УДК 531.32

© 1995 г. А.В. Киргетов, Ф.Л. Черноусько

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ТРАЕКТОРИИ ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЙ

В ряде прикладных задач требуется восстановить непрерывную траекторию полета объекта по результатам замеров координат, проводимых непрерывно или в дискретные моменты времени с некоторой ошибкой. При этом требуется минимизировать отклонение восстановленной траектории от измеренной, учитывая также имеющиеся ограничения на линейное ускорение объекта. В данной работе предлагается постановка задачи и метод ее решения. Приводится пример.

1. Постановка задачи. Пусть материальная точка под действием управляющего ускорения $u(t)$ совершает одномерное движение, описываемое уравнениями

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = u \tag{1.1}$$

где x – координата, y – скорость точки. Ускорение $u(t)$ ограничено условием

$$|u(t)| \leqslant D \tag{1.2}$$

где D – постоянная. На интервале $t \in [0, T]$ производятся измерения координаты $x(t)$, результаты измерений обозначим через $h(t)$. Требуется восстановить траекторию объекта, т.е. найти функцию $x(t)$ на интервале $t \in [0, T]$ так, чтобы удовлетворялось ограничение (1.2) и чтобы отклонение $x(t) - h(t)$ было в некотором смысле наименьшим.

Поставленную задачу можно формализовать как некоторую задачу оптимального управления следующим образом.

Требуется определить управление $u(t)$, доставляющее минимум интегральному функционалу

$$J = \int_0^T \left[\frac{1}{2}\rho(t)(x - h(t))^2 + \frac{1}{2}Mu^2\right]dt \tag{1.3}$$

Здесь $\rho(t) \geqslant 0$ – весовая функция, $M > 0$ – некоторая, первоначально неопределенная, постоянная, в дальнейшем выбираемая из условия ограничения на ускорение (1.2). Фунция $x(t)$ в (1.3) связана с управлением $u(t)$ посредством дифференциальных уравнений (1.1). Значение координаты x в начальный и конечный моменты времени $t = [0, T]$ считаем не фиксированными, т.е. имеем задачу со свободными концами.

Весовую функцию $\rho(t)$ естественно задавать обратно пропорциональной квадрату среднеквадратичной ошибки измерения координаты $x(t)$. Если восстановление траектории производится по дискретным замерам $h_k = h(t_k)$ в моменты t_k, $k = 0, \ldots, N$, $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_N = T$, сделанным со среднеквадратичной ошибкой σ_k, то функцию $\rho(t)$ определим формулой

$$\rho(t) = \rho_k \delta(t - t_k), \quad \rho_k = 1/\sigma_k^2 \tag{1.4}$$

где $\delta(\cdot)$ – δ-функция Дирака. Отметим, что для восстановления многомерной траектории поставленную задачу надо независимо решить для каждой пространственной переменной.

2. Задача оптимального управления. Для определения оптимальных траекторий $x(t)$ и ускорения $u(t)$, доставляющих минимум функционалу (1.3), воспользуемся принципом максимума Понтрягина. В нашем случае функция Гамильтона равна

$$H = \psi_1 y + \psi_2 u + \tfrac{1}{2}\psi_0\left[\rho(t)(x - h(t))^2 + Mu^2\right] \tag{2.1}$$

Отсюда получаем уравнения для сопряженных переменных

$$\dot\psi_1 = -\partial H / \partial x = -\psi_0 \rho(t)(x - h(t)), \quad \dot\psi_2 = -\partial H / \partial y = -\psi_1, \quad \dot\psi_0 = 0 \tag{2.2}$$

Поскольку оба конца траектории свободны, условия трансверсальности записываются в виде

$$\psi_i(0) = \psi_i(T) = 0, \qquad i = 1, 2, \qquad \psi_0 \equiv -1 \tag{2.3}$$

Функция H из (2.2) при $\psi_0 = -1$ достигает по u максимума в критической точке, т.е. при $\partial H/\partial u = \psi_2 - Mu = 0$

Отсюда имеем

$$u = \psi_2/M \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в систему (1.1), с учетом (2.2) получаем, что оптимальная траектория определяется из системы уравнений

$$\dot x = y, \quad \dot y = \psi_2 / M, \quad \psi_2 = -\psi_1, \quad \dot\psi_1 = \rho(t)(x - h(t)) \tag{2.5}$$

с краевыми условиями (2.3). После решения этой краевой задачи оптимальное управление находится из выражения (2.4).

3. Дискретные измерения. Рассмотрим подробнее важный для практических приложений случай дискретных измерений. Для функции $\rho(t)$, описываемой выражением (1.4), система (2.5) допускает аналитическое решение. Действительно, на интервале (t_k, t_{k+1}), $k = 0, \ldots, N-1$, т.е. между моментами измерений, правая часть последнего уравнения (2.5) обращается в нуль, и система (2.5) легко интегрируется

$$\begin{gathered} x = x_k^+ + y_k^+\tau + \frac{\psi_{2k}^+}{2M}\tau^2 - \frac{\psi_{1k}^+}{6M}\tau^3, \quad y = y_k^+ + \frac{\psi_{2k}^+}{M}\tau - \frac{\psi_{1k}^+}{2M}\tau^2 \\ \psi_2 = \psi_{2k}^+ - \frac{\psi_{1k}^+}{M}\tau, \quad \psi_1 = \psi_{1k}^+ \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь $\tau = t - t_k$, а x_k^+, y_k^+, ψ_{2k}^+, ψ_{1k}^+ – значения соответствующих переменных в момент времени $t = t_k + 0$ непосредственно после k-го измерения. Из (3.1) заключаем, что на интервале движения (t_k, t_{k+1}) оптимальная траектория $x(t)$ представляется кубическим сплайном.

Переход траектории через момент времени t_k определяется соотношениями скачка, вытекающими из (2.5) и (1.4)

$$x_k^+ = x_k, \quad y_k^+ = y_k, \quad \psi_{2k}^+ = \psi_{2k}, \quad \psi_{1k}^+ = \psi_{1k} + \rho_k(x_k - h_k) \tag{3.2}$$

Здесь x_k, y_k, ψ_{1k}, ψ_{2k} – значения соответствующих переменных в момент $t = t_k - 0$ непосредственно перед k-м измерением. Таким образом, в моменты измерений терпит разрыв третья производная по времени от координаты или первая производная от управления; остальные переменные остаются непрерывными.

Объединяя (3.1) и (3.2), получим преобразование Φ_k: $R^4 \to R^4$, определяющее значения всех переменных в момент времени $t = t_{k+1} - 0$ по значениям в момент времени $t = t_k - 0$

$$x_{k+1} = x_k + y_k\tau_k + \frac{\psi_{2k}}{2M}\tau_k^2 - \frac{\psi_{1,k+1}}{6M}\tau_k^3, \quad y_{k+1} = y_k + \frac{\psi_{2k}}{M}\tau_k - \frac{\psi_{1,k+1}}{2M}\tau_k^2$$

$$\psi_{2,k+1} = \psi_{2k} - \frac{\psi_{1,k+1}}{M}\tau_k, \quad \psi_{1,k+1} = \psi_{1k} + \rho_k(x_k - h_k) \tag{3.3}$$

Здесь и далее $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 0, ..., N-1$. Перепишем (3.3) в матричном виде

$$z_{k+1} = A_k z_k + b_k, \quad k = 0,\dots,N-1 \tag{3.4}$$

Здесь $z_s = (x_s, y_s, \psi_{2s}, \psi_{1s})^T$, $s = 0,\dots,N$, символ T означает транспонирование и введено обозначение

$$A_k = \begin{Vmatrix} 1 - \dfrac{\tau_k^3}{6M}\rho_k & \tau_k & \dfrac{\tau_k^2}{2M} & \dfrac{\tau_k^3}{6M} \\ -\dfrac{\tau_k^2}{2M}\rho_k & 1 & \dfrac{\tau_k}{M} & \dfrac{\tau_k^2}{2M} \\ -\tau_k\rho_k & 0 & 1 & -\tau_k \\ \rho_k & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad b_k = \begin{Vmatrix} \dfrac{\tau_k^3}{6M} \\ \dfrac{\tau_k^2}{2M} \\ \tau_k \\ -1 \end{Vmatrix} \rho_k h_k \tag{3.5}$$

Аналогичным образом введем отображение Φ_k^δ: $R^4 \to R^4$, соответствующее преобразованию (3.2) и запишем его в матричном виде

$$z_k^+ = A_k^\delta z_k + b_k^\delta, \quad k = 0,\dots,N$$

$$A_k^\delta = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \rho_k & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad b_k^\delta = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\rho_k h_k \end{Vmatrix} \tag{3.6}$$

Чтобы найти оптимальные траекторию и управление, достаточно определить значение z_0 всех переменных в момент времени $t_0 - 0$. После этого значения координат и управления во все моменты времени $t = t_k - 0$ и $t = t_k + 0$, $k = 0, ..., N$, восстанавливаются с помощью отображений (3.4) и (3.6), а значения в промежуточные моменты времени $t \in (t_k, t_{k+1})$ определяются с помощью формул (3.1).

Казалось бы, значение z_0 можно определить следующим простым способом. Найдем отображение

$$\Phi = \Phi_N^\delta \circ \Phi_{N-1} \circ \dots \circ \Phi_0 \tag{3.7}$$

переводящее начальную точку z_0 в конечную z_N. Для определения переменных, удовлетворяющих краевым условиям (2.3), нужно решить систему линейных уравнений

$$z_N^+ = \Phi(z_0) \tag{3.8}$$

Здесь у каждого из векторов z_N^+ и z_0 известны по две компоненты: $\psi_{N1}^+ = \psi_{N2}^+ = \psi_{01} = \psi_{02} = 0$. Таким образом, задача отыскания z_0 свелась к алгебраической операции перемножения матриц при вычислении явного вида отображения (3.7) и к последующему решению системы линейных уравнений (3.8).

Однако такой простейший подход не приводит к успеху, поскольку возникают принципиальные вычислительные трудности.

Дело в том, что матрица A_k из (3.5) при всяком k имеет два собственных значения, по модулю больших единицы. Действительно, собственные значения λ матрицы A_k определяются характеристическим уравнением

$$P(\lambda) = \lambda^4 + (\kappa/6 - 4)\lambda^3 + (2\kappa/3 + 6)\lambda^2 + (\kappa/6 - 4)\lambda + 1 = 0, \quad \kappa = \rho_k \tau_k^3 / M > 0 \tag{3.9}$$

Полученное уравнение – возвратное, и его корни расположены симметрично относительно единичной окружности. На самой единичной окружности они лежат лишь в случае $\kappa = 0$, что невозможно (см. (3.9)). Поэтому всегда имеется два корня, по модулю больших единицы. Наличие таких собственных значений ведет к неустойчивости и экспоненциальному росту коэффициентов матриц, получаемых при вычислении отображения (3.7), а также экспоненциальному росту вычислительных ошибок. Все это делает расчеты невозможными уже при достаточно малых N. Поэтому от вычисления отображения (3.7) приходится отказаться и применить другой метод.

4. Метод матричной прогонки. Воспользуемся методом матричной прогонки [1]. Перепишем в следующем блочном виде матрицы и векторы, входящие в преобразование (3.4), и само это преобразование

$$z_k = \left\| \begin{matrix} \xi_{1k} \\ \xi_{2k} \end{matrix} \right\|, \quad \xi_{1k} = \left\| \begin{matrix} x_k \\ y_k \end{matrix} \right\|, \quad \xi_{2k} = \left\| \begin{matrix} \psi_{2k} \\ \psi_{1k} \end{matrix} \right\|, \quad A_k = \left\| \begin{matrix} A_{11}^k & A_{12}^k \\ A_{21}^k & A_{22}^k \end{matrix} \right\|$$

$$b_k = \left\| \begin{matrix} b_{1k} \\ b_{2k} \end{matrix} \right\|, \quad k = 0, \ldots, N \tag{4.1}$$

$$\xi_{1,k+1} = A_{11}^k \xi_{1k} + A_{12}^k \xi_{2k} + b_{1k}, \quad \xi_{2,k+1} = A_{21}^k \xi_{1k} + A_{22}^k \xi_{2k} + b_{2k}$$

Здесь A_{ij} и b_{ik} – (2×2)-матрицы и двумерные векторы, соответствующие векторам ξ_{1k} и ξ_{2k}. Сделаем в системе (4.1) подстановку

$$\xi_{2k} = Q_k \xi_{1k} + q_k, \quad k = 0, \ldots, N \tag{4.2}$$

где Q_k, q_k – пока неизвестные (2×2)-матрица и двумерный вектор. Получим

$$\begin{gathered} \xi_{1,k+1} = \left(A_{11}^k + A_{12}^k Q_k\right)\xi_{1k} + A_{12}^k q_k + b_{1k} \\ Q_{k+1}\xi_{1,k+1} + q_{k+1} = \left(A_{21}^k + A_{22}^k Q_k\right)\xi_{1k} + A_{22}^k q_k + b_{2k} \end{gathered} \tag{4.3}$$

Подставляя теперь $\xi_{1,k+1}$ из первого уравнения (4.3) во второе и приравнивая в левой и правой частях полученного соотношения коэффициенты при ξ_{1k} и свободные члены, получим систему

$$\begin{gathered} Q_{k+1}\left(A_{11}^k + A_{12}^k Q_k\right) = A_{21}^k + A_{22}^k Q_k \\ Q_{k+1}\left(A_{12}^k q_k + b_{1k}\right) + q_{k+1} = A_{22} q_k + b_{2k}, \quad k = 0, \ldots, N-1 \end{gathered} \tag{4.4}$$

Отметим, что если матрицы Q_k, Q_{k+1} и векторы q_k, q_{k+1} удовлетворяют системе (4.4), то уравнение, полученное из (4.3) после исключения $\xi_{1,k+1}$, удовлетворяется тождественно по ξ_{1k}. Соотношения (4.4) представляют собой рекуррентные уравнения, связывающие Q_k, q_k с Q_{k+1}, q_{k+1}.

Выберем теперь значения Q_N, q_N таким образом, чтобы краевое условие (2.3) на правом конце траектории удовлетворилось тождественно при любом ξ_{1N}. Напомним, что согласно (4.1) значения ξ_{1N}, ξ_{2N} соответствуют значениям координат и сопряженных переменных в момент времени $t_N - 0$. Поэтому, чтобы удовлетворить краевому условию $\xi_2(t_N + 0) \equiv 0$, необходимо к векторам ξ_{1N}, ξ_{2N} применить преобразование (3.6). Получим

$$\xi_2(t_N + 0) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ \rho_N & 0 \end{Vmatrix} \xi_{1N} + \xi_{2N} - \begin{Vmatrix} 0 \\ \rho_N h_N \end{Vmatrix} \equiv 0 \tag{4.5}$$

Подставим в (4.5) выражение для ξ_{2N}, определяемое подстановкой (4.2), и затем в полученном соотношении приравняем нулю коэффициенты при ξ_{1N} и свободные члены. Получим

$$Q_N = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -\rho_N & 0 \end{Vmatrix}, \quad q_N = \begin{Vmatrix} 0 \\ \rho_N h_N \end{Vmatrix} \tag{4.6}$$

Из соотношений (4.4) получим рекуррентные формулы, выражающие Q_k, q_k через Q_{k+1}, q_{k+1}

$$Q_k = \left(A_{22}^k - Q_{k+1}A_{12}^k\right)^{-1}\left(Q_{k+1}A_{11}^k - A_{21}^k\right), \quad q_k = \left(A_{22}^k - Q_{k+1}A_{12}^k\right)^{-1}\left(Q_{k+1}b_{1k} - b_{2k} + q_{k+1}\right) \tag{4.7}$$

Первое уравнение (4.7) определяет нелинейную связь между матрицами Q_k и Q_{k+1}, а второе – линейную связь между векторами q_k и q_{k+1}.

При помощи соотношений (4.7) и начальных условий (4.6) последовательно найдем матрицы $Q_{N-1}, ..., Q_0$ и векторы $q_{N-1}, ..., q_0$. Вычислив Q_0 и q_0, затем при помощи подстановки (4.2) и краевого условия (2.3) в начальный момент времени ($\xi_{20} \equiv 0$) получим начальную точку оптимальной траектории

$$\begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix} = \xi_{10} = -Q_0^{-1}q_0 \tag{4.8}$$

Итак, начальное значение $z_0 = (\xi_{10}\xi_{20})^T$ определено соотношением (4.8). Теперь оптимальная траектория легко восстанавливается в узлах t_k с помощью выражений (4.2) и первого из (4.3), а в промежуточных точках – с помощью (3.10).

Для окончательного решения задачи осталось распорядиться параметром M так, чтобы удовлетворить ограничению на ускорение (1.2). Максимальное ускорение $u_{\max}$ на оптимальной траектории является функцией M, причем $u_{\max} \to \infty$ при $M \to 0$ и $u_{\max} \to 0$ при $M \to \infty$. Не представляет труда численно, путем проб, найти значение M, при котором $|u_{\max}| = D$.

Таким образом, решение поставленной задачи о восстановлении траектории по данным измерений сводится к расчету матриц Q_k и векторов q_k по рекуррентным формулам (4.7) и к последующему расчету траектории по формулам (4.2)–(4.3) и (3.10), а также к подбору параметра M. Отметим, что наиболее трудоемкая часть этой процедуры – вычисление матриц Q_k при помощи первого (нелинейного) соотношения (4.7) – не зависит от результатов измерений h_k, входящих в векторы b_k, согласно (3.6). Следовательно, расчет матриц Q_k может быть проведен заранее, до проведения измерений. При проведении нескольких вариантов измерений с теми же самыми ошибками расчет матриц Q_k нет необходимости повторять: он проводится один раз.

Описанный алгоритм решения задачи восстановления траектории был реализован на компьютере. Проведенные расчеты показали работоспособность и хорошую точность метода.

5. Устойчивость метода прогонки. Метод прогонки, описанный в разд. 4, аналогичен изложенному в [1] (с. 106–111) методу матричной прогонки. Однако, как показала проверка, полученные в [1] достаточные условия корректности и устойчивости алгоритма в рассматриваемом случае не выполнены. Покажем, что данные достаточные условия можно существенно расширить в случае, когда матрицы A_k не зависят от номера k, т.е. при $A_k = A$, где A – постоянная матрица.

Будем называть метод прогонки корректным для заданных конечных условий Q_N, q_N в обратном времени, если для всех $k = N-1, ..., 0$ матрицы Q_k и векторы q_k однозначно определены. Из формул (4.7) с очевидностью следует, что для корректности необходимо и достаточно выполнение условия

$$\det(A_{22} - Q_{k+1}A_{12}) \neq 0, \quad k = N-1,\dots,0 \tag{5.1}$$

Индекс k у матриц A_{ij}^k в дальнейшем опускаем.

Будем называть метод прогонки асимптотически устойчивым для конечного условия Q_N в обратном времени, если первое из отображений (4.7) имеет асимптотически устойчивую неподвижную точку $Q_{k+1} = Q_k = Q_*$ и при этом матрица Q_N лежит в области притяжения этой точки, а второе из отображений (4.7) имеет асимптотически устойчивую неподвижную точку $q_{k+1} = q_k = 0$ в случае, если b_{1k}, b_{2k} положить равными нулю. Кроме того, потребуем, чтобы первое отображение из (4.3) имело асимптотически устойчивую неподвижную точку $\xi_{1,k+1} = \xi_{1k} = 0$ в случае, если q_k, b_{1k} положить равными нулю.

Отметим, что первые два условия гарантируют вычислительную устойчивость определения прогоночных последовательностей матриц Q_k и векторов q_k, а последние – устойчивость восстановления траектории.

Аналогичным образом можно определить корректность и асимптотическую устойчивость метода прогонки в прямом времени.

Прежде чем получить достаточные условия корректности и асимптотической устойчивости метода прогонки, выведем формулы преобразования матриц Q_k и векторов q_k при линейной замене переменных в фазовом пространстве. Рассмотрим отображение

$$\Phi_k(z) = Az + b_k : R^4 \to R^4, \quad k = 0,\dots,N-1 \tag{5.2}$$

и соответствующие ему отображения метода прогонки (4.4). Сделаем линейную замену переменных

$$z = Cz', \quad \Phi_k = C\Phi_k' \tag{5.3}$$

определенную невырожденной матрицей C. Здесь и далее переменные без штриха вверху – старые, со штрихом – новые. Перепишем (5.3) в блочном виде

$$\begin{aligned} \xi_1 &= C_{11}\xi_1' + C_{12}\xi_2', \\ \xi_2 &= C_{21}\xi_1' + C_{22}\xi_2' \end{aligned} \quad C = \begin{Vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{Vmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

При такой замене переменных отображение (5.2) примет вид

$$\Phi_k'(z') = A'z' + b_k', \quad A' = C^{-1}AC, \quad b_k' = C^{-1}b_k, \quad k = 0,\dots,N-1 \tag{5.5}$$

Выведем теперь формулы преобразований для Q_k, q_k. Потребуем, чтобы они удовлетворяли соотношениям

$$\xi_{2k}' = Q_k'\xi_{1k}' + q_k', \quad k = 0,\dots,N \tag{5.6}$$

аналогичным (4.2). Подставляя (5.6) в (5.4), а затем полученные выражения для ξ_{1k} и ξ_{2k} в (4.2), будем иметь

$$Q_k(C_{11} + C_{12}Q_k')\xi_{1k}' + Q_kC_{12}q_k' + q_k = (C_{21} + C_{22}Q_k')\xi_{1k}' + C_{22}q_k' \tag{5.7}$$

Далее, поскольку Q_k', q_k' не зависят от вектора ξ_{1k}' (так же, как Q_k, q_k, не зависят от ξ_{1k}), то приравняем в левой и правой частях соотношения (5.7) коэффициенты при ξ_{1k}' и свободные члены. В результате получим искомые формулы перехода

$$Q_k(C_{11} + C_{12}Q_k') - (C_{21} + C_{22}Q_k') = 0; \quad q_k = (C_{22} - Q_kC_{12})q_k' \tag{5.8}$$

Кроме (5.8), понадобятся формулы, связывающие Q'_{k+1}, q'_{k+1} с Q'_k, q'_k и выводящиеся аналогично формулам (4.7) для старых переменных

$$Q'_k = (A'_{22} - Q'_{k+1}A'_{12})^{-1}(Q'_{k+1}A'_{11} - A'_{21})$$
$$q'_k = (A'_{22} - Q'_{k+1}A'_{12})^{-1}(Q'_{k+1}b_{1k} - b_{2k} + q_{k+1}) \qquad (5.9)$$

Пусть теперь замена переменных (5.3) приводит матрицу A к жордановой форме.

В случае общего положения собственные значения $\lambda_1,\dots,\lambda_4$ матрицы A различны, и матрица A' диагональна. Следовательно, $A'_{12} = A'_{21} = 0$. Поэтому (5.9) можно переписать в виде

$$Q'_k = (A'_{22})^{-1}Q'_{k+1}A'_{11}, \quad q'_k = (A'_{22})^{-1}(Q'_{k+1}b'_{1k} - b'_{2k} + q'_{k+1}) \qquad (5.10)$$

Для определенности примем

$$A'_{11} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix}, \quad A'_{22} = \begin{Vmatrix} \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{Vmatrix}$$

Связь между матрицами Q'_k и Q'_{k+1} теперь линейная, в отличие от соотношений (4.7). Очевидно, что метод прогонки в новых переменных корректен всегда при любых стартовых условиях Q'_N, q'_N и любом количестве итераций N, если $\lambda_3 \neq 0$, $\lambda_4 \neq 0$. Кроме того, отображение, определяемое первой формулой (5.10), обладает единственной неподвижной точкой $Q_* = 0$, которая глобально асимптотически устойчива в случае, если $\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) < \min(|\lambda_3|, |\lambda_4|)$ и неустойчива при выполнении обратного неравенства. Отображение, определяемое второй формулой (5.10), если положить b'_{1k} и b'_{2k} равными нулю, имеет неподвижную точку $q_* = 0$, которая глобально асимптотически устойчива, когда $\min(|\lambda_3|, |\lambda_4|) > 1$. Далее, восстановление траектории производится по формуле (5.6) и, получаемой аналогично первой из (4.3), формуле

$$\xi'_{1,k+1} = A'_{11}\xi'_{1k} + b'_{1k} \qquad (5.11)$$

Отображение (5.11), если положить b'_{1k} равными нулю, имеет неподвижную точку $\xi_* = 0$, которая глобально асимптотически устойчива, когда $\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) < 1$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть собственные значения матрицы A, определяющей отображение (5.2), различны и два из них лежат вне, а два внутри единичного круга. Тогда для переменных, в которых матрица A принимает диагональный вид, а ее собственные значения упорядочены по возрастанию модуля ($|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| < 1 < |\lambda_3| \leqslant |\lambda_4|$), метод прогонки корректен и асимптотически устойчив в обратном времени для любых начальных условий.

Отметим, что из формул (5.10)–(5.11) аналогичным образом получается достаточное условие корректности и асимптотической устойчивости метода прогонки в прямом времени в виде: $\min(|\lambda_1|, |\lambda_2|) > 1 > \max(|\lambda_3|, |\lambda_4|)$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Если стартовое значение матрицы Q_N таково, что

$$\det\|C_{22} - Q_N C_{22}\| \neq 0, \quad \det\|C_{11} + C_{12}Q'_0\| \neq 0, \quad \det\|C_{21} + C_{22}Q'_0\| \neq 0 \qquad (5.12)$$

то при произвольном значении q_N метод прогонки корректен и асимптотически устойчив в обратном времени для исходных переменных.

Доказательство. Для заданных значений Q_N, q_N последовательности Q_k и q_k можно строить не только по формулам (4.7), но и с помощью замены переменных (5.3) по формулам (5.8), (5.10), что показано на диаграмме

$$\begin{tikzcd}
Q_N, q_N \arrow[r, "(4.7)"] \arrow[d, "(5.8)"'] & Q_{N-1}, q_{N-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "(4.7)"] & Q_0, q_0 \\
Q'_N, q'_N \arrow[r, "(5.10)"'] & Q'_{N-1}, q'_{N-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "(5.10)"'] & Q'_0, q'_0 \arrow[u, "(5.8)"']
\end{tikzcd}$$

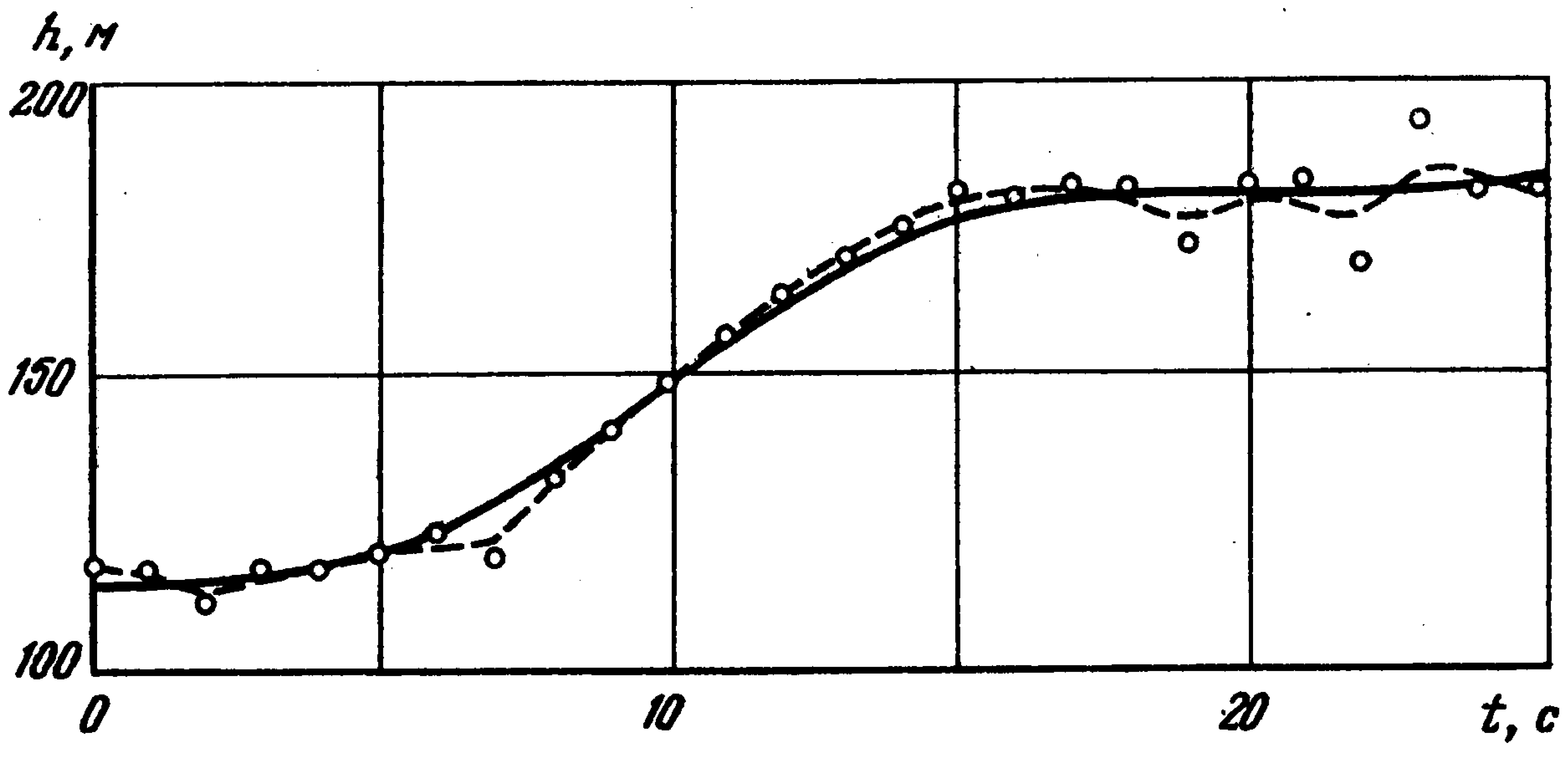
Из соотношения (5.8) при $k = N$ и $k = 0$ получим следующие условия разрешимости. Переход от Q_N, q_N к Q'_N, q'_N определен, если $\det\|C_{22} - Q_N C_{12}\| \neq 0$, а переход от Q'_0, q'_0 к Q_0, q_0 определен, если $\det\|C_{11} + C_{12}Q'_0\| \neq 0$. Поскольку для определения начальных условий x_0, y_0 нужна матрица Q_0^{-1} (см. (4.8)), то матрица Q_0 должна быть невырождена. Из (5.8) следует, что для этого необходимо и достаточно, чтобы $\det\|C_{11} + C_{12}Q'_0\| \neq 0$, $\det\|C_{21} + C_{22}Q'_0\| \neq 0$. Теорема 2 доказана.

Применим теперь полученные результаты к матрице A, определяемой выражением (3.5) при $\tau_k = \tau$, $\rho_k = \rho$. Поскольку характеристическое уравнение (3.9) матрицы A – возвратное, то собственные значения этой матрицы различны и располагаются симметрично относительно единичной окружности. Следовательно, условие теоремы 1 выполнено. В силу теоремы 2 метод прогонки корректен и асимптотически устойчив, если для конечных значений Q_N, q_N из (4.6) выполнены неравенства (5.12). Справедливость этих неравенств всегда можно установить численно для выбранных значений параметров системы τ, ρ, M. Отметим, что матрицу Q'_0 можно считать равной нулю уже при сравнительно небольшом количестве итераций N, поскольку ее коэффициенты имеют порядок $O(\varepsilon^N)$, где $\varepsilon = |\lambda_2| / |\lambda_3| < 1$. В частности, для рассмотренного ниже примера имеем $N = 40$, $\varepsilon < 1/2$. Поэтому в (5.12) можно с высокой точностью положить $Q'_0 = 0$ и затем проверить условия

$$\det\|C_{22} - Q_N C_{12}\| \neq 0, \quad \det\|C_{11}\| \neq 0, \quad \det\|C_{21}\| \neq 0$$

Эта проверка была проделана численно в рассматриваемом примере.

6. Пример. Рассмотрим модельную задачу о движении вертолета, который из состояния горизонтального полета совершает маневр по набору высоты. Будем считать, что горизонтальная составляющая его скорости постоянна как по величине, так и по направлению. Движение по вертикали осуществляется за счет управляющего ускорения. Измерения



высоты h производятся с интервалом $\tau = 1$ с. Маневр занимает 15 с, а общее время движения 25 с. Таким образом, $N = 25$. Величина σ принята равной 2 м. Результат сглаживания траектории по алгоритму, описанному выше, в случае, когда абсолютная величина управляющего ускорения не превосходит $D = 2$ м/с^2 (см. (1.2)), изображен на фигуре. По горизонтали отложено время в секундах, по вертикали – высота в метрах. Кружками отмечены измеренные значения, а непрерывной кривой – сглаженная траектория. Для иллюстрации зависимости степени гладкости траектории от величины допустимого ускорения та же исходная траектория была сглажена при допустимом ускорении 30 м/с^2. Результат приведен штриховой линией.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16286) и Международного научного фонда (M4F000).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. 592 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.XI.1993