворяющее условиям (6.7), можно снова искать в виде разложения, аналогичного (6.2)

$$\theta_\delta(\tau) = \delta + \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i \tau^i \quad (6.8)$$

Неопределенные коэффициенты θ_i в (6.8) находим аналогично коэффициентам для решения (6.2). Приведем несколько первых коэффициентов разложения (6.8)

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -1, & \theta_2 &= -1/4 \sin 2\delta, & \theta_3 &= 1/4 \cos 2\delta, \\ \theta_4 &= 3 \sin 2\delta (4 + \cos 2\delta) / 80, & \theta_5 &= (6 - 8 \cos 2\delta - 9 \cos^2 2\delta) / 120 \end{aligned} \quad (6.9)$$



Фиг. 4

Отметим, что при $\delta = 0$ коэффициенты (6.9) превращаются в соответствующие коэффициенты разложения (6.3). Решение, удовлетворяющее условиям (6.9), можно рассматривать аналогично тому, как рассматривается решение $\theta^*(\tau)$.

Отметим, что решение $\theta^*(\tau)$ обладает следующим свойством: функция $h^*(\tau)$, соответствующая этому решению, минимальна при $\tau \rightarrow -0$ среди всех $h(\tau)$, отвечающих всевозможным решениям уравнения (4.3).

В самом деле, для решений уравнения (4.3), не ограниченных при $\tau \rightarrow -0$, имеем $\omega \rightarrow \infty$, $h \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow -0$. Для ограниченных при $\tau \rightarrow -0$ решений имеем, в силу (6.7), (6.8) и (3.2)

$$\omega \rightarrow -1, \quad \theta \rightarrow \delta, \quad h \rightarrow 1/2 + 3(1 - \cos 2\delta)/4 \quad \text{при } \tau \rightarrow -0 \quad (6.10)$$

Сопоставляя соотношения (6.6) и (6.10), получим $h \geq h^*$ при $\tau \rightarrow -0$, что и требовалось доказать.

7. Управление процессом свертывания. Пусть в начальный момент заданы начальные условия

$$t = 0, \quad r = r_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}_0$$

Переходя к истинной аномалии $v = \Omega t$ и используя обозначение $\omega = \dot{\theta}_v$, из (3.2), получим

$$v = 0, \quad r = r_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \omega = \omega_0 = \dot{\theta}_0 \Omega^{-1} \quad (7.1)$$

Предполагаем, что фазовое состояние (θ_0, ω_0) лежит внутри области замкнутых траекторий на фазовой плоскости (θ, ω) (фиг. 2).

Используя решения из разд. 6, можно предложить некоторые способы управления свертыванием троса. В основе этих способов лежит переход с начального состояния (7.1) на одно из решений из разд. 6, соответствующих ограниченному колебанию. Рассмотрим два возможных способа.

1⁰. Начиная с момента $v = 0$, будем наматывать трос с постоянной скоростью u_0 , которая выбирается из условия, чтобы решение сошлось с частным решением $\theta_\delta(\tau)$ из (6.8). Начальные условия (7.1) можно переписать в виде

$$\theta(\tau_0) = \theta_0, \quad \omega(\tau_0) = \omega_0 \quad (7.2)$$

Здесь τ_0 – начальное значение переменной τ , которое согласно (4.2) выражается через скорость намотки u_0

$$\tau_0 = -r_0 u_0^{-1} \Omega \quad (7.3)$$

Для определения двух неизвестных параметров – параметра δ решения $\theta_\delta(\tau)$ из (6.8) и параметра τ_0 – имеем два условия (7.2). Другими словами, искомое решение $\theta_\delta(\tau)$ должно определиться из двухточечной краевой задачи для уравнения (4.3). На одном из концов интервала (в особой точке $\tau = 0$) заданы условия (6.7), выделяющие однопараметрическое решение (6.8) с параметром δ , а на другом конце, при нефиксированном значении аргумента $\tau = \tau_0 < 0$, заданы два условия (7.2). После решения этой задачи и определения параметров δ, τ_0 находим скорость намотки из (7.3): $u_0 = -r_0 \Omega \tau_0^{-1} > 0$. Полное время свертывания равно $T = -\Omega^{-1} \tau_0 = r_0 u_0^{-1}$.

Предложенный способ управления будет приемлем, если скорость намотки u_0 из (7.3) лежит в допустимых пределах и на решении $\theta = \theta_\delta(\tau)$ выполняется условие сохранения натяжения троса $\Phi \geq 0$. Эти вопросы, как и вопросы существования и единственности решения задачи, требуют дополнительного рассмотрения.

2⁰. Процесс свертывания осуществим в два этапа. На первом этапе трос сохраняет постоянную длину: $r = r_0$ при $v \in [0, v^*]$. Движение системы при этом происходит по одной из замкнутых фазовых траекторий, отвечающих $r = \text{const}$ и изображенных на фиг. 2. В некоторый момент времени $v = v^*$ данная фазовая траектория, начинающаяся в точке (θ_0, ω_0) и описываемая функциями $\theta(v), \omega(v)$, пересечет фазовую траекторию решения $\theta^*(\tau)$, изображенную жирной линией на фиг. 2. В этот момент имеем

$$\theta(v^*) = \theta^*(\tau^*), \quad \omega(v^*) = \omega^*(\tau^*) \quad (7.4)$$

где τ^* – значение параметра τ на решении $\theta^*(\tau), \omega^*(\tau)$ в момент пересечения. Каждой точке пересечения (а их может быть несколько, как видно из фиг. 2) отвечает определенное значение $\tau = \tau^*$. В момент $v = v^*$ длина троса равна r_0 и связана с τ^*

соотношением (4.2). Отсюда определяем необходимую постоянную скорость намотки на втором этапе движения

$$u_0 = -r_0 \Omega (\tau^*)^{-1} > 0 \quad (7.5)$$

Второй этап начинается в момент $v = v^*$ и продолжается с постоянной скоростью намотки u_0 до окончания свертывания троса. На втором этапе движение описывается решением $\theta^*(\tau)$ из разд. 6 и заканчивается при условиях (6.1). Полное время движения при данном способе свертывания равно

$$T = \Omega^{-1}(v^* - \tau^*) \quad (7.6)$$

Начальное значение h_0 энергии определяется соотношением (3.2).

Если $h \leq 1,28$, то второй способ управления всегда может быть реализован, так как любая замкнутая фазовая траектория фиг. 2 в этом случае хотя бы раз пересекается с фазовой траекторией $(\theta^*(\tau), \omega^*(\tau))$. При этом может быть несколько (обычно две) точек пересечения, отвечающих различным значениям параметра τ^* и, согласно (7.5), разным скоростям намотки троса на втором этапе. Из этих возможностей можно выбрать вариант с наиболее приемлемой скоростью намотки.

Отметим, что на обоих этапах движения не происходит схода со связи, если $h_0 \leq 1,25$. В узком диапазоне $1,25 < h_0 < 1,28$ при соответствующих начальных данных (θ_0, ω_0) может происходить сход со связи на очень небольших интервалах движения, что, по-видимому, несущественно. Дело в том, что участки областей $\Phi < 0$, лежащие между замкнутыми траекториями с $h = 1,25$ и $h = 1,28$, образуют очень малые лунки, внутри которых нарушение условия $\Phi \geq 0$ к тому же незначительно.

На границе первого и второго этапов движения (при $v = v^*$) скорость намотки скачкообразно изменяется от $u = 0$ до $u = u_0 > 0$, так что в окрестности момента $v = v^*$ имеем

$$r''_{vv} = -u_0 \Omega^{-1} \delta(v - v^*) \quad (7.7)$$

где δ — дельта-функция. Подставляя (7.7) в (1.7), видим, что в момент $v = v^*$ трос испытывает ударную нагрузку. Естественно заменить скачкообразное изменение скорости намотки плавным изменением, реализуемым двигателем наматывающего устройства. Это приводит к сглаживанию скачка и к значительному уменьшению силы натяжения.

Отметим, что выше предложены некоторые программные способы управления свертыванием троса, основанные на простейшей механической модели нерастяжимого и невесомого троса, совершающего колебания в плоскости орбиты. За рамками рассмотрения остались многие важные факторы: учет инерции и упругости троса, за счет чего могут возникнуть его продольные и поперечные колебания, а также сход со связи; начальные отклонения троса, перпендикулярные плоскости орбиты; наличие возмущений и ошибок измерений. В связи с этим потребуется осуществлять управление по обратной связи, и предлагаемые способы управления должны быть существенно скорректированы. Однако представляется, что использование на заключительном этапе свертывания троса построенных в работе существенно нелинейных решений, ограниченных при $r \rightarrow 0$, может оказаться полезным при выборе опорных (программных) движений.

8. Примеры. Приведем некоторые примеры численного моделирования процесса свертывания троса. Начальные условия задавались в безразмерном виде (7.1). Процесс свертывания проходил по второму (двухэтапному) способу, описанному в разд. 7. Предварительно строилось решение $\theta^*(\tau), \omega^*(\tau)$ из разд. 6 (см. фиг. 2, 3).

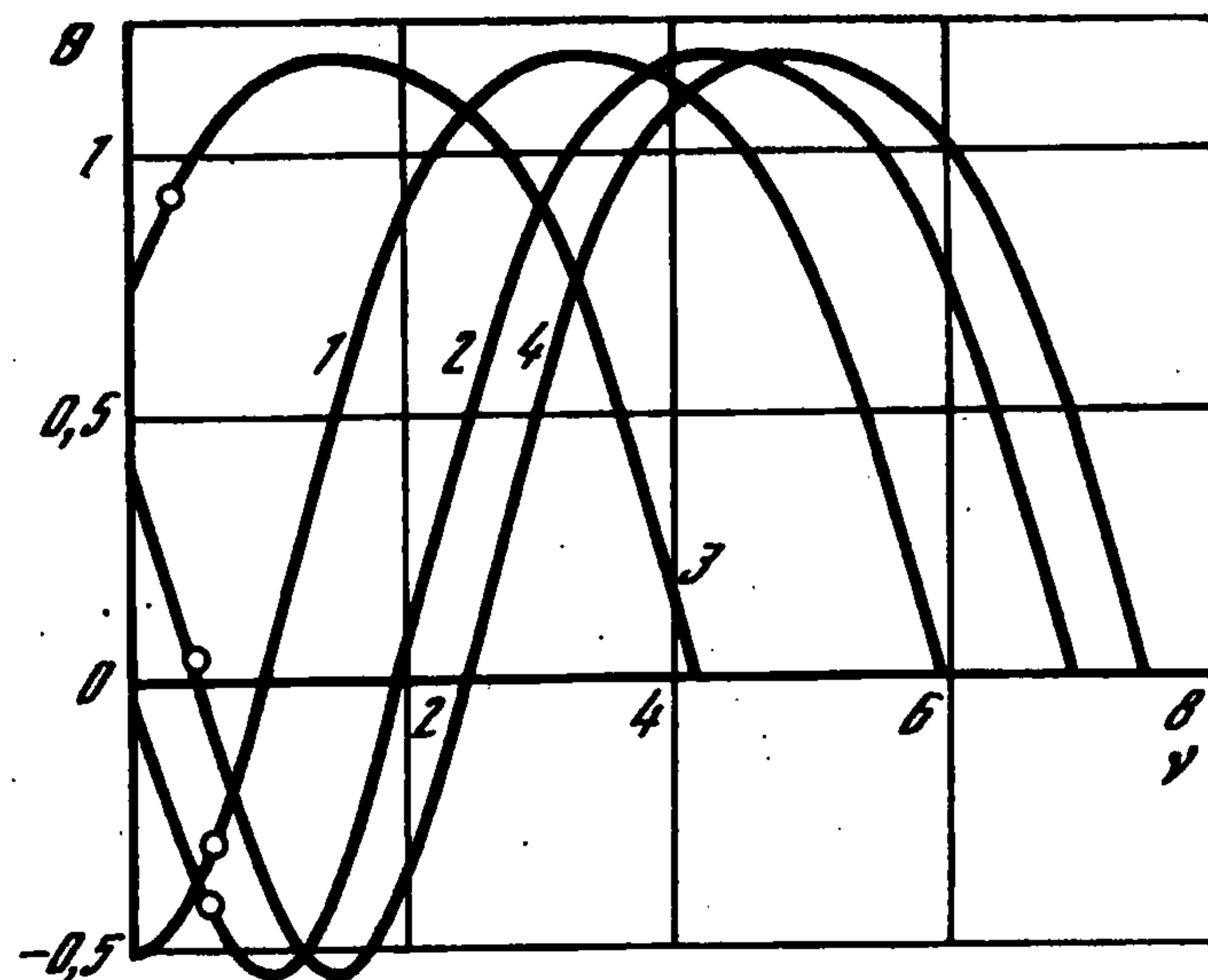
На первом этапе интегрировалось уравнение (3.1) при начальных условиях (7.1). Первый этап заканчивался при выполнении условий (7.4). Из этих условий определялись значения параметров $v^* > 0$ и $\tau^* < 0$, после чего начинался второй этап, на котором решение

определялось функциями $\theta^*(\tau)$, $\omega^*(\tau)$ при $\tau \in [\tau^*, 0]$. Скорость намотки на втором этапе u_0 и полное время движения T заданы соотношениями (7.5) и (7.6), соответственно.

Некоторые результаты расчетов для четырех вариантов представлены ниже

N	1	2	3	4
θ_0	-0,5	0	0,75	0,4
ω_0	0	-0,9	0,75	-0,6
v^*	5,0	4,9	4,15	4,9
$-\tau^*$	0,94	2,03	0,01	2,53

а также на фиг. 5, причем цифры у кривых отвечают номеру варианта, точками отмечены границы этапов.



Фиг. 5

Автор благодарит Х. Трогера (Вена) за обсуждения и И.С. Добрынину за помощь при проведении расчетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16286) и Международного научного фонда (M4F000).

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В.В., Левин Е.М. Динамика космических тросовых систем. М: Наука, 1990. 329 с.
2. Иванов В.А., Ситарский Ю.С. Динамика полета системы гибко связанных космических объектов, М: Машиностроение, 1986. 245 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.XII.1993