УДК 531.36

© 1995 г. П.Б. Гусятников, М.Д. Христиченко

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОВАРИАЦИЙ ДЛЯ НАВИГАЦИОННОГО КОМПЛЕКСА

Дается аналитическое решение уравнения ковариаций в фильтре Калмана, применяемом для оценивания координат летательного аппарата в стандартных навигационных системах, приводятся асимптотики этого решения при больших значениях времени.

Уравнения линейного непрерывного фильтра Калмана в общем случаé [1] состоят из уравнений контролируемого процесса

$$dx/dt = A(t)x + u(t) + w_x, \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

линейных условий наблюдения

$$z = H(t)x + \upsilon(t)^+ w_z \tag{2}$$

уравнений оптимальной в смысле минимума дисперсии ошибок всех координат оценки y вектора состояния x

$$dy/dt = A(t)y + u(t) + RH^\text{т}S^{-1}(z - Hy - \upsilon(t)), \quad y(0) = y_0 \tag{3}$$

и уравнений ковариаций

$$dR/dt = AR + RB + C - RDR \tag{4}$$

$$R(0) = R_0 = \operatorname{cov}(x_0, x_0) \tag{5}$$

В соотношениях (1)–(5) $x = x(t)$ – подлежащий оценке n-мерный фазовый вектор-столбец обобщенных координат контролируемой динамической системы, $z = z(t)$ – становящийся известным в процессе наблюдения за системой p-мерный вектор-столбец (наблюдаемый вектор), $y = y(t)$ – вычисляемый из соотношений (3)–(5) n-мерный вектор столбец оценки вектора x, $R = R(t) = \operatorname{cov}(x - y, x - y)$ – рассчитываемая по уравнению (4) и начальному условию (5) симметрическая $(n \times n)$-матрица (ковариационная матрица ошибки оценки), $A = A(t)$, $H = H(t)$ – заданные непрерывные матрицы размеров $n \times n$ и $p \times n$ соответственно, $B = A^\text{т}$; $u(t)$ и $\upsilon(t)$ – известные как функции времени детерминированные управления соответственно в системе управления процессом (1) и канале наблюдения за процессом (2); x_0 – гауссовский случайный вектор с заданным средним y_0 и ковариационной матрицей R_0; w_x и w_z – независимые и не зависящие от x_0 гауссовские белые шумы с нулевыми средними значениями и заданными непрерывными матрицами корреляционных плотностей $C = C(t)$ и $S = S(t)$ соответственно (размеры этих матриц $n \times n$ и $p \times p$):

$$\operatorname{cov}(w_x(t), w_x(\tau)) = C(t)\delta(t-\tau), \quad \operatorname{cov}(w_z(t), w_z(\tau)) = S(t)\delta(t-\tau)$$

$$\operatorname{cov}(w_x(t), x_0) = \operatorname{cov}(w_z(t), x_0) = \operatorname{cov}(w_x(t), w_z(\tau)) = 0$$

$$D = D(t) = H^\text{т}(t)S^{-1}(t)H(t)$$

Всюду выше $t \geqslant 0$, $\tau \geqslant 0$.

Знание аналитического решения уравнения (4), представляющего собой матричное уравнение Риккати, не только позволяет провести аналитическое (или численное, но с меньшими погрешностями) решение уравнения (3), но и дать точную оценку потенциальной точности контролируемого процесса. Особенно это относится к случаям, когда алгоритм фильтра Калмана применяется в реальных динамических системах, для которых величина потенциальной точности определяет в конечном счете экономическую целесообразность разработки системы в натуре. Указанная точность определяется асимптотическим (при $t \to +\infty$) поведением элементов матрицы R.

Если известно частное решение $R = P(t)$ уравнения (4), то уравнение (4) сводится к линейному заменой $R = T + P$, $Q = T^{-1}$:

$$dQ/dt = -QA_1 - B_1Q + D \quad (A_1 = A - PD, B_1 = A_1^{\mathrm{T}}) \tag{6}$$

Если матрицы A, B, C, D постоянны, а $P(t) \equiv P(0)$ – стационарное решение уравнения (4), т.е. решение алгебраического матричного уравнения Риккати

$$AP + PB + C - PDP = 0 \tag{7}$$

то в уравнении (6) делают замену

$$Q = e^{-B_1t}Ge^{-A_1t} \Leftrightarrow T = e^{A_1t}G^{-1}e^{B_1t}$$

которая превращает систему (6) в систему

$$\dot{G} = e^{B_1t}De^{A_1t}$$

имеющую аналитическое решение

$$Q(t) = e^{-B_1t}\left\{G(0) + \int_0^t e^{B_1s}De^{A_1s}ds\right\}e^{-A_1t}$$

$$G(0) = Q(0) = (R_0 - P)^{-1} \tag{8}$$

$$R(t) = P + e^{A_1t}\left\{G(0) + \int_0^t e^{B_1s}De^{A_1s}ds\right\}^{-1} e^{B_1t}$$

Применим эту методику для нахождения аналитического решения уравнения ковариаций для ряда стандартных навигационных комплексов [2], использующих алгоритм фильтрации Калмана.

Задача 1 (четырехмерный фильтр). Для наиболее распространенного варианта построения навигационного комплекса, содержащего одну инерциальную навигационную систему, в циклическом алгоритме оценивания вертикальных параметров движения летательного аппарата с помощью баровысотомера и радиовысотомера для случая, когда сигнал вертикального акселерометра используется в качестве управляющего воздействия, условия наблюдения и уравнения контролируемого процесса ([2], с. 260) имеют матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad H = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$C = \mathrm{diag}(0, c^2, 0, 0), \qquad S = \mathrm{diag}(a^{-2}, b^{-2}) \tag{9}$$

$$D = \mathrm{diag}(a^2, 0, 0, b^2), \qquad R_0 = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2)$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $\sigma_i > 0$ ($i = 1, \ldots, 4$) – постоянные.

Решение матричного уравнения (7) дает [3]

$$P = \begin{Vmatrix} \sqrt{2c/a^3} & c/a & 0 & 0 \\ c/a & \sqrt{2c^3/a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{10}$$

Уравнение (6) для компонент θ_{ij} $(i, j = 1,..., 4)$ симметричной матрицы Q принимает вид:

$$\dot\theta_{11} = 4\theta\theta_{11} + 4\theta^2\theta_{12} + a^2, \quad \dot\theta_{22} = -2\theta_{12}, \quad \dot\theta_{12} = -\theta_{11} + 2\theta\theta_{12} + 2\theta^2\theta_{22}$$

$$\dot\theta_{14} = 2\theta\theta_{14} + 2\theta^2\theta_{24}, \quad \dot\theta_{24} = -\theta_{14}, \quad \dot\theta_{13} = 2\theta\theta_{13} + 2\theta^2\theta_{23} + \theta_{12} \tag{11}$$

$$\dot\theta_{23} = -\theta_{13} + \theta_{22}, \quad \dot\theta_{33} = 2\theta_{23}, \quad \dot\theta_{34} = \theta_{24}, \quad \dot\theta_{44} = b^2$$

где

$$\theta = \sqrt{ac/2} \tag{12}$$

Решения системы (11) как функции безразмерного времени $\tau = \theta t$ даются формулами:

$$\theta_{11}(t) = (\alpha_1/2)[(C_1 - C_2\sin 2\tau + C_3\cos 2\tau)e^{2\tau} - 1]$$

$$\theta_{12}(t) = (\alpha_2/2)e^{2\tau}[-C_1 + (C_2 - C_3)\sin 2\tau - (C_2 + C_3)\cos 2\tau]$$

$$\theta_{22}(t) = \alpha_3[(C_1 + C_2\cos 2\tau + C_3\sin 2\tau)e^{2\tau} - 1]$$

$$\theta_{13}(t) = \alpha_3[e^{\tau}(D_1\cos\tau + D_2\sin\tau) - 1 - (C_3\sin 2\tau + C_2\cos 2\tau)e^{2\tau}]$$

$$\theta_{23}(t) = \alpha_4[e^{\tau}(-(D_1 + D_2)\sin\tau + (D_2 - D_1)\cos\tau) +$$

$$+2 + e^{2\tau}(C_1 + (C_2 + C_3)\sin 2\tau + (C_2 - C_3)\cos 2\tau)]$$

$$\theta_{33}(t) = 2\alpha_5[-2D_2 + C_3 - C_1 + 2e^{\tau}(-D_1\sin\tau + D_2\cos\tau) +$$

$$+4\tau + e^{2\tau}(C_1 + C_2\sin 2\tau - C_3\cos 2\tau)] + \sigma_3^{-2}$$

$$\theta_{44}(t) = (b^2/\theta)(\tau + \eta), \quad \theta_{14} = \theta_{24} = \theta_{34} \equiv 0 \tag{13}$$

В формулах (12) при учете (5), (9) введены обозначения

$$\alpha_k = a^2/(2\theta)^k, \quad k = 1,\ldots,5; \quad \Delta_1 = 2\sigma_2^2\alpha_3 - 1, \quad \Delta_2 = \sigma_1^2\alpha_1 - 1$$

$$\Delta_0 = 2\Delta_1\Delta_2 - 1, \quad C_1 = 4(\Delta_1 + \Delta_2 + 1)/\Delta_0 + 2$$

$$C_2 = -1 - 4(\Delta_1 + 1)/\Delta_0, \quad C_3 = -1 - 4(\Delta_2 + 1)/\Delta_0$$

$$D_1 = C_2 + 1, \quad D_2 = C_3 - C_1 - 1, \quad \eta = \theta/(b^2\sigma_4^2)$$

Окончательно имеем

$$R = \begin{Vmatrix} \begin{array}{c|c} \omega & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline 0\ 0\ 0 & r_{44} \end{array} \end{Vmatrix}, \quad \omega = \Omega^{-1} + \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{12} & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \Omega = \begin{Vmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} \\ \theta_{12} & \theta_{22} & \theta_{23} \\ \theta_{13} & \theta_{23} & \theta_{33} \end{Vmatrix} \tag{14}$$

где

$$p_{11} = 2\theta/a^2, \quad p_{22} = 4\theta^3/a^2, \quad p_{12} = 2\theta^2/a^2, \quad r_{44} = \theta/(b^2(\tau + \eta)) \tag{15}$$

Вычисление обратной матрицы в (14) связано с нахождением $\det\Omega = q$, для которого дифференцированием при учете (11) получаем уравнение

$$dq/d\tau = 4q + 2\alpha_1(\theta_{22}\theta_{33} - \theta_{23}^2) \tag{16}$$

Из формул (13) следует, что

$$\begin{aligned}\theta_{22}\theta_{33} - \theta_{23}^2 &= 2\alpha_4^2[(C_1 + C_2\cos 2\tau + C_3\sin 2\tau)e^{2\tau} - 1]\times \\ &\times[2e^{\tau}(-D_1\sin\tau + D_2\cos\tau) + 4\tau + e^{2\tau}(C_1 + C_2\sin 2\tau - C_3\cos 2\tau) + \\ &+1 - D_2 + \sigma_3^{-2}/(2\alpha_5)] - \alpha_4^2[e^{\tau}(-(D_1 + D_2)\sin\tau + (D_2 - D_1)\cos\tau) + \\ &+2 + e^{2\tau}(C_1 + (C_2 + C_3)\sin 2\tau + (C_2 - C_3)\cos 2\tau)]^2\end{aligned} \tag{17}$$

Найдем асимптотическое (при $t \to +\infty$) поведение элементов матрицы R. Главный член выражения (17) имеет порядок роста и равен

$$2\alpha_4^2 e^{4\tau}[4(\Delta_1 + \Delta_2 + 2)/\Delta_0 + 1] = \Delta e^{4\tau}$$

Он представляет собой единственное резонансное слагаемое в правой части (16). Следовательно, при $\Delta > 0$ (это предположение сохраним и далее)

$$q(\tau) \sim (q(0) + 2\alpha_1\Delta\tau)e^{4\tau}, \quad \tau \to +\infty$$

и

$$|\omega_{11} - p_{11}| \sim \theta/(a^2\tau) = 1/(a^2 t), \quad t \to +\infty \tag{18}$$

Аналогично

$$\theta_{11}\theta_{33} - \theta_{13}^2 = 4\theta^2\Delta e^{4\tau} + \ldots$$

в связи с чем

$$|\omega_{22} - p_{22}| \sim 4\theta^3/(a^2\tau) = 4\theta^2/(a^2 t), \quad t \to +\infty \tag{19}$$

Далее

$$|\omega_{12} - p_{12}| \sim 2\theta^2/(a^2\tau) = 2\theta/(a^2 t), \quad t \to +\infty \tag{20}$$

Формулы (18)–(20) определяют асимптотическое поведение элементов

$$r_{11} = \omega_{11}, \quad r_{12} = \omega_{12}, \quad r_{22} = \omega_{22}$$

матрицы R при больших t. При этом характерным критерием "большой" величины t в соответствии с этими формулами является малая величина отношений

$$(a^2 t)^{-1} : p_{11} = \frac{1}{2\tau}, \quad 4\theta^2(a^2 t)^{-1} : p_{22} = \frac{1}{\tau}, \quad 2\theta(a^2 t)^{-1} : p_{12} = \frac{1}{\tau}$$

Время t, таким образом, следует считать большим, если

$$\frac{1}{\tau} \ll 1 \Leftrightarrow t \gg \frac{1}{\theta}$$

Найдем асимптотическое поведение других элементов матрицы R:

$$|r_{13}| = |(\theta_{12}\theta_{23} - \theta_{22}\theta_{13})/q| \sim 2\theta^2/(a^2 t)$$

$$|r_{23}| = |(\theta_{12}\theta_{13} - \theta_{11}\theta_{23})/q| \sim 4\theta^3/(a^2 t)$$

$$|r_{33}| \sim 4\theta^4/(a^2 t); \quad |r_{44}| \sim 1/(b^2 t), \quad t \to +\infty \tag{21}$$

Задача 2 (трехмерный фильтр). При полетах над сильно пересеченной местностью и в горах по каналу радиовысотомера поступает интенсивная помеха либо в виде реализации высокочастотной составляющей поля рельефа, либо в виде ошибок, вызванных несовпадением реализации датчика поля и реализации, извлекаемой из блока памяти по сигналам навигационного комплекса. В этом случае необходим ([2] с. 262) переход от четырехмерного фильтра к трехмерному, связанный с отключением сигнала радиовысотомера. В общих обозначениях это соответствует матрицам

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{matrix} H = \| 1, 0, 0 \| \\ S = \| a^{-2} \| \end{matrix}$$

$$C = \mathrm{diag}(0, c^2, 0), \quad D = \mathrm{diag}(a^2, 0, 0), \quad R_0 = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)$$

Решение матричного уравнения (7) имеет вид матрицы (10) с вычеркиванием последней строки и последнего столбца.

Матрица $R = R(t)$ равна матрице ω, обведенной в (14) и определенной формулами (15). Таким образом, для матрицы R справедливы все формулы и асимптотики, полученные выше.

Интересно сравнить выведенные асимптотики (18)–(21) с результатами [4] для дискретного варианта этой задачи (последние приводятся в фигурных скобках)

$$r_{11} \sim \frac{2\theta}{a^2} + \frac{1}{a^2 t} \quad \left\{ \sim \frac{9}{a^2 t} \right\}$$

$$r_{22} \sim \frac{4\theta^3}{a^2} + \frac{4\theta^2}{a^2 t} \quad \left\{ \sim \frac{192}{a^2 t^3} \right\}$$

Похожие расхождения имеются и в асимптотиках других членов матрицы $R(t)$. Они связаны с тем, что в [4] в процессе решения сделано упрощающее предположение $D_x \to 0$ ([2], с. 265), которое искажает временной масштаб.

Задача 3 (двумерный фильтр). Рассмотрение навигационного комплекса, в состав которого входят все три канала инерциальной навигационной системы, измеряющие координаты пространственного и углового положения летательного аппарата, радиовысотометр и бортовой вычислитель с записанной в его памяти картой рельефа местности (барометрические измерители в ее состав не входят), приводит ([2], с. 222) к задаче (1)–(5), в которой

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad H = \| 1, 0 \|, \quad S = \| a^{-2} \|$$

$$C = \mathrm{diag}(0, c^2), \quad D = \mathrm{diag}(a^2, 0), \quad R_0 = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2)$$

К такой же задаче приводит и модель ошибок инерциальной навигационной системы в определении координаты и скорости летательного аппарата при горизонтальном полете ([2], с. 159).

Задача исследовалась [2] в предположениях, искажающих временной масштаб. В данной работе получены точные решения и асимптотические приближения.

Так, система (6) в исследуемой задаче принимает вид первых трех уравнений системы (11) и имеет решение, даваемое первыми тремя формулами в (13). Для такого выбора функций

$$q = \theta_{11}\theta_{22} - \theta_{12}^2 = \alpha_2^2 q^* / 4$$

$$q^* = (C_1^2 - C_2^2 - C_3^2)e^{4\tau} - 2(2C_1 + (C_2 + C_3)\cos 2\tau + (C_3 - C_2)\sin 2\tau)e^{2\tau} + 2$$

Полученные формулы дают экспоненциально убывающие асимптотики для элементов матрицы r_{ij}:

$$r_{11} = p_{11} + \theta_{22} / q = \frac{2\theta}{a^2}(1 + O(e^{-2\tau})), \quad r_{22} = \frac{4\theta^3}{a^2}(1 + O(e^{-2\tau}))$$

$$r_{12} = \frac{2\theta^2}{a^2}(1 + O(e^{-2\tau})), \quad \tau \to +\infty$$

а не степенные зависимости, содержащиеся в формулах (5.103) книги [2], полученные при искажающем временной масштаб предположении $S_j = 0$ (см. [2], с. 162).

Отметим, что линейные модели калмановской фильтрации обычно адекватно описывают реальные процессы наблюдения за нелинейными объектами лишь на ограниченных по длительности промежутках времени. Поэтому результаты статьи могут быть применены лишь после сравнения длительности этих промежутков с характерной временной константой, введенной формулой (12).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-011-1725).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский А.А., Белоглазов И.Н., Чигин Г.П.* Теория корреляционно-экстремальных навигационных систем. М.: Наука, 1979. 447 с.
2. *Белоглазов И.Н., Джанджгава Г.И., Чигин Г.П.* Основы навигации по геофизическим полям. М.: Наука, 1985. 328 с.
3. *Бондаренко А.В., Гусятников П.Б.* Об одной задача поиска // Проблемы математики в физико-технических задачах. М.: Изд. МФТИ. 1987. С. 12–19.
4. *Чигин Г.П., Силаев А.И.* Синтез алгоритмов оценивания параметров вертикального движения летательного аппарата // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1982. № 1. С. 177–188.

Москва

Поступила в редакцию
14.XII.1993