УДК 531.01

© 1995 г. В.В. Козлов

# НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ЗАДАЧИ ЯКОБИ О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ НА ЭЛЛИПСОИДЕ

Рассматривается задача о движении точки по поверхности $n$-мерного эллипсоида в потенциальном силовом поле. Показано, что если слагаемые потенциальной энергии обратно пропорциональны второй степени расстояний до $(n-1)$-мерных плоскостей симметрий эллипсоида, то эта задача явно интегрируется методом разделения переменных с использованием эллиптических координат Якоби. Она имеет $n$ независимых коммутирующих интегралов, квадратичных по импульсам. При $n = 2$ дополнительный интеграл указан в явном виде с использованием избыточных координат. В пределе, когда меньшая полуось стремится к нулю, получается новая интегрируемая биллиардная задача внутри эллипса. Обсуждаются обобщения этих результатов для пространства постоянной ненулевой кривизны.

**1. Основной результат**. Как известно [1], Якоби ввел эллиптические координаты в многомерном евклидовом пространстве и с их помощью решил ряд нетривиальных задач динамики. Среди них – знаменитая задача о движении по поверхности $n$-мерного эллипсоида. Траектории материальной точки, движущейся по инерции, совпадают с геодезическими линиями. Более того, Якоби проинтегрировал методом разделения переменных и более общую задачу, когда на точку действует упругая сила, центр которой совпадает с центром эллипсоида.

Пусть $\mathbf{R}^{n+1}$ – евклидово пространство с декартовыми координатами $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Рассмотрим в $\mathbf{R}^{n+1}$ $n$-мерный эллипсоид

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{x_s^2}{a_s^2} = 1 \tag{1.1}$$

причем $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$.

*Теорема* 1. Задача о движении по эллипсоиду (1.1) под действием потенциальных сил с потенциальной энергией

$$V = \frac{k}{2}\sum_{s=0}^{n} x_s^2 + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\alpha_\nu}{x_\nu^2}; \quad k, \alpha_\nu = \mathrm{const} \tag{1.2}$$

вполне интегрируема.

Если $\alpha_0 = \ldots = \alpha_n = 0$, то получаем классический результат Якоби [1]: потенциал (1.2) порождает поле упругих сил, центр которых совпадает с началом координат.

Отметим одно интересное свойство потенциала (1.2) (ср. с [2]). С этой целью рассмотрим движение частицы в $\mathbf{R}^{n+1}$ без связи (1.1) под действием потенциальной силы с компонентами $-\partial V/\partial x_\nu$. Эта задача легко решается с учетом разделения декартовых координат. Оказывается, все ограниченные траектории замкнуты. Этот факт, правда, нуждается в уточнении: следует исключить траектории, попадающие за конечное время на координатные гиперплоскости, где функция (1.2) имеет сингулярности.

Теорема 1 справедлива и в том случае, когда числа $a_0,\ldots, a_n$ имеют разные знаки. В этом случае уравнение (1.1) задает гиперболоид в $\mathbf{R}^{n+1}$. Кроме того, свойство полной интегрируемости сохранится и для эллипсоидов вращения, когда среди $a_0,\ldots, a_n$ найдутся равные числа. Наиболее интересен частный случай, когда $a_0 = \ldots = a_n = a$. Тогда эллипсоид (1.1) будет сферой $\mathbf{S}^n$ радиуса $a^{1/2}$. Поскольку первое слагаемое в (1.2) постоянно на $\mathbf{S}^n$, то оно не оказывает никакого влияния на динамику частицы.

Интегрируемость задачи о движении по двумерной сфере в силовом поле с потенциалом вида (1.2) указана в [3]. Там же отмечено, что для потенциалов

$$\alpha_\nu / x_\nu^2; \quad \nu = 0,1,\ldots,n \tag{1.3}$$

почти все орбиты на $\mathbf{S}^n$ замкнуты. Функции (1.3) – аналоги потенциала упругой пружины в пространстве постоянной положительной кривизны (один из концов пружины закреплён в точке с координатами $x_s = 0$ $(s \neq \nu)$, $x_\nu = \pm 1$). Как заметил Ю.Н. Фёдоров, задача о движении точки по $n$-мерной сфере с потенциальной энергией (1.2) допускает $n(n + 1)/2$ квадратичных интегралов

$$I_{ij} = (\dot{x}_i x_j - x_i \dot{x}_j)^2 + 2\alpha_i x_j^2 / x_i^2 + 2\alpha_j x_i^2 / x_j^2, \quad i,j = 0,1,\ldots,n$$

Так как среди них $2n - 1$ независимых, то орбиты с почти всеми начальными данными замкнуты.

**2. Разделение переменных.** Эллипсоид (1.1) можно включить в семейство конфокальных квадрик в $\mathbf{R}^{n+1}$:

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{x_s^2}{a_s - \lambda} = 1$$

Это алгебраическое уравнение относительно $\lambda$ имеет ровно $n + 1$ вещественных корней

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n \tag{2.1}$$

причём $a_{s-1} < \lambda_s < a_s$ $(s \geqslant 1)$, $\lambda_0 < a_1$. Числа (2.1) – эллиптические координаты в $\mathbf{R}^{n+1}$. Они связаны с декартовыми координатами следующими формулами:

$$x_\nu^2 = \prod_{s=0}^{n} (a_\nu - \lambda_s) / \prod_{s\neq\nu} (a_\nu - a_s) \tag{2.2}$$

Зафиксируем значение переменной $\lambda_0$; например, положим $\lambda_0 = 0$. Тогда получим эллипсоид (1.1). Остальные координаты $\lambda_1,\ldots, \lambda_n$ будут лагранжевыми координатами задачи о движении частицы единичной массы по поверхности (1.1). Пусть $\mu_1,\ldots, \mu_n$ – сопряжённые импульсы. Известна формула для кинетической энергии [1]:

$$T = 2\sum_{s=1}^{n} \frac{\mu_s^2}{M_s(\lambda)}, \quad M_s = -\lambda_s \prod_{\nu\neq s} \frac{\lambda_s - \lambda_\nu}{A(\lambda_s)}$$
$$A(z) = (z - a_0)(z - a_1)\ldots(z - a_n) \tag{2.3}$$

В выражении (1.2) для простоты записи опустим первое слагаемое. Его легко учесть с помощью формул разделения переменных, указанных Якоби в [1]. Используя (2.2), получим выражение потенциальной энергии (1.2) через эллиптические координаты:

$$V = \sum_{s=1}^{n} \frac{\beta_s}{(a_s - \lambda_1)\ldots(a_s - \lambda_n)} \tag{2.4}$$

где $\beta_0,..., \beta_n$ – некоторые новые постоянные. Воспользуемся тождеством

$$\frac{1}{(a_s-\lambda_1)\ldots(a_s-\lambda_n)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\gamma_j}{a_s-\lambda_j},\qquad \gamma_j=\left(\prod_{\nu\neq j}(\lambda_j-\lambda_\nu)\right)^{-1} \tag{2.5}$$

которое просто выводится с помощью теоремы о вычетах. Используя (2.4) и (2.5), получаем окончательно

$$V=\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{\beta_j\gamma_s}{a_j-\lambda_s} \tag{2.6}$$

Итак, согласно (2.3) и (2.6),

$$\sum_{s=1}^{n}\left[-2\mu_s^2\frac{A(\lambda_s)}{\lambda_s}+\sum_{j=0}^{n}\frac{\beta_j}{a_j-\lambda_s}\right]\gamma_s=\sum_{s=1}^{n}[F_0+F_1\lambda_s+\ldots+F_{n-1}\lambda_s^{n-1}]\gamma_s \tag{2.7}$$

где $F_{n-1}=T+V$ – полная энергия. Согласно Якоби [1], выражение справа равно как раз $F_{n-1}$. Применяя общий принцип разделения переменных, приравниваем выражения в квадратных скобках в (2.7) при $s = 1,..., n$. Так как $\lambda_k\neq\lambda_l$ при $k\neq l$, то из получившейся линейной системы можно найти $F_0, F_1,..., F_{n-1}$ как квадратичные функции по импульсам. При этом, конечно, $F_{n-1}$ – полная энергия. Остальные функции $F_0,..., F_{n-2}$ – коммутирующие интегралы рассматриваемой задачи.

Следовательно, задача о движении по $n$-мерному эллипсоиду с потенциалом (1.2) имеет $n$ независимых интегралов в инволюции $F_0,..., F_{n-1}$. По теореме Лиувилля (см., например, [2]), она вполне интегрируема. Теорема 1 доказана.

С помощью упомянутой линейной системы можно выписать дифференциальные уравнения для отыскания эллиптических координат:

$$\lambda_s^{\cdot}=\partial H/\partial\mu_s=\pm4\gamma_s\sqrt{\Phi(\lambda_s)/(2\lambda_s)} \tag{2.8}$$

$$\Phi(z)=A(z)[-F_0-\ldots-F_{n-1}z^{n-1}+\sum\beta_j/(a_j-z)]$$

При учете формулы для $A$, заключаем, что $\Phi(z)$ – многочлен от $z$ степени $2n$. Система (2.8) имеет вид уравнений типа Абеля–Ковалевской.

Полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби для рассматриваемой задачи имеет вид

$$W=-F_{n-1}t+\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{\Phi(\lambda_s)}{\lambda_s}}d\lambda_s$$

Роль $n$ произвольных параметров $c_1,..., c_n$ играют постоянные $n$ независимых интегралов $F_0,..., F_{n-1}$. Общее решение уравнений (2.8) находится из соотношений Якоби

$$\partial W/\partial c_i=b_i,\quad b=\text{const};\quad i=1,\ldots,n$$

**3. Случай двух степеней свободы.** При $n = 2$ можно в явном виде указать дополнительный квадратичный интеграл. Пусть $x, y, z$ – декартовы координаты в $\mathbf{R}^3$ и

$$x^2/a+y^2/b+z^2/c=1 \tag{3.1}$$

– уравнение эллипсоида. Как показал Иоахимсталь (см., например, [4]), для движения по инерции интегралом служит функция

$$I=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left(\frac{\dot{x}^2}{a}+\frac{\dot{y}^2}{b}+\frac{\dot{z}^2}{c}\right) \tag{3.2}$$

Рассмотрим движение частицы единичной массы под действием силы с потенциальной энергией вида (1.2)

$$V=\frac{k}{2}(x^2+y^2+z^2)+\frac{\alpha}{2x^2}+\frac{\beta}{2y^2}+\frac{\gamma}{2z^2} \tag{3.3}$$

Будем искать интеграл уравнений движения

$$x^{\cdot\cdot}=\lambda x/a-V_x,\quad y^{\cdot\cdot}=\lambda y/b-V_y,\quad z^{\cdot\cdot}=\lambda z/c-V_z \tag{3.4}$$

в виде суммы $F=I+f$, где $f$ – пока неизвестная функция от $x, y, z$.

Из (3.1) и (3.4) находится множитель Лагранжа $\lambda$ как функция состояния частицы:

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\lambda=\frac{x}{a}V_x+\frac{y}{b}V_y+\frac{z}{c}V_z-\frac{x^{\cdot 2}}{a}-\frac{y^{\cdot 2}}{b}-\frac{z^{\cdot 2}}{c}$$

Так как функция (3.2) – интеграл уравнений движения по инерции, то в выражении $F^{\cdot}$ совокупность слагаемых третьей степени по скоростям $x^{\cdot}$, $y^{\cdot}$, $z^{\cdot}$ обращается в нуль. Уравнение $F^{\cdot}=0$ принимает следующий явный вид:

$$2\left(\frac{x}{a}V_x+\frac{y}{b}V_y+\frac{z}{c}V_z\right)=\left(\frac{xx^{\cdot}}{a^2}+\frac{yy^{\cdot}}{b^2}+\frac{zz^{\cdot}}{c^2}\right)-$$

$$-2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left(\frac{x^{\cdot}}{a}V_x+\frac{y^{\cdot}}{b}V_y+\frac{z^{\cdot}}{c}V_z\right)+f_xx^{\cdot}+f_yy^{\cdot}+f_zz^{\cdot}=0 \tag{3.5}$$

Если приравнять нулю коэффициенты при $x^{\cdot}$, $y^{\cdot}$, $z^{\cdot}$, то получим систему трёх уравнений в частных производных:

$$2\left(\frac{x}{a}V_x+\frac{y}{b}V_y+\frac{z}{c}V_z\right)\frac{x}{a^2}-2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{V_x}{a}=-f_x,\ \ldots \tag{3.6}$$

Для сингулярной части потенциала (3.3) эта система легко решается:

$$f=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left(\frac{\alpha}{ax^2}+\frac{\beta}{by^2}+\frac{\gamma}{cz^2}\right) \tag{3.7}$$

Однако, если подставить в (3.6) функцию $V=k(x^2+y^2+z^2)/2$, то получим несовместимую систему уравнений. На самом деле здесь нет никакого противоречия. Дело в том, что для упругого потенциала второе слагаемое в (3.5) обращается в нуль ввиду тождества

$$xx^{\cdot}/a+yy^{\cdot}/b+zz^{\cdot}/c=0$$

В связи с чем в (3.6) следует опустить вторые слагаемые. После этого, с учётом (3.1) находим решение

$$f=-k(x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2) \tag{3.8}$$

Суммируя (3.2), (3.7) и (3.8), получаем окончательный результат

$$F=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left(\frac{x^{\cdot 2}}{a^2}+\frac{y^{\cdot 2}}{b^2}+\frac{z^{\cdot 2}}{c^2}-k+\frac{\alpha}{ax^2}+\frac{\beta}{by^2}+\frac{\gamma}{cz^2}\right)$$

**4. Интегрируемый биллиард.** Предполагая справедливыми неравенства $c < b \leqslant a$, устремим в уравнении (3.1) квадрат малой полуоси $c$ к нулю. Естественно ожидать, что в пределе получим задачу о движении точки внутри эллипса

$$x^2 / a + y^2 / b = 1 \tag{4.1}$$

которая упруго отражается от этой кривой.

В отсутствие внешних сил такой предельный переход впервые осуществил Биркгоф [5] (см. также [6]). Характерное свойство биллиарда Биркгофа заключается в следующем: прямолинейные отрезки каждой траектории (или их продолжения) касаются одной и той же коники, софокусной эллипсу (4.1).

Как показано в [7], добавление притягивающей или отталкивающей упругой силы с центром в начале координат также приводит к интегрирующей биллиардной задаче. Её качественный анализ (включая построение бифуркационных диаграмм) содержится в [8].

Было показано [9], что после преобразования Болина эта задача перейдёт в биллиардную задачу о движении частицы под действием гравитационной силы, направленной к фокусу эллипса (4.1). В частности, гравитационный эллиптический биллиард также является интегрируемой динамической системой.

Устремим теперь малую полуось эллипсоида (3.1) к нулю в более общей задаче о движении частицы в поле с потенциалом (3.7). Ясно, что при $c \to 0$ координата $z$ также стремится к нулю. Чтобы избежать сингулярности при $z = 0$, положим в (3.7) $\gamma = 0$.

Можно показать, что существует

$$\lim_{c\to 0} cF|_{x,y} = \frac{\dot{x}^2}{a} + \frac{\dot{y}^2}{b} - \frac{(\dot{x}y - x\dot{y})^2}{ab} + \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\left(-k + \frac{\alpha}{ax^2} + \frac{\beta}{by^2}\right) \tag{4.2}$$

Правая часть этого равенства – квадратичный по скоростям интеграл биллиарда внутри эллипса (4.1). Следовательно, предельная задача интегрируемая. Траектории частицы внутри эллипса состоят из дуг конических сечений. Этот результат можно обобщить. Справедлива

*Теорема* 2. Упругий биллиард внутри эллипса (4.1) с потенциалом

$$V = \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\alpha}{2x^2} + \frac{\beta}{2y^2} + \frac{\gamma_1}{r_1} + \frac{\gamma_2}{r_2} \tag{4.3}$$

где $k$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma_1$, $\gamma_2$ – постоянные, $r_1$, $r_2$ – расстояния от фокусов эллипса до частицы – интегрируемая динамическая система.

Доказательство использует метод разд. 3. Биллиард в эллипсе с упругими отражениями – система с двумя степенями свободы. Она допускает интеграл энергии $(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 + V$. Дополнительный интеграл будем искать в виде (ср. с (4.2))

$$F = \dot{x}^2 / a + \dot{y}^2 / b - (\dot{x}y - x\dot{y})^2 / (ab) + f(x,y)$$

Квадратичная по скоростям составляющая этой функции – интеграл биллиарда Биркгофа. Следовательно, она не изменится в момент упругого удара (величина скорости не меняется и угол падения равен углу отражения). Поэтому функцию $f$ надо искать из условия постоянства $F$ на фазовых траекториях "свободной" системы

$$\ddot{x} = -V_x, \quad \ddot{y} = -V_y$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $\dot{x}$, $\dot{y}$ в уравнении $\dot{F} = 0$, приходим к системе двух уравнений в частных производных

$$\frac{2V_x}{a} - \frac{2y}{ab}(yV_x - xV_y) = f_x, \quad \frac{2V_y}{b} + \frac{2x}{ab}(yV_x - xV_y) = f_y$$

Ввиду равенства $f_{xy}=f_{yx}$ получаем искомое уравнение второго порядка в частных производных на потенциал:

$$(a-b)V_{xy}+3(yV_x-xV_y)+(y^2-x^2)V_{xy}+xy(V_{xx}-V_{yy})=0 \tag{4.4}$$

Каждому его решению отвечает интегрируемый биллиард в эллипсе (4.1). Ясно, что $a-b$ равно квадрату расстояния от фокуса до центра эллипса. Для завершения доказательства остаётся проверить, что каждое слагаемое в (4.3) удовлетворяет уравнению (4.4).

**5. Некоторые обобщения**. Пусть $\mathbf{R}^{n+2}$ – евклидово пространство с декартовыми координатами $x_1,..., x_{n+2}$ и

$$\mathbf{S}^{n+1}=\left\{x\colon \sum_{\nu=1}^{n+2} x_\nu^2=1\right\} \tag{5.1}$$

– $(n+1)$-мерная сфера, метрика которой имеет постоянную положительную кривизну. Рассмотрим в $\mathbf{R}^{n+2}$ ещё $(n+1)$-мерный конус с вершиной в начале координат, задаваемый уравнением

$$\sum_{\nu=1}^{n+2}\frac{x_\nu^2}{a_\nu-z}=0 \tag{5.2}$$

где $a_1 < a_2 < ... < a_{n+2}$, $z \neq a_\nu$ и $a_1 < z < a_{n+2}$. Конус (5.2) пересекает сферу (5.1) по $n$-мерной поверхности $E^n$ – естественному аналогу эллипсоида в пространстве постоянной кривизны.

Как и в случае плоского пространства, задача о геодезических на $E^n$ – вполне интегрируемая гамильтонова система. Этот результат фактически был известен Якоби [1]. Геометрические и аналитические аспекты задачи о геодезических на $E^n$ обсуждаются в [10]. Эта обобщённая задача Якоби решается методом разделения переменных с использованием сфероконических координат; они определяются как корни уравнения (5.2) $z_1,..., z_{n+1}$, разделяющие числа $a_1,..., a_{n+2}$. Переменные $z_k$ – лагранжевы координаты на сфере $\mathbf{S}^{n+1}$. Декартовы координаты $x$ выражаются через $z$ с использованием уравнения сферы (5.1).

Как уже говорилось, задача о движении по инерции по поверхности эллипсоида в плоском пространстве останется вполне интегрируемой, если добавить упругую силу, линия действия которой постоянно проходит через центр симметрии эллипсоида [1]. Естественным аналогом этого результата Якоби является

*Теорема* 3. Задача о движении по эллипсоиду $E^n \subset \mathbf{S}^{n+1}$ под действием сил с потенциалом

$$V=\sum_{\nu=1}^{n+2}\alpha_\nu / x_\nu^2 \tag{5.3}$$

вполне интегрируема.

Для того чтобы выяснить геометрический смысл потенциала (5.3), рассмотрим движение точки по $\mathbf{S}^{n+1}$ под действием потенциальной силы, потенциал которой зависит от расстояния до некоторого центра (точки на $\mathbf{S}^{n+1}$) – аналог центрального движения в плоском евклидовом пространстве. В качестве расстояния можно принять угловую координату $\vartheta$ на большом круге, отсчитываемую от указанного центра. В [11] решена обобщённая задача Бертрана: найти все потенциалы, для которых почти все орбиты замкнуты. Оказывается, эта задача (как и в пространстве нулевой кривизны) имеет всего два решения

$$V=\alpha \operatorname{ctg}\vartheta, \quad V=\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\vartheta; \quad \alpha,\beta=\mathrm{const} \tag{5.4}$$

Первое из них – аналог ньютоновского потенциала; эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа–Бельтрами на $S^3$ [3]. Второе решение – аналог потенциала упругой пружины.

Можно показать, что если центры упругого притяжения или отталкивания поместить в точки $S^{n+1}$ с координатами

$$(\pm 1, 0,..., 0),..., (0,..., 0, \pm 1)$$

то с точностью до несущественной аддитивной постоянной потенциал силового поля будет иметь вить (5.3). Одна из этих точек совпадает с центром эллипсоида $E^n$.

Теорема 3 доказывается с помощью сфероконических координат. Разделение переменных проводится по схеме, изложенной в разд. 2.

С теоремой 3 связаны некоторые новые интегрируемые биллиардные задачи. Рассмотрим движение частицы по сфере $S^{n+1}$ внутри (или вне) эллипсоида $E^n$ под действием сил с потенциалом (5.3), причём удары о границу $E^n$ считаются абсолютно упругими. Можно показать, что эта динамическая система с $n + 1$ степенями свободы вполне интегрируема: она допускает $n + 1$ независимых коммутирующих интегралов, квадратичных по скоростям.

При $n = 1$ можно говорить о фокусах эллипса $E^1$. Если поместить в эти фокусы гравитирующие центры, потенциалы которых определяются первой формулой (5.4), то снова получим интегрируемый биллиард внутри (вне) кривой $E^1$ на двумерной сфере. В отсутствие сил интегрируемость упругого биллиарда внутри $E^1 \subset S^2$ установлена в [12]. Многомерные обобщения даны в [10].

Отметим в заключение, что аналогичные результаты справедливы и в пространстве постоянной отрицательной кривизны.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16244).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Якоби К.* Лекции по динамике. М.; Л.: Гостехиздат, 1936. 270 с.
2. *Переломов А.М.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990. 237 с.
3. *Kozlov V., Harin A.* Kepler's problem in constant curvature spaces // Celest. Mech. and Dynam. Astronom., 1992. V. 54. № 4. P. 393–399.
4. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 1. М.: Физматгиз, 1960. 515 с.
5. *Биркгоф Дж.* Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
6. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Биллиарды. М.: Изд-во МГУ. 1991. 168 с.
7. *Козлов В.В.* Конструктивный метод обоснования теории систем с неудерживающими связями // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 883–894.
8. *Ильинская Н.Н.* Геометрический анализ задачи о гармоническом осцилляторе в эллипсе // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика, механика. 1991. № 1. С. 88–92.
9. *Панов А.А.* Эллиптический биллиард с ньютоновским потенциалом. Мат. заметки, 1994. Т. 55. Вып. 3. С. 139–140.
10. *Veselov A.P.* Confocal surfaces and integrable billiards on the sphere and in Lobachevsky space // J. Geometry and Phys. 1990. V. 7. № 7. P. 81–107.
11. *Slawianowski J.* Bertrand systems on SO (3, R) and SU (2) // Bull. L'Acad. Polonaise Sci. Ser. Sci. Phys. et astron. 1980. V. 28. № 2. P. 83–94.
12. *Абдрахманов А.М.* Интегрируемые бильярды // Вест. Моск. ун-та. Сер. Математика, механика. 1990. № 6. С. 28–33.

Москва

Поступила в редакцию
9.11.1994