

УДК 531.36

© 1995 г. В.Б. Колмановский

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ И ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Предлагается процедура исследования и установлены условия устойчивости для некоторых систем с последействием с параметрами, зависящими от времени.

Одним из основных способов исследования устойчивости систем с последействием является второй метод Ляпунова, развитый для систем с конечным запаздыванием в [1]. Дальнейшим модификациям этого метода и его применения посвящены многие работы, например, [2–9], где приведена дальнейшая библиография. В ряде из них получены также и коэффициентные условия устойчивости конкретных систем с последействием посредством построения подходящих функционалов Ляпунова. Однако преодолеваемые при этом трудности зачастую носили такой характер, что позволяло отдельным авторам сравнивать процедуру конструирования упомянутых функционалов с искусством [2].

Вместе с тем, если в построенных функционалах положить запаздывание равным нулю, то в результате получается функция Ляпунова для соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения. Иными словами, каждый функционал Ляпунова для системы с последействием представляется порожденным некоторой функции Ляпунова для подходящим образом сконструированного обыкновенного уравнения. Это замечание было использовано в [10], где предложена некоторая формальная процедура построения функционалов Ляпунова V для стационарных систем с произвольным (сосредоточенным или распределенным) запаздыванием, состоящая из следующих этапов:

1) преобразовать правую часть рассматриваемого уравнения так, чтобы представить ее в виде суммы двух слагаемых, первое из которых зависит только от текущего состояния системы;

2) в преобразованном уравнении отбросить все слагаемые, кроме первого, в результате получится вспомогательное обыкновенное дифференциальное уравнение, тривиальное решение которого предполагается равномерно асимптотически устойчивым;

3) для вспомогательной системы определить функцию Ляпунова V (т.е. определенно положительную, допускающую бесконечно малый высший предел функцию, производная которой в силу вспомогательной системы определенно отрицательна), существование которой следует из предположений этапа 2);

4) заменить аргументы функции V на функционалы в зависимости от преобразования, использованного на этапе 1). В результате получается основная компонента V_1 функционала V . Добавляя к V_1 компоненту V_2 , определяемую стандартным образом, получаем искомый функционал V , удовлетворяющий условиям теоремы об асимптотической устойчивости, в виде $V = V_1 + V_2$.

При этом преобразования этапа 1), а также выбор функции Ляпунова на этапе 3), могут быть осуществлены, вообще говоря, различными способами. Эта неоднозначность может быть существенно использована для построения различных функционалов V , а, следовательно, и получения различных условий устойчивости.

Заметим, что построенные ранее функционалы [4, 5] укладываются в рамки приведенной формальной процедуры исследования устойчивости систем с последействием.

Цель настоящей работы – получить условия устойчивости и показать, что описанная процедура применима также и к ряду систем с переменными коэффициентами вида

$$\dot{x}(t) = a(t, x_t), \quad t \geq 0, \quad x \in R^n, \quad a(t, 0) = 0 \quad (0.1)$$

Здесь $x_t = x(t + \theta)$, $\theta \leq 0$ и функционал $a(t, \cdot): [0, \infty] \times C(-\infty, 0] \rightarrow R^n$.
Начальные условия для системы (1.1) определяются соотношениями

$$x_0(\theta) = \varphi(\theta), \quad \varphi \in C(-\infty, 0] \quad (0.2)$$

Ниже рассматривается устойчивость тривиального решения задач вида (0.1), (0.2), которое называется:

1) устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, что $|x(t)| < \varepsilon$, $t \geq 0$, если только $\|\varphi\| < \delta(\varepsilon)$;

2) асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и $|x(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для всех начальных условий φ , принадлежащих некоторой области притяжения тривиального решения.

Вначале в качестве иллюстрации процедуры подробно рассматривается скалярное линейное уравнение с дискретным запаздыванием. В отношении остальных классов уравнений ограничимся изложением результатов отдельных этапов процедуры, видом получающихся функционалов и условиями устойчивости. При этом ввиду громоздкости рассматриваются лишь простые характерные случаи, однако, из приведенных результатов ясно какие изменения нужно внести, чтобы охватить и более общую ситуацию.

1. Скалярные уравнения. Рассмотрим устойчивость скалярного уравнения

$$\dot{x}(t) = -b(t)x(t-h), \quad t \geq 0 \quad (1.1)$$

где постоянная $h \geq 0$ и непрерывная ограниченная функция $b(t)$ заданы. Преобразуем правую часть (1.1), выделив в ней слагаемое, зависящее от $x(t)$:

$$b(t)x(t-h) = b(t+h)x(t) - \frac{d}{dt} \int_{t-h}^t b(s+h)x(s)ds \quad (1.2)$$

Подставим (1.2) в (1.1) и перенесем все члены с производной по t в левую часть. Тогда преобразованное уравнение представимо в форме

$$\dot{z}(t) = -b(t+h)x(t), \quad t \geq 0, \quad z(t) = x(t) - \int_{t-h}^t b(s+h)x(s)ds \quad (1.3)$$

Отбросив в (1.3) член, зависящий от прошлых значений решения, получим вспомогательное обыкновенное уравнение

$$\dot{y}(t) = -b(t+h)y(t), \quad t \geq 0 \quad (1.4)$$

Предположим, что

$$\inf_t b(t) > 0, \quad t > 0 \quad (1.5)$$

Тогда система (1.4) равномерно (по начальному моменту) асимптотически устойчива. В качестве функции Ляпунова $v(t, y)$ для системы (1.4) возьмем $v = y^2$. Образует теперь компоненту V_1 функционала V . Функционал V_1 всегда получается заменой y функции $v(t, y)$ аргумента y на z , где z — функционал, фигурирующий в левой части преобразованного уравнения под знаком производной.

В рассматриваемом случае на основании (1.3) получим

$$V_1(t, x_t) = \left[x(t) - \int_{t-h}^t b(s+h)x(s)ds \right]^2 \quad (1.6)$$

Подберем теперь V_2 так, чтобы полная производная \dot{V} функционала $V = V_1 + V_2$ в силу системы (1.1) была отрицательно определена.

Принимая во внимание (1.2), заключаем, что производная \dot{V}_1 функционала (1.6) в силу системы (1.1) равна

$$\dot{V}_1(t) = -2z(t)b(t+h)x(t) = -2b(t+h)x^2(t) + 2b(t+h)x(t) \int_{t-h}^t b(s+h)x(s)ds$$

Кроме того,

$$2x(t) \int_{t-h}^t b(s+h)x(s)ds \leq x^2(t) \int_{t-h}^t b(s+h)ds + \int_{t-h}^t b(s+h)x^2(s)ds \quad (1.7)$$

Поэтому в качестве V_2 надлежит взять функционал

$$V_2 = \int_{t-h}^t b(s+2h)ds \int_s^t b(s_1+h)x^2(s_1)ds_1 \quad (1.8)$$

С учетом (1.6)–(1.8) для производной \dot{V} функционала $V = V_1 + V_2$ имеем

$$\dot{V} \leq -x^2(t)b(t+h)[2 - \int_t^{t+2h} b(s)ds] \quad (1.9)$$

Из (1.5), (1.9) следует, что \dot{V} отрицательно определена при условии

$$\sup_t \int_t^{t+h} b(s)ds < 1, \quad t \geq 0 \quad (1.10)$$

Стандартные рассуждения (см., например, [4]) показывают теперь, что система (1.4) асимптотически устойчива для любой непрерывной функции $b(t)$, удовлетворяющей неравенствам (1.5), (1.10).

Используя другие преобразования правой части (1.1), можно получить иные условия устойчивости. Рассмотрим, например, следующее уравнение (справедливое при $t \geq h$ в предположении, что $b(s)$ непрерывно дифференцируемая функция):

$$b(t)x(t-h) = b(t+h)x(t) - \int_{t-h}^t [\dot{b}(s+h)x(s) - b(s+h)b(s)x(s-h)]ds, \quad t \geq h \quad (1.11)$$

Ввиду (1.1), (1.11) заключаем, что вспомогательная система имеет прежний вид (1.4). Значит, при условии (1.5) функция $v(t, y) = y^2$, т.е. $V_1 = x^2(t)$, поскольку в силу (1.11) в данном случае $z(t) = x(t)$. Вычисляя \dot{V}_1 в силу системы (1.1), с учетом (1.11) имеем

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= -2b(t+h)x^2(t) + 2x(t) \int_{t-h}^t [\dot{b}(s+h)x(s) - b(s+h)b(s)x(s-h)]ds \leq \\ &\leq x^2(t) \left[-2b(t+h) + \int_{t-h}^t [|\dot{b}(s+h)| + b(s+h)b(s)]ds + \right. \\ &\left. + \int_{t-h}^t [|\dot{b}(s+h)|x^2(s) + b(s+h)b(s)x^2(s-h)]ds \right] \end{aligned} \quad (1.12)$$

Следовательно, чтобы обеспечить отрицательную определенность \dot{V} , где $V = V_1 + V_2$, достаточно в качестве V_2 взять функционал

$$V_2 = \int_{t-h}^t d\tau \int_{\tau}^t [|\dot{b}(s+h)|x^2(s) + b(s+h)b(s)x^2(s-h)]ds + h \int_{t-h}^t b(s+2h)b(s+h)x^2(s)ds \quad (1.13)$$

Действительно, из (1.12), (1.13) вытекает, что

$$\dot{V}(t) \leq \gamma(t)x^2(t),$$

$$\gamma(t) = [-2b(t+h) + h|\dot{b}(t+h)| + hb(t+2h)b(t+h) + \int_{t-h}^t (|\dot{b}(s+h) + b(s+h)b(s)|)ds]$$

Таким образом, система (1.1) асимптотически устойчива для любой непрерывно дифференцируемой функции $b(t)$, удовлетворяющей (1.5) и такой, что $\sup_t \gamma(t) < 0, t \geq 0$

Замечание. Как отмечалось выше, уравнение (1.1) было рассмотрено лишь для простоты изложения. Вместе с тем незначительные модификации позволяют получить, используя ту же самую процедуру, условия устойчивости и более общих уравнений. Рассмотрим в качестве примера скалярное уравнение с переменным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = -\sum_{i=1}^m a_i(t)x(t-\tau_i(t)), \quad t \geq 0 \quad (1.14)$$

Преобразованная система имеет вид

$$\dot{z}(t) = -b(t)x(t), \quad b(t) = \sum_{i=1}^m a_i(q_i(t))\dot{q}_i(t)$$

$$z(t) = x(t) - \sum_{i=1}^m \int_t^{q_i(t)} a_i(s)x(s-\tau_i(s))ds$$

где $q_i(t)$ функция обратная к $t - \tau_i(t)$. Значит, вспомогательная система описывается уравнением $\dot{y}(t) = -b(t)y(t)$, с функцией Ляпунова $v = y^2$. Поэтому $V = V_1 + V_2$, где

$$V_1 = z^2(t), \quad V_2 = \sum_{i=1}^m \int_t^{q_i(t)} b(s)ds \int_s^{q_i(t)} |a_i(s_1)|x^2(s_1 - \tau_i(s))ds_1$$

С помощью функционала V устанавливается, что система (1.14) асимптотически устойчива, если $a_i(t)$ непрерывны и ограничены, $\tau_i(t)$ непрерывно дифференцируемы и

$$\sup_t \dot{\tau}_i(t) < 1, \quad \sup_t \sum_{i=1}^m \int_t^{q_i(t)} |a_i(s)|ds < 1, \quad t \geq 0$$

$$\sup_t [-2b(t) + \sum_{i=1}^m \int_t^{q_i(t)} (|a_i(s)b(t)| + |b_i(s)a_i(q_i(t))\dot{q}_i(t)|)ds] < 0$$

2. Уравнения второго порядка. Установим условия устойчивости системы

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -a(t)x_2(t) - b(t)x_1(t - \tau(t)), \quad t \geq 0 \quad (2.1)$$

Преобразованная система имеет вид

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -a(t)x_2(t) - b(t)x_1(t) + b(t) \int_{t-\tau(t)}^t x_2(s)ds \quad (2.2)$$

Отсюда вытекает, что вспомогательная система описывается уравнениями

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t), \quad \dot{y}_2(t) = -a(t)y_2(t) - b(t)y_1(t)$$

Функцию v для нее возьмем равной $v = by_1^2 + y_2^2$. Поэтому $V_1 = bx_1^2 + x_2^2$.

Значит, \dot{V}_1 в силу системы (2.1) удовлетворяет оценке

$$V_1 \leq \dot{b}(t)x_1^2(t) - 2a(t)x_2^2(t) + b(t)\tau(t)x_2^2(t) + b(t) \int_{t-\tau(t)}^t x_2^2(s)ds$$

Следовательно,

$$V_2 = \int_t^{q(t)} b(s) ds \int_{s-\tau(s)}^t x_2^2(s_1) ds_1 \quad (2.3)$$

где $q(t)$ – функция, обратная к $t - \tau(t)$. С учетом (2.3) для $V = V_1 + V_2$ имеем

$$\dot{V} \leq \dot{b}(t)x_1^2(t) + \gamma_1 x_1^2, \quad \gamma_1 = [-2a(t) + b(t)\tau(t) + \int_t^{q(t)} b(s) ds]$$

Таким образом, использование преобразованной системы (2.2) позволяет заключить, что система (2.1) устойчива, если функции $b(t), \tau(t) \geq 0$, непрерывно дифференцируемы, $a(t)$ непрерывна и

$$\inf_t b(t) > 0, \quad \dot{b}(t) \leq 0, \quad \dot{\tau}(t) < 1, \quad \gamma_1(t) \leq 0, \quad t \geq 0 \quad (2.4)$$

Возьмем теперь преобразованную систему в виде

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{z}_2(t) = -\alpha(t)x_1(t) - a(t)x_2(t)$$

$$z(t) = x_2(t) - \int_t^{q(t)} b(s)x_1(s - \tau(s)) ds, \quad \alpha(t) = b(q(t))\dot{q}(t) \quad (2.5)$$

Тогда вспомогательная система описывается уравнениями

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -\alpha(t)x_1(t) - a(t)x_2(t)$$

Функцию v возьмем в виде

$$v = 2\alpha y_1^2 + (\alpha y_1 + y_2)^2 + y_2^2$$

Поэтому при учете (2.5)

$$V_1 = 2\alpha x_1^2(t) + z^2(t) + [z(t) + \alpha x_1(t)]^2 \quad (2.6)$$

Для \dot{V}_1 в силу системы (2.1) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{V}_1 = & [\dot{\alpha}(t) + a(t)(\dot{a}(t) - \alpha(t))]x_1^2(t) - a(t)x_2^2(t) + \dot{a}(t)x_1(t)x_2(t) + \\ & + [(2\alpha(t) - \dot{a}(t))x_1(t) + a(t)x_2(t)] \int_t^{q(t)} b(s)x_1(s - \tau(s)) ds \end{aligned} \quad (2.7)$$

Следовательно

$$V_2 = \int_t^{q(t)} [2\alpha(s) - \dot{a}(s) + a(s)] ds \int_t^{q(t)} b(s_1)x_1(s_1 - \tau(s_1)) ds_1$$

Отсюда, из (2.6) и (2.7) вытекает, что

$$\dot{V} \leq \gamma_3(t)x_1^2 + \gamma_2(t)x_2^2(t) \quad (2.8)$$

Здесь

$$\gamma_3 = 2(\dot{\alpha} + a(\dot{a} - \alpha)) + |2\alpha - \dot{a}| \int_t^{q(t)} b(s) ds + \alpha \int_t^{q(t)} (|2\alpha(s) - \dot{a}(s)| + |\dot{a}| + a(s)) ds,$$

$$\gamma_2 = -2a + a \int_t^{q(t)} b(s) ds + |\dot{a}|$$

Соотношения (2.6)–(2.8) показывают, что система (2.1) асимптотически устойчива, если функция $\dot{a}, \dot{b}, \dot{\tau}, \ddot{\tau}$ непрерывны,

$$a(t) \geq 0, \quad \sup_t \gamma_i(t) < 0, \quad i = 2, 3, \quad \sup_t \dot{\tau}(t) < 1, \quad \inf_t \alpha(t) > 0, \quad t \geq 0$$

Отметим, что обе группы условий устойчивости системы (2.1), установленные в этом разделе, зависят не только от значений коэффициентов, но и их производных.

Замечание. Наряду с линейными изложенная процедура построения функционалов может быть применена и к некоторым нелинейным уравнениям. Рассмотрим, например, систему

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -a(t)x_2(t) - b(t)F(x_1(t - \tau(t))) \quad (2.9)$$

Функция $F(x)$ непрерывно дифференцируема, $xF(x) > 0$ для $x \neq 0$ и производная $f(x) = \partial F(x)/\partial x$ ограничена: $|f(x)| \leq 1$. Остальные параметры в уравнении (2.9) те же, что и в (2.1). Построим функционал $V = V_1 + V_2$ для системы (2.9). Преобразованная система имеет вид

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -a(t)x_2(t) - b(t)F(x_1(t)) + b(t) \int_{t-\tau(t)}^t f(x_1(s))x_2(s)ds$$

Значит, вспомогательная система уравнений имеет форму

$$\dot{y} = y_2, \quad \dot{y}_2(t) = -ay_2 - bF(y_1) \quad (2.10)$$

Функцию v для (2.10) возьмем равной [11]

$$v(t, y_1, y_2) = y_2^2 + 2b(t) \int_0^{y_1} F(s)ds$$

Тогда функционал $V_1 = v(t, x_1, x_2)$. Поэтому в качестве V_2 надлежит взять функционал, определяемый соотношением (2.3). В результате получаем, что \dot{V} в силу системы (2.9) удовлетворяет оценке

$$\dot{V} \leq 2b(t) \int_0^{x_1(t)} F(s)ds + \gamma_1 x_2^2(t)$$

Следовательно, при сделанных предположениях система (2.9) устойчива, если выполнены требования (2.4).

3. Системы с распределенным последствием. Рассмотрим применение описанной процедуры к системе уравнений

$$\dot{x}(t) = \int_0^h K(t, s)x(t-s)ds, \quad t \geq 0, \quad x \in R^n \quad (3.1)$$

Здесь матрица K размером $n \times n$ непрерывные элементы. При $t \geq h$ преобразованная система имеет вид

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \int_0^h K(t, s)ds \int_{t-s}^t d\tau \int_0^h K(\tau, s_1)x(t-s_1)ds_1, \quad A(t) = \int_0^h K(t, s)ds, \quad t \geq 0 \quad (3.2)$$

Вспомогательная система описывается уравнением

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t), \quad t \geq 0 \quad (3.3)$$

Предположим, что матрица $A(t)$ непрерывно дифференцируема, $|A(t)| \leq C_1$, $\text{Re} \lambda(A(t)) \leq -C_2 < 0$ для все $t \geq 0$. Здесь и далее C_i – некоторые положительные постоянные, $|A|$ – норма матрица A , порождаемая евклидовой нормой векторов в R^n , наконец, $\lambda(A)$ – собственные значения матрицы A и $\text{Re} \lambda$ их действительная часть. При этих предположениях существует единственная положительно определенная матрица $P(t)$, являющаяся при каждом $t \geq 0$ решением уравнения $A'(t)P(t) + P(t)A(t) = -I$, где

штрих – знак транспонирования, I – единичная матрица. Матрица $P(t)$ удовлетворяет условиям [12–14]

$$|\dot{P}| \leq C_3 |\dot{A}|, \quad |P| \leq C_4, \quad v(t, y) = y' P(t) y$$

$$C_3 \leq 2\sqrt{n} |A(t) \oplus A(t)|^{-1}, \quad C_4 \leq \sqrt{n} |A'(t) \oplus A'(t)|^{-1} \quad (3.4)$$

$$\dot{v}(t, y) = d/dt [y' P(t) y] = -|y|^2 + y' \dot{P} y$$

Здесь \dot{v} полная производная v в силу системы (3.3), символ \oplus означает кронекеровскую сумму матриц A . Ввиду (3.2), (3.3) имеем

$$V_1 = x'(t) P(t) x(t) \quad (3.5)$$

Вычисляя \dot{V}_1 в силу системы (3.2), заключаем с учетом (3.3), что V_2 надлежит выбрать в форме:

$$V_2 = C_4 \int_0^h ds \int_{t-s}^t d\tau_1 \int_{\tau_1}^t |K(\tau_1 + s, s)| d\tau_2 \int_0^h |K(\tau_2, s_1)| |x(\tau_2 - s_1)|^2 ds_1 + \\ + C_4 \int_0^h ds \int_{t-s}^t \left[\int_0^h ds_1 \int_{\tau+s-s_1}^{\tau+s} |K(\tau_1 + s_1, s_1)| d\tau_1 \right] |K(\tau + s, s)| |x(\tau)|^2 d\tau$$

Тогда для $V = V_1 + V_2$ имеем

$$\dot{V} \leq -\gamma_4 |x|^2, \quad \gamma_4 = 1 - |\dot{P}| - C_4 Q$$

$$Q = \int_0^h ds \int_0^h ds_1 \int_{t+s-s_1}^{t+s} |K(\tau_1 + s_1, s_1)| |K(t + s, s)| d\tau_1 + \int_0^h |K(t, s)| ds \int_{t-s}^t d\tau \int_0^h |K(\tau, s_1)| ds_1 \quad (3.6)$$

Таким образом, система (3.1) асимптотически устойчива, если матрица $A(t)$ удовлетворяет сформулированным требованиям и $\inf_t \gamma_4(t) > 0, t \geq 0$.

Условие $\gamma_4 > 0$ означает, что моменты ядра K и скорость изменения матрицы $A(t)$ должны быть достаточно малы.

При $n = 1$ условия устойчивости упрощаются. В этом случае преобразованная и вспомогательная системы сохраняют прежний вид (3.2), (3.3). Положим $v = y^2$. Тогда $V_1 = x^2(t)$. Значит, V_2 дается формулой (3.6) при $C_4 = 1$. Отсюда вытекает, что система (3.1) при $n = 1$ асимптотически устойчива, если

$$\sup_t [2A(t) + Q(t)] < 0, \quad t \geq 0$$

Как и выше, используя отличную от (3.2) форму преобразованной системы, можно получить иные условия устойчивости. Приведем некоторые из них, ограничиваясь для простоты изложения случаем $n = 1$. Запишем преобразованную систему следующим образом:

$$\dot{z}(t) = A_1(t) x(t), \quad A_1(t) = \int_0^h K(t + s, s) ds, \quad z(t) = x(t) + \int_0^h ds \int_{t-s}^t K(\tau + s, s) x(\tau) d\tau \quad (3.7)$$

Из (3.7) следует, что вспомогательная система имеет вид (3.3), где A заменено на A_1 . Предположим, что $A_1 \leq 0$. Тогда $v = y^2$, т.е. $V_1 = z^2(t)$.

Вычисляя \dot{V}_1 в силу системы (3.1), заключаем, что

$$V_2 = \int_0^h ds \int_{t-s}^t |A(s_1 + s)| ds_1 \int_{s_1}^h |K(\tau + s, s)| x^2(\tau) d\tau \quad (3.8)$$

Таким образом, условия асимптотической устойчивости системы (3.1) имеют вид

$$\sup_t [2A_1(t) + |A_1(t)| \int_0^h ds \int_{t-s}^t |K(\tau + s, s)| d\tau + \int_0^h |K(t + s, s)| ds \int_{t-s}^t |A_1(s_1 + s)| ds_1] < 0, \quad t \geq 0 \quad (3.9)$$

$$\sup_t \int_0^h ds \int_{t-s}^t |K(\tau + s, s)| d\tau < 1$$

Замечания. 1.° Незначительные изменения в исходных предположениях о ядре $K(t, s)$, связанные с существованием и конечностью несобственных интегралов, позволяют охватить также и случай неограниченного запаздывания (т.е. случай $h = \infty$). Например, условия асимптотической устойчивости системы (3.1) при $h = \infty, n = 1$ сохраняют прежний вид (3.9), где h заменено на ∞ , если

$$\sup_t \int_0^\infty ds \left(\int_{t-s}^\infty \left(\int_0^\infty |K(s_1 + s + s_2, s_2)| ds_2 \right) ds_1 \int_{s_1}^t |K(\tau + s, s)| d\tau \right) < \infty$$

Для скалярного уравнения

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) + \int_0^\infty K(t, s)x(t-s)ds, \quad t \geq 0 \quad (3.10)$$

где $a(t)$ и $K(t, s)$ – непрерывные функции, условия устойчивости имеют вид

$$\int_0^\infty ds \int_{t-s}^t |K(\tau + s, s)| d\tau < \infty \quad (3.11)$$

$$\sup_t [-2a(t) + \int_0^\infty |K(t, s)| + |K(t + s, s)|] ds < 0, \quad t \geq 0$$

Действительно, поскольку правая часть (3.10) уже содержит слагаемое, определяемое текущим положением системы, вспомогательная система имеет вид

$$\dot{y} = -ay, \quad \text{т.е. } v = y^2, \quad V_1 = x^2(t)$$

Поэтому

$$V_2 = \int_0^\infty ds \int_{t-s}^t |K(\tau + s, s)| x^2(\tau) d\tau$$

Функционал $V = V_1 + V_2$ удовлетворяет требованиям теоремы об асимптотической устойчивости при условиях (3.11).

2.° Для некоторых уравнений с распределенным последствием типа Вольтерра преобразованное уравнение может быть получено в результате дифференцирования обеих частей исходного уравнения. Рассмотрим, например, скалярное уравнение

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - \int_0^t K(t-s)x(s)ds, \quad t \geq 0 \quad (3.12)$$

с начальным условием $x(0) = x_0$. Здесь a – заданная постоянная, $K(s)$ – непрерывно дифференцируемая функция.

Уравнение (3.12) является частным случаем (3.10). Поэтому условия его устойчивости вытекают из (3.11) и имеют вид

$$a > \int_0^\infty |K(s)| ds, \quad \int_0^\infty s|K(s)| ds < \infty$$

Однако эти условия устойчивости, предполагающие абсолютную интегрируемость ядра $K(s)$ на $[0, \infty)$ и конечность первого момента, могут оказаться для некоторых уравнений слишком ограничительными. Установим поэтому условия устойчивости, используя другое представление для преобразованных уравнений.

Дифференцируя обе части (3.12) по t , получим преобразованную систему двух уравнений для переменных $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$, эквивалентную исходной

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -ax_2 - bx_1 - \int_0^t \dot{K}(t-s)x(s)ds, \quad b = K(0) \quad (3.13)$$

Значит, вспомогательная система имеет вид

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = -ay_2 - by_1$$

функцию v для которой возьмем равной

$$v = 2by_1^2 + y_2^2 + (y_1 + y_2)^2 = v(y_1, y_2)$$

Следовательно $V_1(x_1, x_2) = v(x_1, x_2)$. Отсюда и из (3.13) вытекает, что $V = V_1 + V_2$, где

$$V_2 = (a+1) \int_0^\infty |\dot{K}(s)| \int_{t-s}^t x^2(s_1) ds_1$$

Тогда \dot{V} в силу системы (3.13) удовлетворяет оценке

$$\frac{1}{2} \dot{V} \leq \gamma_5 x^2 + \gamma_6 y^2, \quad \gamma_5 = -aK(0) + (1+a) \int_0^\infty |\dot{K}(s)| ds, \quad \gamma_6 = -a + \int_0^\infty |\dot{K}(s)| ds$$

Таким образом, условия асимптотической устойчивости имеют вид $\gamma_5 < 0, \gamma_6 < 0$. Оба эти условия будут выполнены, если скорость изменения ядра $K(s)$ достаточно мала. В частности, если ядро $K(s)$ постоянно, то полученные достаточные условия устойчивости системы (3.13) переходят в необходимые и достаточные.

4. Диссипативные системы. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t-h)), \quad t \geq 0, \quad x \in R^n, \quad h \geq 0 \quad (4.1)$$

Здесь непрерывная функция $F: [0, \infty) \times R^n \rightarrow R^n$ непрерывно дифференцируема по второму аргументу $F(t, 0) \equiv 0$ и справедливо условие Липшица

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|, \quad x_i \in R^n \quad (4.2)$$

где $\|\cdot\|$ — некоторая норма в R^n . Предположим также, что матрица частных производных $f(t, x) = \partial F(t, x)/\partial x$ равномерно по $t \geq 0, x \in D \subset R^n$ (где D некоторая окрестность начала координат) строго диссипативна. Последнее означает, что $\|\exp(\tau f(t, x))\|_1 \leq \exp(-a\tau)$ для всех $\tau \geq 0, t \geq 0, x \in D$ при некотором $a > 0$. Через $\|\cdot\|_1$ обозначена операторная норма, порожденная нормой $\|\cdot\|$ векторов в R^n . Постоянная $a < -\sup_{t,x} \gamma(f(t, x)), t \geq 0, x \in D$, где логарифмическая норма $\gamma(f)$ матрицы f определяется равенством

$$\gamma(f) = \lim_{\Delta \rightarrow +0} \frac{1}{\Delta} [\|I + \Delta f\|_1 - 1] \quad (4.3)$$

(I -единичная $(n \times n)$ -матрица) [14, 15].

Подчеркнем, что диссипативность матрицы f должна иметь место по отношению к какой-либо одной матричной норме $\|\cdot\|_1$, порожденной какой-нибудь нормой $\|\cdot\|$ векторов в R^n . В частности, если матрица $f(t, x)$ равномерно по $t \geq 0$ и $x \in D$ отрицательно определена (т.е. $y'f(t, y)y \leq -Cy'y$, для любых $t \geq 0, x \in D, y \in R^n$), то она

строго диссипативна по отношению к евклидовой норме и $\gamma(f) \leq -C$.

Установим условия устойчивости тривиального решения системы (4.1).

Добавляя и вычитая $F(t, x(t))$ в правой части (4.1), заключаем, что вспомогательная система имеет вид

$$\dot{y}(t) = F(t, y(t))$$

в качестве функции v для которой возьмем $v = \|y\|$. Тогда $V_1 = \|x(t)\|$. Для любой нормы имеем [14–16]

$$d^+ / dt \|x(t)\| = Q[x(t), \dot{x}(t)] \quad (4.4)$$

$$Q[x(t), \dot{x}(t)] = \lim_{\Delta \rightarrow +0} \frac{1}{\Delta} [\|x(t) + \Delta x(t)\| - \|x(t)\|]$$

где d^+ / dt – верхнее правое производное число. Заменяя в (4.4) производную \dot{x} правой частью (4.1), получим

$$\frac{d^+}{dt} V_1 \leq \lim_{\Delta \rightarrow +0} \frac{1}{\Delta} [\|x(t) + \Delta F(t, x(t))\| - \|x(t)\|] + \|F(t, x(t)) - F(t, x(t-h))\| \quad (4.5)$$

Предел в (4.5), равный $Q[x(t), F(t, x(t))]$, удовлетворяет оценке

$$|Q[x(t), F(t, x(t))]| \leq \gamma(f) \|x(t)\| \leq -a \|x(t)\| \quad (4.6)$$

Действительно, функцию $Q[x(t), F(t, x(t))]$, с учетом ее определения (4.4) можно интерпретировать как верхнюю правую производную $d^+ \|y\| / dt$ нормы $\|y\|$ в силу траекторий вспомогательной системы в точке $y = x(t)$, т.е.

$$\frac{d^+ \|y\|}{dt} = Q[y, F(t, y)] \quad (4.7)$$

Далее

$$F(t, y) = \int_0^1 f(t, sy) dsy \quad (4.8)$$

Кроме того, ввиду [14–18]

$$\gamma(f) = \sup_y \|y\|^{-1} Q(y, fy), \quad \|y\| \neq 0, \quad y \in R^n \quad (4.9)$$

Из соотношений (4.7)–(4.9) и выпуклости логарифмической нормы следует оценка (4.6), поскольку

$$\frac{d^+ \|y\|}{dt} = Q\left[y, \int_0^1 f(t, sy) dsy\right] \leq \gamma\left[\int_0^1 f(t, sy) ds\right] \|y\| \leq \int_0^1 \gamma[f(t, sy)] ds \|y\| \leq -a \|y\|$$

Неравенства (4.2), (4.5), (4.6) означают, что

$$\begin{aligned} \frac{d^+}{dt} V_1 &\leq -a \|x(t)\| + L \|x(t) - x(t-h)\| = -a \|x(t)\| + L \left\| \int_{t-h}^t F(s, x(s-h)) ds \right\| \leq \\ &\leq L^2 \int_{t-2h}^{t-h} \|x(s)\| ds - a \|x(t)\| \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$V_2 = L^2 \left(\int_{t-2h}^{t-h} ds \int_s^{t-h} \|x(s_1)\| ds_1 + h \int_{t-h}^t \|x(s)\| ds \right)$$

и $d^+V/dt \leq -(a - hL^2)\|x(t)\|$, где $V = V_1 + V_2$. Тем самым установлено, что при сделанных предположениях тривиальное решение системы (4.1) равномерно асимптотически устойчиво, если $a > hL^2$.

Для скалярных уравнений вида (4.1) это условие устойчивости по существу вытекает из [1], где оно было установлено методом функций Ляпунова при $n = 1$.

Отметим еще, что установленные в разд. 1 условия устойчивости уравнения (1.1) могут быть получены с помощью рассуждений настоящего раздела, которые применимы и при исследовании устойчивости нелинейных систем с произвольным последствием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
2. Burton T.A. Volterra integral and difference equations. N.Y.; London: Acad. Press, 1943. 313 p.
3. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
4. Kolmanovski V.B., Nosov V.R. Stability of functional differential equations. N.Y.; London: Acad. Press, 1986. 232 p.
5. Kolmanovski V.B., Myshkis A.D. Applied theory of functional differential equations. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Publs, 1992. 234 p.
6. Gopalsamy K. Equations of mathematical ecology. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ, 1992. 341 p.
7. Ste'pa'n G. Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions. N.Y.: Longman, 1989. 165 p.
8. Louisell J. Growth estimates and asymptotic stability for a class differential-delay equation having time-varying delay // J. Math. Anal. Applic. 1992. V. 164. N2. P.453-479.
9. Haddock J.R., Hornor W.E. A uniform asymptotic stability theorem for fading memory spaces // J. Math. Anal. Applic. 1991. V. 155. N 1. P. 55-65.
10. Колмановский В.Б. Об устойчивости некоторых систем с произвольным последствием // Докл. РАН. 1993. Т. 331. № 4. С. 421-424.
11. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
12. Kahane C.S. On the stability of solutions of linear differential systems with slowly varying coefficients // Czech. Math. J. 1992. V. 42. N 4. P. 715-726.
13. Amato F., Celentano G., Carofalo. New sufficient conditions for the stability of slowly varying linear systems // IEEE Trans.AC. 1993. V. 38. N 9. P. 1409-1411.
14. Лозинский С.М. Оценка погрешностей численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. ВУЗов, Математика. 1958. № 5. С. 52-90.
15. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.
16. Verbitskii V.I. On one class of stability conditions for nonlinear systems // First Intern. Conf. on dynamic systems and applic. Atlanta: Morehouse College, Georgia, 1993. P. 39.
17. Strom T. On logarithmic norms // SIAM J. Numer. Anal. 1975. V. 12. N 5. P. 741-753.
18. Brunner H. van der Houwen P.J. The numerical solution of Volterra equations. Amsterdam.: North-Holland, 1986. 588 p.