УДК 531.36 534.1

© 1995 г. А.С. Ковалева

ОБ УСРЕДНЕНИИ В МНОГОЧАСТОТНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Излагается процедура разделения движений в возмущенных системах, приводящихся к стандартной форме с несколькими быстрыми фазами. Рассматриваются нерезонансный и резонансный случаи. Изучаются системы с иерархией скоростей вращения фаз. Доказывается сходимость медленного движения к диффузионному процессу. Рассматривается пример – возмущенное движение гироскопа в кардановом подвесе.

1. Исследуются системы, динамика которых описывается уравнениями

$$x^{\cdot} = \varepsilon F(x,\theta,\xi(t)) + \varepsilon^2 G(x,\theta), \quad x \in R_n \tag{1.1}$$

$$\theta^{\cdot} = \omega(x) + \varepsilon H(x,\theta,\xi(t)) + \varepsilon^2 D(x,\theta), \quad \theta \in R_m$$

$$F(x,\theta,\xi(t)) = F_0(x,\theta)\xi(t), \quad H(x,\theta,\xi(t)) = H_0(x,\theta)\xi(t) \tag{1.2}$$

где ε – малый параметр, $\xi(t) \in R_l$ – стационарный случайный процесс с нулевым средним, удовлетворяющий условиям перемешивания [1, 2], F_0, H_0, G, D – матрицы соответствующих размерностей, 2π-периодические по каждой из компонент θ_k вектора θ и достаточно гладкие [1, 2] по своим переменным.

Рассматривались [1, 2] частные случаи системы (1.1). Исследовалась [1] система с одной быстрой фазой ($m = 1$); сформулированы условия, при которых для таких систем справедлив стохастический принцип усреднения: при $\varepsilon \to 0$ медленная переменная $x(t, \varepsilon)$ слабо сходится [3] к медленному диффузионному процессу $x_0(\tau)$, где $\tau = \varepsilon^2 t$. Получен [2] аналогичный результат для многочастотных квазилинейных систем с постоянными собственными частотами. Ниже покажем, что вывод о сходимости медленного к диффузионному процесса справедлив и для систем общего вида (1.1).

Рассмотрим сначала нерезонансный случай. Предположим, что собственные частоты $\omega_k \geqslant \omega_{0k} > 0$ удовлетворяют условию [4, 5]

$$|(\lambda, \omega)| \geqslant \delta(\lambda) > 0 \tag{1.3}$$

для любого целочисленного вектора λ при всех $x \in S$, где S – ограниченный шар в R_n.

Предположим также, что правые части уравнений (1.1) удовлетворяют условиям, принятым в [1, 2]. Напомним, что эти условия выполняются, если функции F_0, H_0, G, D, ω достаточно гладкие, а случайный процесс $\xi(t)$ удовлетворяет условиям перемешивания, справедливым, в частности, для нормального стационарного процесса.

Обозначим [1, 2] решение системы (1.1) как $x(t, \varepsilon) = x_\varepsilon(\tau)$ и определим предельный диффузионный процесс $x_0(\tau)$ как решение стохастического дифференциального уравнения

$$dx_0 = b(x_0)d\tau + \sigma(x_0)dw, \quad x_0(0) = x(0,\varepsilon) = r \tag{1.4}$$

Здесь $\tau=\varepsilon^2 t$, $w(\tau)$ – стандартный винеровский процесс, коэффициенты $b(x)$ и $\sigma(x)$ определяются формулами

$$b(x)=b_1(x)+b_2(x)+g(x) \tag{1.5}$$

где

$$b_j(x)=\langle B_j(x,\theta)\rangle, \quad B_j(x,\theta)=\int_0^\infty B_j(x,\theta,u)du \tag{1.6}$$

$$g(x)=\langle G(x,\theta)\rangle$$

$$B_1=\mathrm{M}[F_x(x,\theta+\omega(x)u,\xi(t+u))F(x,\theta,\xi(t))] \tag{1.7}$$

$$B_2=\mathrm{M}[F_\theta(x,\theta+\omega(x)u,\xi(t+u))H(x,\theta,\xi(t))]$$

$$\sigma(x)\sigma'(x)=a(x); \quad a_{ij}(x)=\langle A_{ij}(x,\theta)\rangle \tag{1.8}$$

$$A_{ij}(x,\theta)=\int_{-\infty}^{\infty} A_{ij}(x,\theta,u)du$$

$$A_{ij}(x,\theta,u)=\mathrm{M}[F^i(x,\theta+\omega(x)u,\xi(t+u))F^j(x,\theta,\xi(t))]$$

Здесь и ниже угловые скобки означают пространственное усреднение;

$$\langle f(x,\theta)\rangle=(2\pi)^{-m}\int_0^{2\pi} f(x,\theta)d\theta=(2\pi)^{-m}\int_0^{2\pi} d\theta_1\ldots\int_0^{2\pi} f(x,\theta)d\theta_m$$

F^i – i-я компонента вектора F. Предполагается, что пространственные средние и выражения (1.6), (1.8) существуют при всех $x\in S$.

Легко получить следующее обобщение результатов [1, 2].

Теорема 1. Пусть коэффициенты возмущенной системы (1.1) удовлетворяют перечисленным условиям. Тогда при $\varepsilon\to 0$ и $\tau\in[0, L]$ решение $x_\varepsilon(\tau)$ слабо сходится к диффузионному процессу $x_0(\tau)$, определенному уравнением (1.4).

Теорема 1 служит очевидным обобщением аналогичных утверждений [1, 2] и ее доказательство может быть опущено.

Замечание. Если коэффициенты второго порядка малости зависят от случайных возмущений и имеют вид $G(x, \theta, \xi(t))$, причем

$$\mathrm{M}G(x, \theta, \xi(t)) = g(x, \theta) \tag{1.9}$$

то

$$g(x)=(2\pi)^{-m}\int_0^{2\pi} g(x,\theta)d\theta \tag{1.10}$$

В частности, если $\mathrm{M}G = 0$, то $g(x) = 0$.

Если коэффициенты первого порядка имеют вид

$$F(x, \theta, \xi(t)) + f(x, \theta), \qquad H(x, \theta, \xi(t)) + h(x, \theta) \tag{1.11}$$

причем

$$\int_0^{2\pi} f(x,\theta)d\theta=0 \tag{1.12}$$

то теорема 1 остается в силе, но в коэффициенте (1.5) появится дополнительное слагаемое, соответствующее второму приближению метода осреднения для детерминированных систем. В общем случае этот коэффициент достаточно сложен и не выписывается, но более простой частный случай использован в разд. 4.

2. В задаче (1.1) неявно предполагалось, что все частоты $\omega_k(x)$, несмотря на несоизмеримость, оказываются величинами одного порядка, т.е. $|\omega_r(x)/\omega_l(x)| = O(1)$ для любых $r, l = 1, ..., m$ при $x \in S$. В реальных многомерных системах могут быть существенные различия между частотами, когда для каких-либо групп частот $\omega_r(x)$ и $\omega_l(x)$ $(r = 1, ..., R, l = R + 1, ..., m)$ выполняются соотношения $|\omega_r(x)/\omega_l(x)| = O(\varepsilon)$. При подобной сильной несоизмеримости частот уравнения движения зависят как от быстро так и от медленно вращающихся фаз. В общем случае система уравнений может быть записана в виде

$$x^{\cdot} = \varepsilon F(x,\varphi,\theta,\xi(t)), \qquad \varphi^{\cdot} = \varepsilon\Omega(x) + \varepsilon\Phi(x,\varphi,\theta,\xi(t))$$

$$\theta^{\cdot} = \omega(x) + \varepsilon H(x,\varphi,\theta,\xi(t)) \tag{2.1}$$

(слагаемые $O(\varepsilon^2)$ не выписаны). Предполагается, что $\varphi \in R_k$, вектор Φ имеет структуру (1.2) и удовлетворяет тем же условиям, что и вектор H, а "медленные" частоты $\Omega(x)$ удовлетворяют условиям несоизмеримости (1.3) и достаточной гладкости по x.

Системы с иерархией частот возникают как из-за разномасштабности физических параметров объектов, так и при формальных преобразованиях уравнений движения, например при изучении резонансных режимов [4, 5]. Основные особенности исследования детерминированных систем связаны с тем, что медленная переменная x и медленная фаза φ меняются с одинаковой скоростью, т.е. правые части (2.1) не усредняются по φ и размерность вектора медленных переменных увеличивается.

В (2.1) предполагается, что $\mathrm{M}\xi = 0$, т.е. $\mathrm{M}F = 0$. Это означает [6], что на интервале времени $O(\varepsilon^{-1})$ переменная x не выходит за пределы малой окрестности начального положения, а фаза φ оказывается быстрой фазой по отношению к x. Это подразумевает возможность усреднения по φ и отделения переменной x при $\varepsilon \to 0$.

Обсуждалась [7] возможность последовательного усреднения в детерминированных системах с иерархией частот. Исследована [8] стохастическая система, приводящаяся к виду (2.1) с двумя фазами и постоянной частотой быстрого вращения. На этом частном примере продемонстрирована возможность усреднения по медленной фазе φ.

Покажем, как реализуется принцип разделения движений в системе (2.1). Введем в рассмотрение медленный диффузионный процесс $x_0(\tau)$, которому соответствует производящий дифференциальный оператор

$$L_0 = \beta'(x)\partial/\partial x + \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\alpha(x)\partial^2/\partial x^2 \tag{2.2}$$

$$\alpha(x) = \langle a(x,\varphi)\rangle, \qquad \beta(x) = \langle b(x,\varphi) + k(x,\varphi)\rangle$$

Матрица $a(x, \varphi)$ вычисляется по формуле (1.8) при замене переменной x на x, φ. Точно так же $b(x, \varphi)$ – коэффициент, вычисленный по (1.6), (1.7) при замене x на x, φ. Коэффициент $k(x, \varphi)$ связан с появлением дополнительной переменной φ

$$k(x,\varphi) = \langle K(x,\varphi,\theta)\rangle, \qquad K(x,\varphi,\theta) = \int_0^\infty K(x,\varphi,\theta,u)du$$

$$K(x,\varphi,\theta,u) = \mathrm{M}[F_\varphi(x,\varphi,\theta+\omega(x)u,\xi(t+u))\Phi(x,\varphi,\theta,\xi(t))]$$

Теорема 2. Пусть для системы (2.1) выполнены перечисленные условия. Пусть далее оператор (2.2) равномерно параболичен, а соответствующий ему диффузионный процесс $x_0(\tau)$ регулярен. Тогда при $\varepsilon \to 0$, $\tau \in [0, L]$ решение $x_\varepsilon(\tau)$ системы (2.1) слабо сходится к процессу $x_0(\tau)$ с производящим дифференциальным оператором (2.2).

Доказательство. Отметим, что при $\omega(x) = 1$ система (2.1) совпадает с изученной в [8]. Доказательство повторяет последовательность рассуждений [8] и не приводится подробно.

Введем в рассмотрение вектор медленных переменных x, $\varphi = y$, где обозначено

$$x_\varepsilon(\tau) = x, \quad \varphi_\varepsilon(\tau) = \varphi, \quad y_\varepsilon(\tau) = y, \quad \tau = \varepsilon^2 t$$

Для слабой сходимости $x_\varepsilon(\tau)$ к $x_0(\tau)$ достаточно, чтобы выполнялось условие [3]

$$\mathrm{M}_{y,\tau} f(x_\varepsilon(T)) \to \mathrm{M}_{x,\tau} f(x_0(T)),. \quad \varepsilon \to 0 \tag{2.3}$$

для любой функции $f(x) \in C_4$ при $x \in S$, $\varphi \in R_k$, $\tau \in [0,T]$, $T \le L$.

Для доказательства соотношения (2.3) используем вспомогательный результат, непосредственно вытекающий из известного ([8], разд. 3). Повторяя все рассуждения [8], но заменяя усреднение по времени усреднением по фазам (как это сделано в разд. 1), получим, что при $\varepsilon \to 0$ медленный процесс $y_\varepsilon(\tau)$ слабо сходится к $(n + k)$-мерному диффузионному процессу $y_{0\varepsilon}(\tau) = x_{0\varepsilon}(\tau)$, $\varphi_{0\varepsilon}(\tau)$, которому соответствует производящий дифференциальный оператор

$$L = \varepsilon^{-1}\Omega'(x)\partial/\partial\varphi + [b'(x,\varphi) + k'(x,\varphi)]\partial/\partial x + \kappa'(x,\varphi)\partial/\partial\varphi +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}[a(x,\varphi)\partial^2/\partial x^2 + d(x,\varphi)\partial^2/\partial x\partial\varphi + \delta(x,\varphi)\partial^2/\partial\varphi^2] \tag{2.4}$$

Коэффициенты b, k, a в (2.4) определены выше; коэффициенты κ, d, δ определяются аналогично, но, как будет показано, их вид не имеет значения. Очевидно, что все коэффициенты периодичны по φ; дополнительно предполагается, что средние этих функций по φ существуют при всех $x \in S$.

Поясним утверждение о слабой сходимости. Пусть

$$\mathrm{M}_{y,\tau} f(x_\varepsilon(T)) = V_\varepsilon(y,\tau), \quad \mathrm{M}_{y,\tau} f(x_{0\varepsilon}(T)) = V(y,\tau)$$

При этом функция $V(y, \tau) = V(x, \varphi, \tau)$ определяется как решение уравнения [3]

$$\partial V/\partial\tau + LV = 0, \quad V(x, \varphi, T) = f(x) \tag{2.5}$$

Слабая сходимость x_ε к $x_{0\varepsilon}$ означает, что при всех $x \in S$, $\varphi \in R_k$ и достаточно малых ε

$$|V_\varepsilon(y,\tau) - V(y,\tau)| \leqslant C\varepsilon \tag{2.6}$$

где C – постоянная, не зависящая от ε. Как и в [8], можно показать, что оценка (2.6) справедлива на таком интервале времени, где решение уравнения (2.5) существует и равномерно ограничено (в пространстве $H_{4,2}$) и функционал $V_\varepsilon(y, \tau)$ существует и равномерно ограничен при достаточно малых ε и при всех $x \in S$, $\varphi \in R_k$.

Для доказательства существования решения уравнения (2.5) и его оценки используем принцип усреднения [6]. Рассмотрим наряду с (2.5) усредненное уравнение

$$\partial V_0/\partial\tau + L_0 V_0 = 0, \quad V_0(x,T) = f(x) \tag{2.7}$$

где L_0 – оператор (2.2). Из свойств коэффициентов системы (2.1) следует, что $\alpha(x) \in C_2$, $\beta(x) \in C_1$. Если при этом $f(x) \in C_4$, и оператор L_0 равномерно параболичен, то [9] существует решение $V_0(x,\tau) \in C_{4,2}$ такое, что [6]

$$|V(x,\varphi,\tau) - V_0(x,\tau)| \to 0, \quad \varepsilon \to 0 \tag{2.8}$$

Здесь $V(x, \varphi, \tau)$ – решение уравнения (2.5). Предел существует равномерно относительно $x \in S$, $\varphi \in R_k$ при всех $\tau \in [0, T]$. В свою очередь из определения процесса $x_0(\tau)$ имеем [3]

$$V_0(x,\tau) = \mathrm{M}_{x,\tau} f(x_0(\tau)) \tag{2.9}$$

Сравнивая (2.6), (2.8) и учитывая (2.9) получим, что требование (2.3) выполняется на таком интервале времени $\tau \in [0, T]$, где функционал $V_\varepsilon(y, \tau)$ ограничен. Как и в [8], легко доказать, что эта оценка справедлива при любых конечных $T \leqslant L$, если процесс $x_0(\tau)$ регулярен.

Замечание. Очевидно, что дополнительные члены порядка ε^2 в правой части (2.1) приведут к появлению дополнительных слагаемых в коэффициенте сноса.

3. Изучим влияние случайных возмущений на динамические процессы в околорезонансной области, сопровождающиеся нарушением условия (1.3). Резонансные явления в детерминированных системах изучены достаточно подробно [4, 5], установлен, в частности, эффект "застревания" решений вблизи резонансной поверхности, определяемой условием

$$(\lambda, \omega(x)) = 0, \quad |\lambda|^2 \neq 0 \tag{3.1}$$

Исследуем влияние случайных возмущений на движение вблизи резонансной поверхности. Рассмотрим вновь систему типа (1.1)

$$x^{\cdot} = \varepsilon F(x, \theta, \xi(t)), \quad \theta^{\cdot} = \omega(x) + \varepsilon H(x, \theta, \xi(t)) \tag{3.2}$$

причем векторы F и H имеют вид (1.2). Предположим, что в системе существует одна резонансная поверхность, удовлетворяющая (3.1). Как и в детерминированном случае, введем новую переменную

$$\varphi = (\lambda, \theta) = (\Lambda, \psi) + \lambda_m \theta_m \tag{3.3}$$

где λ_k – компоненты вектора λ, $\Lambda_k = \lambda_k$, $\psi_k = \theta_k$, $k = 1, \ldots, m-1$, $\lambda_m \neq 0$. В результате очевидных преобразований приведем (3.2) к виду [4, 5]

$$x^{\cdot} = \varepsilon X(x, \varphi, \psi, \xi(t)), \quad \varphi^{\cdot} = (\lambda, \omega(x)) + \varepsilon \Phi(x, \varphi, \psi, \xi(t)) \tag{3.4}$$

$$\psi^{\cdot} = \Omega(x) + \varepsilon \Psi(x, \varphi, \psi, \xi(t))$$

Здесь $X = X_0 \xi(t)$, $X_0 = F_0(x, \psi, \lambda_m^{-1}[\varphi - (\Lambda, \psi)])$ и т.д., $\Omega_k(x) = \omega_k(x)$, $k = 1, \ldots, m - 1$. Учитывая, что рассматривается движение в окрестности резонансной поверхности, введем новую переменную $q(t, \varepsilon)$ по формуле [4, 5]

$$(\lambda, \omega(x)) = \mu q, \quad \mu = \varepsilon^{1/2} \tag{3.5}$$

и преобразуем (3.4) к форме, содержащей новые быстрые и медленные переменные

$$y^{\cdot} = \mu^2 Y(y, \varphi, \psi, \mu q, \xi(t)), \quad q^{\cdot} = \mu Q(y, \varphi, \psi, \mu q, \xi(t)) \tag{3.6}$$

$$\varphi^{\cdot} = \mu q + \mu^2 \Phi(y, \varphi, \psi, \mu q, \xi(t)), \quad \psi^{\cdot} = \Omega(y, \mu q) + \mu^2 \Psi(y, \varphi, \psi, \mu q, \xi(t))$$

Здесь $y_k = x_k$, $k = 1, \ldots, m-1$; коэффициенты системы (3.6) получаются в результате соответствующих преобразований в (3.4) с учетом замены переменных (3.5) [5]. Правые части (3.6) периодичны по фазам φ, ψ. Из условий разд. 1 следует, что $\Omega > 0$, из условия непересечения резонансной поверхности вытекает требование $q \neq 0$ (для определенности можно принять $q > 0$). Следовательно, к системе (3.6) применимы выводы разд. 2.

В уравнениях (3.6) выделяются четыре масштаба времени: быстрая фаза ψ, медленная фаза φ, меняющаяся в масштабе времени μt, медленный процесс $q(t)$ с масштабом времени $\mu^2 t$ и медленный процесс $y(t)$ с масштабом времени $\mu^4 t$ (последние два утверждения очевидно следуют из условия $MY = MQ = 0$, вытекающего из вида функций Y и Q). Таким образом, на интервале времени $0(\mu^{-2})$ переменную y можно считать постоянной: $y(t, \mu) = y(0, \mu) = y_0$.

Перепишем (3.6), удерживая только существенные для анализа члены

$$q^{\cdot} = \mu Q_0(\varphi, \psi, \xi(t)) + \ldots, \quad \varphi^{\cdot} = \mu q + \ldots, \quad \psi^{\cdot} = \Omega_0 + \mu \Omega_1 q + \ldots \tag{3.7}$$

$$Q_0 = Q(y_0, \varphi, \psi, 0, \xi(t)), \quad \Omega_0 = \Omega(y_0, 0), \quad \Omega_1 = \Omega_y(y_0, 0)$$

Слагаемые порядка μ^2 опущены, так как их средние равны нулю (см. замечание в конце п. 1). Очевидно, что система (3.7) представляет собой частный случай (2.1).

Применяя к (3.7) выводы разд. 2 получим, что на интервале времени $O(\mu^{-2})$ медленная переменная $q(t, \varepsilon)$ аппроксимируется медленным диффузионным процессом $q_0(s)$, удовлетворяющим уравнению

$$dq_0 = \sigma dw, \quad s = \mu t = \varepsilon^{1/2} t \tag{3.8}$$

где

$$\sigma^2 = \langle D(\varphi,\psi)\rangle, \quad D(\varphi,\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{M}Q_0(\varphi,\psi+\Omega_0 u,\xi(t+u))Q_0(\varphi,\psi,\xi(t))du \tag{3.9}$$

Угловые скобки означают усреднение по фазам, независимость D от t вытекает из стационарности процесса $\xi(t)$ и вида функции Q_0.

Таким образом, $q_0(s)$ – нормальный процесс с нулевым средним и дисперсией $D(s) = \sigma^2 s$. Полученный результат означает, что на интервале времени $O(\varepsilon^{-1})$ траектория возмущенной системы остается в малой $O(\varepsilon^{1/2})$ окрестности резонансной поверхности, но, благодаря росту дисперсии, стремится выйти из этой окрестности. Этот результат особенно легко интерпретируется в задаче о вынужденных вращениях одночастотной нелинейной системы, для которой соотношение (3.1) имеет вид

$$\lambda_1\omega(x) + \lambda_2\omega_0 = 0 \tag{3.10}$$

где $\omega(x)$ – собственная частота системы, ω_0 – частота вобуждения. Из вышесказанного следует, что в системе не реализуется стационарный режим вращения с частотой $\omega = -\lambda_2\lambda_1^{-1}\omega_0$. Флуктуации частоты определяются уравнениями (3.8), (3.12).

Если в уравнениях движения удерживаются члены высших порядков, то следует положить

$$x^{\cdot} = \varepsilon F(x,\theta,\xi(t)) + \varepsilon^{3/2}G(x,\theta) \tag{3.11}$$

$$\theta^{\cdot} = \omega(x) + \varepsilon H(x,\theta,\xi(t)) + \varepsilon^{3/2}D(x,\theta)$$

где слагаемые G и D имеют тот же смысл, что и в (1.1). Тогда в результате преобразований уравнения (3.7) примут вид

$$q^{\cdot} = \mu Q_0(\varphi,\psi,\xi(t)) + \mu^2 Q_1(\varphi,\psi) \tag{3.12}$$

$$\varphi^{\cdot} = \mu q, \quad \psi^{\cdot} = \Omega_0 + \mu\Omega_1 q$$

где Q_1 – дополнительное детерминированное слагаемое, полученное преобразованием функции G. В уравнениях (3.8) появляется дополнительный коэффициент сноса

$$dq_0 = b ds + \sigma dw, \quad b = \langle Q_1(\varphi,\psi)\rangle \tag{3.13}$$

В этом случае $q_0(s)$ – нормальный процесс со средним $m(s) = q(0) + bs$ и дисперсией (3.9).

4. Для иллюстрации рассмотрим задачу о возмущении вращательного движения гироскопа. Было изучено [5] движение уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе при воздействии малого периодического момента; установлено существование устойчивых периодических режимов. Исследованы [10] колебания неуравновешенного гироскопа при действии случайного момента типа белого шума, изучены области существования стационарных решений.

Рассмотрим движение неуравновешенного гироскопа в кардановом подвесе, установленного на колеблющемся основании. Предположим, что по оси внутреннего кольца действует малый периодический момент и малый момент сил вязкого трения и изучим влияние случайных колебаний основания на характер вращения внутреннего кольца и среднюю скорость ухода гироскопа.

Запишем уравнения движения в виде [5, 10]

$$\theta'' + \varepsilon u(\theta) = \varepsilon(k\sin\Omega t + \beta\xi(t)\cos\theta) - \varepsilon^2\nu\theta' \tag{4.1}$$

$$y = m(l - \cos\theta)(1 - \kappa\cos^2\theta)^{-1} \tag{4.2}$$

$$u(\theta) = dU/d\theta, \quad 2U(\theta) = -\beta\cos\theta + (l - \cos\theta)^2[(1 - \kappa\cos^2\theta)]^{-1} \tag{4.3}$$

Здесь θ – угол поворота внутреннего кольца, y – скорость ухода гироскопа, штрих означает производную по безразмерной "нутационной" переменной t; l, κ, m, β – постоянные, выраженные через инерционные и кинетические параметры гироскопа и колец [5, 10]. Малый параметр ε в правой части (4.1) характеризует малость возмущающих и диссипативных факторов, малый параметр в левой части означает, что безразмерная скорость вращения внутреннего кольца θ' велика по сравнению с безразмерной скоростью ухода гироскопа y, и вращение кольца близко к равномерному. Случайный процесс $\xi(t)$ определяет ускорение основания; предполагается, что $\xi(t)$ – стационарный процесс с нулевым средним, корреляционной функцией $K(t)$ и спектральной плотностью $S(\omega)$.

Интеграл энергии консервативной системы, соответствующей правой части (4.1), имеет вид

$$(\theta')^2 + 2\varepsilon U(\theta) = x^2 \tag{4.4}$$

Для применения асимптотического метода рассматриваем (4.4) как замену переменных. Используя малость ε, запишем

$$\theta' = x - \varepsilon U(\theta)x^{-1} + \varepsilon^2 \ldots \tag{4.5}$$

Подставив (4.5) в (4.1), получим систему уравнений

$$x' = \varepsilon(1 - \varepsilon U(\theta)x^{-2})(k\sin\psi + \beta\xi(t)\cos\theta) - \varepsilon^2\nu\theta' - \varepsilon^2 x^{-2}u(\theta)U(\theta)$$

$$\theta' = x - \varepsilon U(\theta)x^{-1} + \varepsilon^2 \ldots, \quad \psi' = \Omega \tag{4.6}$$

В нерезонансном случае ($x \neq \Omega$) процесс $x(t, \varepsilon)$ слабо сходится к медленному диффузионному процессу (1.4). При учете (4.6) коэффициенты уравнения (1.4) запишем в виде

$$b_2 = 0, \quad b_1 = \beta^2 S_x(x)/4 = a_x(x)/2, \quad a(x) = \beta^2 S(x)/2 \tag{4.7}$$

Из (1.4), (4.7) следует, что плотность вероятности $p(x, \tau)$ процесса $x_0(\tau)$ определяется уравнением [3]

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(-\nu x + \frac{1}{2}\frac{da}{dx}\right)p\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(ap) = 0 \tag{4.8}$$

Уравнение (4.8) имеет стационарное решение

$$p(x) = C\exp\left[-2\int\limits_0^x \frac{\nu z}{a(z)}\right] dz \tag{4.9}$$

коэффициент C определяется условием нормировки. Если $\xi(t)$ – белый шум с постоянной спектральной плотностью S_0, то

$$p(x) = C\exp[-\nu x^2/a], \quad a = \beta^2 S_0/4 \tag{4.10}$$

т.е. $x_0(\tau)$ – нормальный стационарный процесс. Очевидно, что стационарное решение существует только при $\nu > 0$.

Исследуем возмущенный резонансный режим. Для того чтобы учесть влияние диссипации, запишем уравнение движения в виде

$$\theta'' + \mu^2 u(\theta) = \mu^2 (k \sin \Omega t + \beta \xi(t) \cos\theta) - \mu^3 \nu \theta', \quad \mu^2 = \varepsilon \tag{4.11}$$

Используя замену (4.5) и положив $x - \Omega = \mu q$, $\theta - \psi = \varphi$, запишем

$$q' = \mu(k \sin\psi + \beta\xi(t)\cos(\varphi + \psi)) - \mu^2 \nu\theta', \quad \varphi' = \mu q, \quad \psi' = \Omega \tag{4.12}$$

Из (4.10), (3.12), (3.13) следует, что возмущение $q(t, \mu)$ слабо сходится к диффузионному процессу (3.13) с коэффициентом сноса $-\Omega\nu$ и дисперсией (3.9) с коэффициентом $\sigma^2 = a(\Omega) = \beta^2 S(\Omega)/2$.

Средняя скорость ухода гироскопа

$$\langle y \rangle = \frac{m}{2\pi} \int_0^{2\pi} (l - \cos\theta)(1 - \kappa\cos^2\theta)^{-1} d\theta \tag{4.13}$$

в резонансном и нерезонансном случаях определяется так же, как в детерминированной задаче, и не зависит от возмущающих факторов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–012–874).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковалева А.С.* Разделение движений в нелинейных системах с вращающейся фазой при случайных возмущениях // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 22–30.
2. *Ковалева А.С.* Многочастотные системы при стационарном случайном возмущении. Ч. 1. Нерезонансные колебания. // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 3. С. 44–52.
3. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов М.: Наука, 1977. 567 с.
4. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Современные пробл. математики. Фундамент. направления. Т. 3. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.
5. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
6. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979. 424 с.
7. *Печенев А.В.* Об осреднении систем с иерархией скоростей вращения фаз // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 24–28.
8. *Ковалева А.С.* О построении последовательных приближений метода возмущений для систем со случайными коэффициентами // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 612–619.
9. *Ладыженская О.А., Солонников В.Л., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
10. *Синицин И.Н.* О флуктуациях гироскопа в кардановом подвесе // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 3. С. 23–317

Москва

Поступила в редакцию
19. I. 1994