УДК 531:521.135

© 1995 г. В.Н. Тхай

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБРАТИМЫХ СИСТЕМ

Рассматривается обратимая система с малым параметром μ. При $\mu = 0$ порождающая система имеет периодическое движение, симметричное относительно неподвижного множества автоморфизма системы. Показано, что это периодическое движение продолжается по малому параметру в неизолированном по Пуанкаре случае при выполнении некоторых условий только на порождающую систему. Симметричные периодические решения построены как для нерезонансной, так и для резонансной системы.

В плоской неограниченной задаче трех тел в качестве малого параметра выбрана величина, характеризующая взаимодействие двух выбранных из трех тел. Показано, что в этой задаче существуют решения, в которых тела движутся по кривым, близким к окружностям. Обсуждается вопрос применимости результата к системе типа Солнце–Земля–Луна.

1. Метод Ляпунова–Пуанкаре в обратимых системах. Рассмотрим обратимую систему

$$\mathbf{u}^{\cdot} = \mathbf{U}(\mathbf{u}, \upsilon) + \mu\mathbf{U}_1(\mu, \mathbf{u}, \upsilon, t)$$

$$\upsilon^{\cdot} = \mathbf{V}(\mathbf{u}, \upsilon) + \mu\mathbf{V}_1(\mu, \mathbf{u}, \upsilon, t), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{R}^l, \upsilon \in \mathbf{R}^n \quad (l \geq n) \tag{1.1}$$

где μ – малый параметр, $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{V}_1$ – 2π-периодические функции t или не зависят от t, а $\mathbf{M} = \{\mathbf{u}, \upsilon : \upsilon = 0\}$ – неподвижное множество автоморфизма. Пусть при $\mu = 0$ система (1.1) допускает $2\pi k$-периодическое ($k \in \mathbf{N}$) движение $\mathbf{u} = \varphi(t)$, $\upsilon = \psi(t)$, пересекающее множество $\mathbf{M}$ в момент времени $t = 0 \pmod{2\pi}$. Выполним замену

$$\mathbf{u} = \varphi(t) + \mathbf{p}, \quad \upsilon = \psi(t) + \mathbf{q}$$

Тогда уравнения для $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$

$$\mathbf{p}^{\cdot} = \mathbf{A}(t)\mathbf{p} + \mathbf{B}(t)\mathbf{q} + \mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) + \mu\mathbf{U}_1(\mu, \varphi(t) + \mathbf{p}, \psi(t) + \mathbf{q}, t)$$

$$\mathbf{q}^{\cdot} = \mathbf{C}(t)\mathbf{p} + \mathbf{D}(t)\mathbf{q} + \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) + \mu\mathbf{V}_1(\mu, \varphi(t) + \mathbf{p}, \psi(t) + \mathbf{q}, t) \tag{1.2}$$

где через $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ обозначены члены выше первого порядка от $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, являются [1] обратимыми, а неподвижное множество автоморфизма системы (1.2) совпадает с гиперплоскостью $\mathbf{q} = 0$. Правые части уравнений (1.2) являются $2\pi k$-периодическими функциями t.

При $\mu = 0$ система (1.2) имеет решение $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, $\mathbf{q} = \mathbf{0}$. Поставим задачу о существовании $2\pi k^*$ (k^* кратно k) периодических решениях системы (1.2) при $\mu \neq 0$.

Пусть κ_s – характеристические показатели линейной системы

$$\mathbf{p}^{\cdot} = \mathbf{A}(t)\mathbf{p} + \mathbf{B}(t)\mathbf{q}, \quad \mathbf{q}^{\cdot} = \mathbf{C}(t)\mathbf{p} + \mathbf{D}(t)\mathbf{q} \tag{1.3}$$

Тогда при $n = l$ и $\kappa_s \neq i\nu/k^*$ ($\nu \in \mathbf{Z}$) задачу решает теорема Пуанкаре [2].

Случай нулевых κ_s с простыми элементарными делителями исследован в [3]. Полученное решение требует построения системы независимых периодических решений, отвечающих кратному нулевому корню системы, сопряженной (1.3), и привлечения для анализа членов в (1.2), зависящих от малого параметра.

Оказывается, для рассматриваемой обратимой системы задача имеет более полное и удобное для приложений решение.

Лемма 1. Линейная обратимая система (1.3) имеет по крайней мере l-n нулевых характеристических показателей и им отвечают простые элементарные делители.

Доказательство. В силу обратимости системы (1.3), наряду с решением $\mathbf{p} = \boldsymbol{\varphi}^*(t)$, $\mathbf{q} = \boldsymbol{\psi}^*(t)$, имеет также решения

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\varphi}^*(t) + \boldsymbol{\varphi}^*(-t), \quad \mathbf{q} = \boldsymbol{\psi}^*(t) - \boldsymbol{\psi}^*(-t) \tag{1.4}$$

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\varphi}^*(t) - \boldsymbol{\varphi}^*(-t), \quad \mathbf{q} = \boldsymbol{\psi}^*(t) + \boldsymbol{\psi}^*(-t) \tag{1.5}$$

Так как на (1.4) имеем $\mathbf{q}(0) = \mathbf{0}$, а на (1.5) – $\mathbf{p}(0) = \mathbf{0}$, то всегда можно построить фундаментальную систему решений, в каждой из решений которой $\mathbf{p}$ – четная (нечетная) функция t, а $\mathbf{q}$ – нечетная (четная) функция t. В силу единственности фундаментальная система с единичной матрицей $\mathbf{E}$ начальных условий имеет вид

$$\mathbf{S}(t) = \begin{Vmatrix} \mathbf{p}^+(t) & \mathbf{p}^-(t) \\ \mathbf{q}^-(t) & \mathbf{q}^+(t) \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{S}(0) = \mathbf{E}$$

где плюс(минус) означает матрицу из четных(нечетных) функций.

Пусть $\mathbf{G}$ – характеристическая матрица. Тогда $\mathbf{S}(k\pi) = \mathbf{G}\,\mathbf{S}(-k\pi)$ и характеристическое уравнение $\det(\mathbf{G} - \rho\mathbf{E}) = 0$ эквивалентно уравнению $\det(\mathbf{S}(k\pi) - \rho\mathbf{S}(-k\pi)) = 0$. А матрица $\mathbf{S}(k\pi) - \mathbf{S}(-k\pi)$ имеет, по крайней мере, l-n нулевых собственных значений с простыми элементарными делителями.

Следствия. 1°. Невырожденным линейным преобразованием система (1.3) приводится к виду

$$\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{A}^*(t)\boldsymbol{\eta} + \mathbf{B}^*(t)\boldsymbol{\zeta}, \quad \boldsymbol{\zeta}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{C}^*(t)\boldsymbol{\eta} + \mathbf{D}^*(t)\boldsymbol{\zeta} \tag{1.6}$$

($\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{R}^{l-n}$; $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{R}^n$) с автоморфизмом $t \to -t$, $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) \to (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, -\boldsymbol{\zeta})$.

2°. Линейная система

$$\mathbf{p}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{p}, \ \mathbf{A}(-t) = -\mathbf{A}(t), \ \mathbf{A}(t+T) = \mathbf{A}(t) \quad (T \neq 0); \ \mathbf{p} \in \mathbf{R}^l$$

устойчива и имеет l линейных по $\mathbf{p}$, T-периодических по t интегралов.

Лемма 2. Пусть $\kappa_1, \ldots, \kappa_\alpha, \pm\kappa_{\alpha+1}, \ldots, \pm\kappa_m$ – остальные характеристические показатели системы (1.3) кратности соответственно $\beta_1, \ldots, \beta_m$, причем $\kappa_1 = \ldots = \kappa_\alpha = 0$, $\kappa_{\alpha+1} \neq$ $\neq 0, \ldots, \kappa_m \neq 0$, а каждый из показателей κ выписан столько раз, сколько групп решений ему отвечает. Тогда система (1.3) приводится к виду

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{0} \quad (\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^{l-n}), \quad \eta^{\boldsymbol{\cdot}}_{1,\nu} = \kappa_\nu \zeta_{1,\nu} \\
&\eta^{\boldsymbol{\cdot}}_{1,s} = 0, \ \zeta^{\boldsymbol{\cdot}}_{1,s} = \eta_{1,s}, \quad \zeta^{\boldsymbol{\cdot}}_{1,\nu} = \kappa_\nu \eta_{1,\nu} \\
&\eta^{\boldsymbol{\cdot}}_{i,s} = \zeta_{i-1,s}, \quad \eta^{\boldsymbol{\cdot}}_{j+1,\nu} = \kappa_\nu \zeta_{j+1,\nu} + \zeta_{j,\nu} \\
&\zeta^{\boldsymbol{\cdot}}_{i,s} = \eta_{i,s}, \quad \zeta^{\boldsymbol{\cdot}}_{j+1,\nu} = \kappa_\nu \eta_{j+1,\nu} + \eta_{j,\nu} \\
&(i = 2, \ldots, \beta_s/2; \ j = 1, \ldots, \beta_\nu - 1; \ s = 1, \ldots, \alpha; \ \nu = \alpha + 1, \ldots, m)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

с одним из автоморфизмов: 1) $t \to -t$, $\boldsymbol{\xi} \to \boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta} \to \boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\zeta} \to -\boldsymbol{\zeta}$; 2) $t \to -t$, $\boldsymbol{\xi} \to \boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta} \to -\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\zeta} \to \boldsymbol{\zeta}$.

Доказательство. Справедливость леммы следует из теоремы Ляпунова [4] о приводимости линейной периодической системы к системе с постоянными коэффициентами и сохранения [1] при этом свойства обратимости, а также из сформулированного выше следствия.

Теорема 1. Пусть система (1.2) в переменных ξ, η, ζ обладает автоморфизмом $t \to -t$, $(\xi, \eta) \to (\xi, \eta)$, $\zeta \to -\zeta$, а ее линейная относительно ξ, η, ζ часть при $\mu = 0$ совпадает с (1.7). Тогда, если $\kappa_\nu \neq \pm iN/k^*$ ($N = 1,\ldots, k^*$), то при достаточно малом μ система (1.1) имеет $l - n + 1$ параметрическое от начальных условий и параметра μ семейство $2\pi k^*$-периодических решений, симметричных относительно неподвижного множества **M** автоморфизма системы и обращающихся в порождающее $\mathbf{u} = \varphi(t)$, $\upsilon = \psi(t)$ при $\mu = 0$.

Следствия. 1°. $2\pi k$ – периодические решения всегда существуют, если в переменных ξ, η, ζ автоморфизм имеет вид $t \to -t$, $(\xi, \eta) \to (\xi, \eta)$, $\zeta \to -\zeta$ и среди чисел κ_ν нет чисто мнимых.

2°. Если система (1.3) имеет не более $l - n$ нулевых характеристических показателей, то $2\pi k$-периодические решения существуют при $\kappa_\nu \neq \pm iN/k^*(N = 1,\ldots, k)$.

Замечание. При определении вида автоморфизма системы (1.2), записанной в переменных ξ, η, ζ, полезно использовать первые интегралы порождающей системы.

Доказательство. Существование $2\pi k^*$-периодического движения установим, исходя из теоремы Хейнбокла–Страбла [5]. Если $\xi(\xi^0, \eta^0, \zeta^0, \mu, t)$, $\eta(\xi^0, \eta^0, \zeta^0, \mu, t)$, $\zeta(\xi^0, \eta^0, \zeta^0, \mu, t)$ – решение системы (1.2) с линейной частью (1.7) и начальными значениями ξ^0, η^0, ζ^0, то достаточными условиями его $2\pi k^*$-периодичности являются

$$\zeta^0 = 0, \quad \zeta(\xi^0, \eta^0, \zeta^0, \mu, \pi k^*) = 0 \tag{1.8}$$

Если полученная система $2n$ функциональных уравнений относительно η^0, ζ^0 совместна, то периодическое решение существует. При этом η^0, ζ^0 находятся как функции ξ^0, μ и $2\pi k^*$ – периодические решения образуют $l - n + 1$ параметрическое семейство.

В первом по ξ^0, η^0, ζ^0, приближении без учета членов, зависящих от μ, систему (1.8) можно составить, интегрируя (1.7). В этом приближении (1.8) распадается на m подсистем, отвечающих характеристическим показателям с одной группой решений. Поэтому функциональный определитель системы (1.8), вычисленный при $\xi^0 = 0$, $\eta^0 = 0$, $\zeta^0 = 0$, $\mu = 0$ равен произведению m функциональных определителей. Как и в теореме Пуанкаре, для $\kappa_\nu \neq 0$ ($\nu = \alpha + 1,\ldots, m$) определитель отличен от нуля при $\kappa_\nu \neq \pm iN/k^*$ ($N = 1,\ldots, k^*$). Что касается нулевых показателей, то соответствующая подсистема имеет вид

$$c_{21}^{(\nu)} + \ldots = 0, \ldots, \quad c_{2,\beta_s/2}^{(\nu)} + \ldots = 0$$

$$\gamma c_{11}^{(s)} + c_{21}^{(s)} + \ldots = 0, \quad (\gamma = \pi k^*)$$

$$\frac{\gamma^3}{3!} c_{11}^{(s)} + \frac{\gamma^3}{2!} c_{21}^{(s)} + \gamma c_{12}^{(s)} + c_{22}^{(s)} + \ldots = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\gamma^{\beta_s - 1}}{(\beta_s - 1)!} c_{11}^{(s)} + \frac{\gamma^{\beta_s - 1}}{(\beta_s - 2)!} c_{12}^{(s)} + \ldots + \gamma c_{1,\beta_s/2}^{(s)} + c_{2,\beta_s/2}^{(s)} + \ldots = 0$$

(c – начальные значения η^0, ζ^0, а невыписанные перед знаком равенства члены нелинейны по c или зависят от μ) и ее функциональный определитель, очевидно, отличен от нуля.

Теорема 1 доказана. При применении ее для исследования конкретных задач часто предпочтительна следующая формулировка.

Теорема 2. Если среди корней α уравнения $\det\|q^+(2\pi k) - \alpha E\| = 0$ нет равных $\cos(2\pi kN/k^*)$, то при достаточно малом μ система (1.2) имеет $l - n + 1$ параметрическое от начальных условий и параметра μ семейство симметричных $2\pi k^*$ – периодических решений, обращающихся в порождающее $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ при $\mu = 0$.

Доказательство. Пусть ρ – корень характеристического уравнения. Тогда $2\alpha = \rho + \rho^{-1}$ является собственным значением матрицы $S(2\pi k) + S(-2\pi k)$. Если $l \geq n$, то все ρ, за исключением $l - n$, равных 1, определяются из уравнения

$$\rho^2 - 2\alpha_s\rho + 1 = 0, \quad \det\|\mathbf{q}^+(2\pi k) - \alpha_s E\| = 0, \quad (s = 1,\ldots, n)$$

что доказывает теорему.

Замечание. Для определения характеристических показателей линейной обратимой системы достаточно построить только n частных решений. Это особенно удобно при $n = 1$.

2. Нерезонансная колебательная система. Исследуем задачу о колебаниях в системе

$$\begin{aligned}
\eta_s^{\cdot} &= i\omega_s\eta_s + i\eta_s\sum_{j=1}^{n} C_{sj}\eta_j\bar\eta_j + \mu H_s(\mu,\eta,\bar\eta,t) \\
\bar\eta_s^{\cdot} &= -i\omega_s\bar\eta_s - i\bar\eta_s\sum_{j=1}^{n} C_{sj}\eta_j\bar\eta_j + \mu\bar H_s(\mu,\eta,\bar\eta,t) \quad (s = 1,\ldots, n)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

с 2π-периодическими по t или не зависящими от t правыми частями и автоморфизмом $(t, \eta, \bar\eta) \to (-t, \bar\eta, \eta)$.

Здесь ω_s, $C_{sj}(\omega_s > 0)$ – действительные постоянные, а черта означает комплексно-сопряженную величину.

Поставленная задача возникает при изучении малых колебаний обратимой системы в окрестности нуля при наличии только чисто мнимых характеристических показателей и отсутствии резонансов до четвертого порядка включительно и, кроме того, представляет самостоятельный интерес. Все выводы будут справедливыми и при наличии дополнительных уравнений по переменной ξ, имеющей такой же смысл как и в (1.7).

При $\mu = 0$ система (2.1) допускает только условно-периодические движения

$$\eta_s = \sqrt{r_s}e^{i\theta_s}, \quad r_s^{\cdot} = 0, \quad \theta_s^{\cdot} = \omega_s + 2\sum_{j=1}^{n} C_{sj}r_j \quad (s = 1,\ldots,n)$$

Среди этих движений счетному множеству точек по начальным значениям r

$$k(\omega_s + 2\sum_{j=1}^{n} C_{sj}r_j^0) = k_s; \quad k, |k_s| \in N$$

отвечают $2\pi k$-периодические движения. В окрестности выбранного периодического движения положим

$$\eta_s = \sqrt{r_s^0}e^{i\theta_s}(1 + x_s), \quad \bar\eta_s = \sqrt{r_s^0}e^{i\theta_s}(1 + \bar x_s)$$

Тогда уравнения для x_s, $\bar x_s$ примут вид

$$x_s^{\cdot} = 2i\sum_{j=1}^{n} C_{sj}r_j^0(x_j + \bar x_j) + \ldots \quad (s = 1,\ldots,n) \tag{2.2}$$

где невыписанные члены имеют порядок не ниже первого от $\mathbf{x}$, $\bar{\mathbf{x}}$ или зависят от μ и являются $2\pi k$-периодическими функциями t. В действительных переменных $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ ($\mathbf{x} = \mathbf{p} + i\mathbf{q}$) система (2.2) приобретает вид

$$p_s^{\cdot} = 0 + \ldots, \quad q_s^{\cdot} = 2\sum_{j=1}^{n} C_{sj} r_j^0 p_j + \ldots \tag{2.3}$$

Так как множество неподвижных точек автоморфизма для (2.3) совпадает с гиперплоскостью $\mathbf{q} = \mathbf{0}$, то достаточным условием существования в (2.1) $2\pi k$-периодического решения, близкого к порождающему, является $\det\left\|C_{sj} r_j^0\right\| \neq 0$. Действительно, в этом случае выписанная часть системы (2.3) является частным случаем системы (1.7).

Порождающая система имеет и другие периодические решения. В самом деле, при $\mu = 0$ в (2.1) гиперплоскости $\eta_s = \overline{\eta}_s = 0$ являются интегральными. Поэтому, если на порождающем решении $\eta_{\nu+1} = \ldots \eta_n = 0$, то достаточными условиями существования в (2.1) $2\pi k$-периодического решения являются

$$\omega_\alpha + 2\sum_{j=1}^{\nu} C_{\alpha j} r_j^0 = \frac{k_\alpha}{k}, \quad \omega_\beta + 2\sum_{j=1}^{\nu} C_{\beta j} r_j^0 \neq \frac{l}{k}, \quad \det\left\|C_{\alpha j} r_j^0\right\|_1^\nu \neq 0 \tag{2.4}$$

$$k \in N; \; k_\alpha, l \in Z \quad (\alpha = 1, \ldots, \nu; \; \beta = \nu + 1, \ldots, n)$$

Теорема 3. При выполнении (2.4) система (2.1) при достаточно малом μ имеет $2\pi k$-периодическое решение, совпадающее с порождающим при $\mu = 0$.

Следствие. При $C_{ss} \neq 0$ и отсутствии резонансов до четвертого порядка включительно ляпуновские семейства периодических движений существуют почти для всех начальных условий за исключением счетного множества точек по r_s^0.

В самом деле в автономной системе (2.1) при $C_{11} \neq 0$ любое решение порождающей системы на гиперплоскости $\eta_2 = \ldots \eta_n = 0$ является периодическим, если $\omega_1^* = \omega_1 + 2C_{11} r_1^0 \neq 0$, что выполняется при малых r_1^0. А условие $l(\omega_\beta + 2C_{\beta 1} r_j^0) \neq k_1 \omega_1^*$; $k_1, l \in \mathbf{Z}$ выделяет счетное множество точек r_1^0, для которых периодические движения не продолжаемы по малому параметру μ по крайней мере по теории из разд. 1.

3. Резонанс четвертого порядка $4\omega = N$, $N \in \mathbf{N}$. Рассмотрим для простоты изложения случай двух переменных, когда в (1.1) $l = n = 1$. Обобщение результатов на случай произвольных чисел l и n ($l \geq n$) несложно и приводит к более громоздким вычислениям.

Систему в комплексно-сопряженных переменных $\eta, \overline{\eta}$ можно записать [1] в виде

$$\eta^{\cdot} = i\left[\omega + C_{1,0}\eta\overline{\eta} + C_{-1,1}(\eta\overline{\eta})^{-1}(\overline{\eta}e^{i\omega t})^4\right]\eta + \mu H(\mu, \eta, \overline{\eta}, t) \tag{3.1}$$

где функция H является 2π-периодической по t, а $C_{1,0}$, $C_{-1,1}$ – действительные постоянные.

Выполним замену $\eta = ze^{i\omega t}$, $\overline{\eta} = \overline{z}e^{-iwt}$. Тогда

$$z^{\cdot} = i(C_{1,0}z^2\,\overline{z} + C_{-1,1}\overline{z}^3) + \ldots \tag{3.2}$$

где невыписанные члены имеют порядок μ и представляют собой 8π-периодические функции t (ниже полагаем $N = 1$). Порождающую систему, полученную из (3.2) при $\mu = 0$, удобно анализировать в полярных координатах $r, \theta : z = \sqrt{r}e^{i\theta_1}, \theta = 4\theta_1$. Имеем

$$r^{\cdot} = 2C_{-1,1}r^2 \sin\theta, \quad \theta^{\cdot} = 4(C_{1,0} + C_{-1,1}\cos\theta)r$$

Применяя к этой системе обобщение [1] теоремы Хейнбокла–Страбла [5] выводим: при $|C_{1;0}| > |C_{-1,1}|$ все движения периодические. Получим движения по эллипсам

$$r(\theta)\frac{\lambda^*}{4C_{1,0}(1+\varepsilon\cos\theta)},\ \theta^{\cdot}=\lambda^*=4r_0(C_{1,0}+C_{-1,1}\cos\theta_0),\ \varepsilon=\frac{C_{-1,1}}{C_{1,0}} \tag{3.3}$$

(r_0, θ_0 – начальные значения переменных r, θ), причем, без ограничения общности, можно полагать $\theta_0 = 0$. Укажем, что эллипсы пересекают неподвижное множество ($\sin\theta = 0$) в двух точках.

Выделим среди движений (3.3) $8\pi k^*$-периодические ($k^*\in \mathbf{N}$) по переменной t, для которых $\lambda^* k^* = s \in \mathbf{Z}$."Амплитуды" этих движений находятся из соотношения

$$4r_0(C_{1,0} + C_{-1,1}) = s/k^*$$

Если $k^* = 1$, то при любом $s \in \mathbf{Z}$ имеем 8π-периодические по t движения, для которых "амплитуды" могут быть произвольно большими (с ростом $|s|$), начиная с величины

$$4r_0^{\min} = \left|C_{1,0} + C_{-1,1}\right|^{-1}$$

Таким образом, колебания с резонансной частотой ω происходят вне ограниченной области, заключенной внутри эллипса (3.3) с $r_0 = r_0^{\min}$. Что касается субгармонических колебаний ($k^* = 2,3,\ldots$), то их амплитуда может быть сколь угодно мала с ростом k^*.

Выясним, при каких условиях периодические движения (3.3) продолжаются по малому параметру μ. Для этого выполним в (3.2) замену $z=\sqrt{r}(\theta)\exp(i\theta_1)(1+x)$. Тогда в действительных переменных p, q ($x = p + iq$) получим

$$dp/d\theta = 2\varepsilon C_{-1,1}(p\sin\theta - q\cos\theta)r^2(\theta)/\lambda^* + \ldots \tag{3.4}$$

$$dp/d\theta = 2C_{-1,0}[(1 + \varepsilon\cos\theta)p + \varepsilon q\sin\theta]r^2(\theta)/\lambda^* + \ldots$$

Согласно теореме 1 отсутствие среди характеристических показателей $\pm\kappa$ этой системы, равных $iN/(4|s|)$, $N \in \mathbf{N}$, гарантирует продолжение $8\pi k^*$-периодического движения по μ. Определение κ можно провести, построив на $\theta \in [0, 8\pi|s|]$ одно частное решение с начальными условиями, например, $p = 0$, $q = 1$. Однако, здесь задача будет решена с использованием интегралов порождающей системы.

Порождающая система – (3.2) при $\mu = 0$ – имеет интеграл энергии

$$V = 2C_{1,0}(z\bar{z})^2 + C_{-1,1}(z^4 + z^{-4}) = \text{const}$$

В окрестности периодического движения (3.3) интеграл запишется в виде

$$[(C_{1,0}+C_{-1,1}\cos\theta)p - C_{-1,1}q\sin\theta)r^2(\theta)+\ldots = h(\text{const}) \tag{3.5}$$

где члены выше первого порядка относительно p, q не выписаны. Интеграл (3.5) позволяет взять в (3.4) вместо переменной p новую переменную h. Получим систему

$$dh/d\theta = + \ldots,\quad dq/d\theta = 2[h + 2C_{1,0}\varepsilon q\sin\theta]/\lambda^* + \ldots$$

с автоморфизмом $\theta \to -\theta$, $h \to h$, $q \to -q$. Очевидно, эта система удовлетворяет всем условиям теоремы 1.

Теорема 4. Пусть в системе (3.1) выполнено условие $|C_{1,0}| > |C_{-1,1}|$. Тогда при достаточно малых μ система (3.1) имеет счетное множество $8\pi k^*$-периодических движений, близких к движениям (3.3). При этом "амплитуда" r_0 движений с резонансной частотой кратна величине $r_0^{\min}$.

Замечание. Учитывая, что при $|C_{1,0}| \le |C_{-1,1}|$ движения порождающей системы не являются периодическими, можно утверждать, что все $8\pi k^*$-периодические по t периодические движения продолжаются по малому параметру.

4. Резонанс второго порядка $2\omega = N$, $N \in \mathbf{N}$. Рассмотрим задачу о периодических движениях системы

$$\eta^{\cdot} = i\omega\eta + i\left[C_{1,0}\eta\bar\eta + C_{-1,2}\bar\eta^3 e^{-4i\omega t} + C_{2,1}\eta^3 e^{2i\omega t} + C_{0,-1}\eta\bar\eta^2 e^{-2i\omega t}\right] + \mu H(\mu,\eta,\bar\eta,t) \tag{4.1}$$

(комплексно-сопряженное уравнение опущено) с 2π-периодической по t функцией H и автоморфизмом $(t, \eta, \bar\eta) \to (t, \bar\eta, \eta)$; C_{sj} – действительные постоянные. Выполним замену $z = \eta\exp(-i\omega t)$. Тогда правые части полученной системы будут 4π-периодическими по t (для краткости полагаем $N = 1$) и в полярных координатах $r, \theta (z = \sqrt{r}\exp(i\theta_1),\ \theta = 2\theta_1)$ при $\mu = 0$ имеем

$$r^{\cdot} = 2(C_- \sin\theta + C_{-1,2}\sin 2\theta)r^2,\ \ \theta^{\cdot} = 2\Delta(\theta)r \tag{4.2}$$

$$\Delta(\theta) = C_{1,0} + C_+\cos\theta + C_{-1,2}\cos 2\theta,\ \ C_\pm = C_{0,1} \pm C_{2,1}$$

Движения этой системы будут периодическими [1], если $\theta^{\cdot} \ne 0$ при $r \ne 0$ и любом θ. Поэтому необходимыми и достаточными условиями периодичности являются

$$D = C_+^2 - 8C_{-1,2}C_* \ge 0,\ \ ||C_+| - \sqrt{D}| < 4\sqrt{C_{-1,2}},\ \ C_* = C_{1,0} - C_{-1,2} \tag{4.3}$$

В этом случае зависимость $r(\theta)$ определяется из соотношения

$$\frac{dr}{r} = \frac{C_-\sin\theta + C_{-1,2}\sin 2\theta}{\Delta(\theta)}d\theta = f(\theta)d\theta$$

Отсюда

$$r(\theta) = r_0\exp\int_0^\theta f(\theta),\ \ \int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = 0$$

Зависимость $\theta(t)$ найдем, интегрируя соотношение

$$r_0 dt = f_1^{-1}(\theta)d\theta,\ \ f_1(\theta) = 2\Delta(\theta)\exp\int_0^\theta f(\theta)d\theta$$

В силу 2π-периодичности функции $f_1(\theta)$ получим

$$r_0 t = [g_1\theta + g_2(\theta)],\ \ g_1 = \text{const},\ \ g_2(\theta + 2\pi) = g_2(\theta)$$

Отсюда следует, что при выполнении условия $r_0 k^* = g_1 s$ ($k^* \in \mathbf{N}$, $s \in \mathbf{Z}$) движения будут 4π-периодическими по t. Поэтому, как и в случае резонанса четвертого порядка, амплитуда колебаний с резонансной частотой ($k^* = 1$) кратна $r_0^{\min} = g_1$, а субгармонические колебания могут иметь сколь угодно малую амплитуду.

Теперь, как и в случае резонанса четвертого порядка, положим $z = \sqrt{r(\theta)}\exp(i\theta_1) \times$ $\times (1 + x)$, $x = p + iq$. Тогда получим систему

$$dp/d\theta = [C_{-1,2}(p\sin 2\theta + 2q\cos 2\theta) + C_+(p\sin\theta - q\cos\theta)]/\Delta(\theta) + \ldots$$

$$dq/d\theta = [C_{1,0}p + C_{-1,2}(p\cos 2\theta - 2q\sin 2\theta) + C_+ p\cos\theta - C_- q\sin\theta)]\Delta(\theta) + \ldots \tag{4.4}$$

Невыписанные члены имеют порядок выше первого от p, q или зависят от μ и являются $4\pi|s|$-периодическими функциями θ ($4\pi k^*$-периодическими функциями t).

Теорема 5. **Пусть в системе (4.1) выполнены условия (4.3). Тогда при достаточно малых μ (4.1) имеем счетное множество $4\pi k^*$-периодических по t движений ($k^*\in$ N), если характеристические показатели системы (4.4) не равны $\pm iN/(2|s|)$, $N\in$ N.**

Замечание. В случае $C_+ = 2C_-$ порождающая система имеет интеграл энергии и ее периодические движения продолжаются по малому параметру.

5. Резонанс 1 : 3. Опуская присоединенную нерезонансную подсистему, рассмотрим задачу о периодических движениях системы

$$\begin{aligned} \eta_1^{\cdot} &= i(\omega_1 + A_{11}|\eta_1|^2 + A_{12}|\eta_2|^2)\eta_1 + iB_2\overline{\eta}_2^3 + \mu H_1(\mu,\overline{\eta},\eta) \\ \eta_2^{\cdot} &= i(-\omega_2 + A_{21}|\eta_1|^2 + A_{22}|\eta_2|^2)\eta_2 + iB_2\overline{\eta}_1\eta_2 + \mu H_2(\mu,\overline{\eta},\eta) \end{aligned} \tag{5.1}$$

где A_{jk}, B_j, ω_j – действительные постоянные, $\omega_j > 0$, $\omega_1 = 3\omega_2$, а комплексно-сопряженная группа уравнений опущена.

Порождающая система, полученная из (5.1) при $\mu = 0$, всегда имеет периодическое решение, на котором

$$\eta_1^{\cdot} = i(\omega_1 + A_{11}|\eta_1|^2)\eta_1, \quad \eta_2 = 0 \tag{5.2}$$

Согласно теореме 3 система (5.1) при малых μ имеет периодические решения, близкие к (5.2). Также из теоремы 3 следует существование периодических движений, близких к решениям

$$\eta_1 = 0, \quad \eta_2^{\cdot} = i(-\omega_2 + A_{22}|\eta_2|^2)\eta_2$$

если $B_1 = 0$.

Оказывается, в системе (5.1) возможны и другие – “резонансные” периодические движения. Для установления этого факта перейдем в порождающей системе к полярным координатам r,θ: $\eta_j = \sqrt{r_j}\exp(i\theta_j)$, $\overline{\eta}_j = \sqrt{r_j}\exp(-i\theta_j)$ $(j=1,2)$. Получим

$$\begin{aligned} r_j^{\cdot} &= 2B_j\sin\theta r_1^{1/2}r_2^{3/2} \quad (j=1,2) \\ \theta_1^{\cdot} &= \omega_1 + A_{11}r_1 + A_{12}r_2 + B_1r_1^{-1/2}r_2^{3/2}\cos\theta \\ \theta_2^{\cdot} &= -\omega_2 + A_{21}r_1 + A_{22}r_2 + B_2r_1^{1/2}r_2^{1/2}\cos\theta, \quad \theta = \theta_1 + 3\theta_2 \end{aligned} \tag{5.3}$$

причем последние два уравнения сводятся к одному уравнению для переменной θ

$$\theta^{\cdot} = A_1r_1 + A_2r_2 + (B_1r_1^{-1/2}r_2^{3/2} + 3B_2r_2^{1/2}r_2^{1/2})\cos\theta, \quad A_j = A_{1,j} + 3A_{2j}.$$

Качественное исследование полученной системы уравнений для r_1, r_2, θ [6] позволило, в частности, установить все случаи существования периодических движений. Пусть $B_1B_2 > 0$, например, $B_{1,2} > 0$. Тогда (5.3) допускает частное решение, описываемое уравнениями

$$r^{\cdot} = 2Br^2\sin\theta, \quad \theta^{\cdot} = (A + 4B\cos\theta), \quad r_j = B_jr \quad (j=1,2) \tag{5.4}$$

$$A = A_1B_1 + A_2B_2, \quad B = B_1^{1/2}B_2^{3/2}$$

При выполнении условия $|A| > 4|B|$ все решения системы (5.4) будут периодическими движениями по эллипсам

$$r(\theta) = r_0\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon\cos\theta}}, \quad \varepsilon = 4\frac{B}{A}$$

где r_0 – значение r при $\theta = 0$. В переменных η, $\overline{\eta}$ движение будет, вообще говоря, условно-периодическим, причем

$$\theta_1^{\cdot} = \omega_1 + (a_1 + B\cos\theta)r, \quad \theta_2^{\cdot} = -\omega_2 + (a_2 + B\cos\theta)r, \quad a_j = \sum_{k=1}^{2} A_{jk}B_k$$

и зависимость θ_j от θ определяется соотношениями

$$\theta_{1,2} = \pm\frac{\omega_{1,2}}{Ar_0\sqrt{1+\varepsilon}}[\alpha^*\theta + f_1(\theta)] + \frac{a_{1,2}}{A}[\beta^*\theta + f_2(\theta)] + \frac{B}{A}[\gamma^*\theta + f_3(\theta)] \tag{5.5}$$

Здесь $f_j(\theta)$ – 2π-периодические функции θ, а α^*, β^*, γ^* – средние за период значения функций

$$\alpha^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{1+\varepsilon\cos\theta}}, \quad \beta^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}, \quad \gamma^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos d\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

Поэтому решение будет периодическим, если выполняется условие

$$\omega_1^* k = \omega_2^* l, \quad \omega_{1,2}^* = \pm\frac{\omega_{1,2}\alpha^*}{Ar_0\sqrt{1+\varepsilon}} + \frac{a_{1,2}\beta^* + B\gamma^*}{A}$$

где k, l – целые числа, исключая нуль, причем, период по θ равен $|2\pi k / (\omega_1^* l)|$. Укажем также, что условие периодичности выполняется независимо от начального значения r_0 порождающего решения, если $k + 3l = 0$.

Для применения теорем 1,2 к установленным эллиптическим порождающим решениям перейдем в (5.1) к переменным p_j, q_j по формулам

$$\eta_j = \sqrt{|B_j| r(\theta)}e^{i\theta_j}(1 + x_j), \quad x_j = p_j + iq_j \quad (j = 1,2)$$

причем зависимость $\theta_j(\theta)$ задается соотношениями (5.5). Получим:

$$\frac{dp_1}{d\theta} = \varepsilon\frac{(3p_2 - p_1)\sin\theta + (q_1 + 3q_2)\cos\theta}{4(1+\varepsilon\cos\theta)} + \ldots$$

$$\frac{dq_1}{d\theta} = \varepsilon\frac{2(A_{11}B_1p_1 + A_{12}B_2p_2)}{A(1+\varepsilon\cos\theta)} + \varepsilon\frac{(3p_2 - p_1)\cos\theta - (q_1 + 3q_2)\sin\theta}{4(1+\varepsilon\cos\theta)} + \ldots$$

$$\frac{dp_2}{d\theta} = \varepsilon\frac{(p_1 - p_2)\sin\theta - (q_1 + q_2)\cos\theta}{4(1+\varepsilon\cos\theta)} + \ldots \tag{5.6}$$

$$\frac{dp_2}{d\theta} = \frac{2(A_{21}B_1p_1 + A_{22}B_2p_2)}{A(1+\varepsilon\cos\theta)} + \varepsilon\frac{(p_1 - p_2)\cos\theta + (q_1 - q_2)\sin\theta}{4(1+\varepsilon\cos\theta)} + \ldots$$

Невыписанные члены имеют порядок выше первого относительно **p**, **q** или зависят от μ.

Видно, что при $\varepsilon = 0$ линейная по **p**, **q** и свободная от μ часть в (5.6) независит от θ, характеристическое уравнение имеет две пары нулевых корней, каждую с одной группой решений, а автоморфизм удовлетворяет теореме 1. Следовательно, в случае $\varepsilon = 0$ система (5.1) при достаточно малых μ имеет счетное множество периодических движений, близких к круговым.

Для определения характеристических показателей при $\varepsilon \neq 0$ воспользуемся интегралами [6] порождающей системы

$$V = B_1\eta_2\bar{\eta}_2 - B_1\eta_1\bar{\eta}_1$$

$$W = A_1B_2|\eta_1|^4 + A_2B_1|\eta_2|^4 + 2B_1B_2(\eta_1\eta_2^3 + \bar{\eta}_1\bar{\eta}_2^3)$$

В окрестности эллиптического порождающего решения интегралы примут вид

$$(p_1 - p_2)r(\theta) + \ldots = h_1$$

$$\left\{A_1B_1p_1 + A_2B_2p_2 + B\left[(p_1 + 3p_2)\cos\theta - (q_1 + 3q_2)\sin\theta\right]\right\}r^2(\theta) + \ldots = h_2$$

где h_1, h_2 – произвольные постоянные. Можно убедиться, что эти интегралы разрешаются относительно p_1 и p_2, если только выполнено условие $|A| > 4\,|B|$. Поэтому в системе (5.6) вместо переменных p_1 и p_2 можно взять новые переменные h_1 и h_2. В результате оказывается, что линейная система имеет две пары нулевых характеристических показателей, каждая с одной группой решений, причем с точностью до линейных и свободных от μ членов получим

$$h^{\cdot}_1 = 0 + \ldots, \quad h^{\cdot}_2 = 0 + \ldots$$

В новых переменных h_j, $q_j (j = 1{,}2)$ автоморфизм имеет вид $t \to -t$, $h \to h$, $q \to -q$ и все условия теоремы 1 выполнены.

Теорема 6. Если $|A| > 4\,|B|$, то при достаточно малом μ в системе (5.1) всегда существует счетное множество "резонансных" периодических движений, близких к эллиптическим и совпадающих с ними при $\mu = 0$.

Замечание. Наличие двух независимых интегралов позволяет продолжить по малому параметру все периодические движения, установленны [6] в порождающей системе. Аналогичная ситуация имеет место при произвольном m-частотном резонансе четвертого порядка, ибо в этом случае порождающая система имеет [7] m независимых интегралов.

6. Периодические движения в неограниченной задаче трех тел. Рассмотрим плоскую неограниченную задачу трех тел – задачу о движении трех материальных точек P_0, P_1, P_2 с массами M_0, M_1, M_2, взаимно притягивающихся по закону Ньютона и все время двигающихся в одной и той же неподвижной плоскости. Была получена [8] функция Рауса задачи, причем в качестве позиционных координат выбраны: r – корень квадратный из полярного момента инерции, y – натуральный логарифм отношения двух сторон P_0P_1 и P_0P_2 треугольника $P_0P_1P_2$, ψ – угол между этими сторонами. Циклической переменной Φ является угол, отсчитываемый прямой P_0P_1 от некоторой неподвижной прямой в плоскости треугольника $P_0P_1P_2$. Имеем

$$R = r^{\cdot 2} + r^2F_2 + F_1 - \frac{\beta^2}{4r^2} + \frac{1}{r}F_0, \quad F_2 = \mu S^{-2}(y^{\cdot 2} + \psi^{\cdot 2}) \tag{6.1}$$

$$F_1 = -\beta S^{-1}\left\{\mu_3(\psi^{\cdot}\cos\psi + y^{\cdot}\sin\psi) - (\mu_2 + \mu_3)e^y\psi^{\cdot}\right\}$$

$$F_0 = fM\sqrt{S/2}\left\{\mu_1e^{y/2} + \mu_2e^{-y/2} + \mu_3(e^y + e^{-y} - 2\cos\psi)^{-1/2}\right\}$$

$$S = \mu_1e^{-y} + \mu_2e^y + \mu_3(e^y + e^{-y} - 2\cos\psi)$$

$$\mu_{i+j} = M_iM_j / M^2 \quad (i, j = 0,1,2;\ i \neq j), \quad \mu = \mu_0\mu_1 + \mu_0\mu_2 + \mu_1\mu_2$$

где M – масса всей системы, β – циклическая постоянная, f – гравитационная постоянная.

Отличительные особенности данного описания задачи заключаются в следующем. Новыми параметрами задачи являются безразмерные произведения μ_{i+j} масс тел P_i и P_j, и эти параметры отражают ньютоновское взаимодействие этих тел. Уравнение движения для переменной r

$$2r^{\cdot\cdot} = 2rF_2 + \frac{\beta^2}{2r^3} - \frac{1}{r^2}F_0 \tag{6.2}$$

фактически совпадает с фундаментальным соотношением в небесной механике –

уравнением Лагранжа–Якоби и в дифференциальной форме выражает факт сохранения механической энергии. И, наконец, задача описывается уравнениями Рауса, которые в то же время являются обратимыми относительно замены $(r, y, \psi) \to (r, y, -\psi)$.

Введение новых параметров позволяет в качестве предельного варианта при $\mu_3 = 0$ получить задачу

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{r^2}{S^2}y^{\cdot}\right)+\frac{r^2}{S^3}(y^{\cdot 2}+\psi^{\cdot 2})\frac{\partial S}{\partial y}-\frac{\beta}{S^2}\psi^{\cdot}+\frac{1}{r}\frac{fM}{2\sqrt{2S}}(e^{-3y/2}-e^{3y/2})=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{r^2}{S^2}\psi^{\cdot}\right)+\frac{\beta y^{\cdot}}{S^2}=0 \tag{6.3}$$

которой отвечает случай отсутствия взаимодействия между телами P_1 и P_2; эти тела двигаются во врещающейся системе координат только под влиянием тела P_0.

Уравнения (6.2), (6.3) допускают стационарное движение, в котором $r, y, \psi^{\cdot}$ принимают постоянные значения. В таком движении тела P_1 и P_2 вращаются с постоянными угловыми скоростями $\psi^{\cdot}$ и $\Phi^{\cdot} + \psi^{\cdot}$ вокруг центра масс тел P_0, P_1, P_2, а значит, вокруг P_0. При этом угловые скорости $\Phi^{\cdot}$ и $\psi^{\cdot}$ связаны соотношением

$$2r^2\Phi^{\cdot} = \beta - \mu_2 r^2\psi^{\cdot} \tag{6.4}$$

а движение происходит по окружностям.

Все стационарные решения системы (6.2), (6.3) определяются из уравнения

$$x^2(-\mu_1^2 e^{-y/2}+\mu_2^2 e^{y/2})-\beta x(\mu_1 e^{y/2}+\mu_1 e^{-y/2})+\frac{\beta^2}{4}(e^{-3y/2}-e^{3y/2}) \tag{6.5}$$

где $x = r^2\psi^{\cdot}/S$.

Исследуем различные возможные случаи.

1°. Пусть множитель при x^2 равен нулю. Тогда отношение расстояний $r_2/r_1 = (\mu_1/\mu_2)^2$. Если $\beta = 0$, то решением уравнения (6.5) является любое значение x. Отношения угловых скоростей и периодов в этом случае таковы:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{\Phi^{\cdot}+\psi^{\cdot}}{\Phi^{\cdot}}=-\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^3,\quad \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$$

Таким образом, в данном стационарном движении тела P_1 и P_2 вращаются в противоположных направлениях, причем выполняется закон Кеплера: квадрат отношения периодов равен кубу отношения радиусов.

Предположим теперь, что $\beta \neq 0$. Тогда для x находим единственное решение уравнения (6.5)

$$x=\frac{\beta}{4}\frac{\mu_2^3-\mu_1^3}{\mu_1^2-\mu_2^2}$$

Поэтому два тела равной массы ($\mu_1 = \mu_2$) движутся с одинаковой угловой скоростью по одной и той же окружности, ибо для такой системы $\psi^{\cdot} = 0$. Пусть $\mu_1 \neq \mu_2$. Тогда

$$\frac{\psi^{\cdot}}{\Phi^{\cdot}}=\frac{\mu_*^6-1}{2\mu_*^3[2+\mu_*(1-\mu_*^3)]}=f(\mu_*),\quad \mu_*=\frac{\mu_2}{\mu_1}=\frac{M_2}{M_1}$$

Если $\mu_* \ll 1$, то $\omega_2/\omega_1 < 0$ и вращения происходят в противоположных направлениях. При этом тело P_2 находится на окружности большего радиуса чем тело P_2. Если теперь $\mu_* \to \infty$, то $\omega_2/\omega_1 \to -1/2$ и движение тел P_2 и P_1 близко к резонансному.

2°. Пусть в (6.5) коэффициент при x^2 отличен от нуля. Тогда x – корни квадратного уравнения и имеют вид

$$x=\frac{\mu_1 e^{y/2}+\mu_2 e^{-y/2}\pm(\mu_1 e^{-y}+\mu_2 e^{y})}{2(-\mu_1^2 e^{-y/2}+\mu_2^2 e^{y/2})}\beta$$

Получим два семейства стационарных движений: каждому значению y при любых μ_1, μ_2, не обращающих в нуль знаменатель, отвечают два значения угловой скорости $\psi^{\cdot}$ движения P_2 относительно P_1. Вычислим

$$\frac{\psi^{\cdot}}{\Phi^{\cdot}}=-\frac{e^{y/2}+\mu_* e^{-y/2}\pm(e^{-y}+\mu_* e^{y})}{e^{-y/2}+\mu_* e^{3y/2}\pm\mu_*(1+\mu_* e^{2y})}(e^{-y}+\mu_* e^{y})=f_1(\mu_*)$$

При $\mu_* \to 0$ имеем $f_1(\mu_*) \to -(1 \pm e^{-3y/2})$, а при $\mu_* \to \infty$ функция $f_1(\mu_*)$ стремится к $\mp(1+e^{-3y/2})$. Отсюда следует, что в случае, когда одна из масс M_1, M_2 много больше другой массы, возможны вращения тел как в одном направлении, так и в противоположных направлениях. В случае же вращения тел с одинаковой угловой скоростью имеем $r_1 = r_2$.

Пусть теперь μ_* – конечная величина, возможно, достаточно большая. Отнесем тело P_2 на бесконечность. Тогда $y \to \infty$ и $\psi^{\cdot}/\Phi^{\cdot} \to -1$. Получим вариант задачи, который описывает движение Луны P_1 с угловой скоростью $\Phi^{\cdot}$ вокруг Земли P_0. В этом варианте P_2 представляет Солнце, а угловая скорость вращения Земли вокруг Солнца много меньше угловой скорости вращения Луны вокруг Земли.

Составим теперь уравнения в вариациях для системы (6.2), (6.3) в окрестности рассмотренных стационарных движений. Не выписывая явно эти громоздкие уравнения, обозначим только их структуру

$$\delta\psi^{\cdot\cdot} = -\beta/r^{-2}\delta y$$

$$\delta r^{\cdot\cdot} = a\delta\psi^{\cdot} + a_{11}\delta r + a_{12}\delta y, \quad \delta y^{\cdot\cdot} = b\delta\psi^{\cdot} + a_{21}\delta r + a_{22}\delta y$$

где a, b, a_{ij} – некоторые постоянные коэффициенты, зависящие от параметров μ_1, μ_2 и рассматриваемого стационарного движения.

Видно, что эта система имеет пару нулевых характеристических показателей с одной группой решений, а автоморфизм системы удовлетворяет теореме 1. Остальные характеристические показатели определяются как корни биквадратного уравнения. Эти числа зависят от параметров μ_1, μ_2 и будут критическими, в смысле невозможности продолжить по μ_3 периодическое решение системы (6.2), (6.3), только для счетного множества значений μ_1, μ_2.

Теорема 7. При достаточно малом значении параметра μ_3 плоская неограниченная задача трех тел имеет "круговые" периодические решения, в которых тела P_1 и P_2 вращаются вокруг P_0 с постоянной (с точностью порядка μ_3) угловой скоростью по кривым, близким к окружностям. При этом движения тел P_1 и P_2 могут быть как в одном, так и в противоположных направлениях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-010-1674а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Матвеев М.В., Тхай В.Н.* Устойчивость периодических обратимых систем // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 3–11.
2. *Пуанкаре А.* Избр. тр. I. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 771с.
3. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491с.
4. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Л.; М.: ОНТИ, 1935. 386с.
5. *Heinbockel J.H., Struble R.A.* Periodic solutions for differential systems with symmetries // J. Societ. Indust. Appl. Math. 1965. V. 13. № 2. P. 425–440.
6. *Тхай В.Н.* Качественное исследование обратимой системы при резонансе 1 : 3 // Некоторые задачи динамики механических систем. М.: Моск. авиац. ин-т, 1991. С. 50–56.
7. *Тхай В.Н.* Обратимость механических систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 578–586.
8. *Тхай В.Н.* Плоская неограниченная задача трех тел // Астрон. журн. 1987. Т. 64. Вып. 4. С. 860–864.

Поступила в редакцию
2.III.1994

Москва