УДК 531.36

© 1995 г. Ю.Н. Бибиков

# О СУЩЕСТВОВАНИИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Качественными методами теории Колмогорова – Арнольда – Мозера исследуется квазилинейная колебательная система с конечномерным базисом частот. Ставится и исследуется задача о существовании квазипериодических решений возмущенной системы с тем же базисом частот на основе соответствующих предположений относительно арифметических свойств характеристических показателей порождающей системы. Обобщаются результаты Н.Н. Боголюбова и Ю.А. Митропольского на случай, когда матрица линейной системы не вырождена и допускает чисто мнимые собственные числа. С использованием структурных свойств системы, посредством замен переменных, близких к тождественным, и введением степенных масштабов малого параметра, доказывается существование интегральных многообразий определенного вида. Наряду с рассмотрением так называемого алгебраического критического случая, связанного с исследованиями упомянутых выше авторов, изучается трансцендентный случай критической части матрицы, причем обосновываются и уточняются соответствующие результаты Ю. Мозера.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим квазилинейную $n$-мерную систему

$$\dot{x} = \Lambda x + f(t) + \varepsilon X(t, x, \varepsilon) \tag{1.1}$$

правая часть которой – достаточно гладкая функция при $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon^*$, $x \in D$, где $D$ – область в $\mathbb{R}^n$. При этом $\Lambda$ – постоянная матрица, $f$ и $X$ квазипериодичны как функции $t$ с вектором $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$ базисных частот.

Функцию $z(t)$ называем квазипериодической с базисными частотами $\omega_1, ..., \omega_m$, если эти частоты рационально независимы и существует $2\pi$-периодическая по компонентам вектора $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$ функция $Z(\varphi)$, такая, что $z(t) = Z(\omega_1 t, ..., \omega_m t)$. Функцию $Z(\varphi)$ будем называть образующей квазипериодической функции $z(t)$. В дальнейшем под квазипериодическими функциями будем понимать функции с одним и тем же вектором $\omega$ базисных частот. Все рассматриваемые функции переменной $\varphi$ $2\pi$-периодичны по $\varphi_1, ..., \varphi_m$ и вещественно аналитичны при $|\mathrm{Im}\, \varphi| < \varphi^*$, $\varphi^* > 0$.

Рассматривается вопрос о существовании квазипериодических решений системы (1.1) при малых положительных значениях параметра $\varepsilon$.

Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – собственные значения матрицы $\Lambda$. Как известно [1], если $\mathrm{Re}\lambda_j \neq 0$ $(j = 1, ..., n)$, то система (1.1) имеет единственное квазипериодическое решение, стремящееся при $\varepsilon \to 0$ к квазипериодическому решению порождающего уравнения

$$\dot{x} = \Lambda x + f(t) \tag{1.2}$$

Ниже этот результат Н.Н. Боголюбова обобщается на случай, когда матрица $\Lambda$ невырождена, но допускает чисто мнимые собственные числа.

**2. Алгебраический случай.** Предположим, что $\mathrm{Re}\lambda_j = 0$ ($j = 1, ..., 2l$), а остальные собственные числа матрицы $\Lambda$ не лежат на мнимой оси. Предположим также, что числа $\lambda_j = i\alpha_j$ ($j = 1, ..., 2l$) различны, отличны от нуля и удовлетворяют диофантовому условию

$$\left|\sum_{i=1}^{m} q_i\omega_i + \sum_{i=1}^{2l} p_j\alpha_j\right| > \gamma\ |q|^{-\tau},\ \ \gamma > 0,\ \ \tau \geq m \tag{2.1}$$

где $|q| = |q_1| + ... + |q_m| > 0$, $|p| = |p_1| + ... + |p_{2l}| \leq 2$, $|p_1 + ... + p_{2l}| \leq 1$ ($p_j$, $q_j$ – целые числа). Условие (2.1) распадается на три системы неравенств

$$\left|\sum_{i=1}^{m} q_i\omega_i\right| > \gamma |q|^{-\tau} \tag{2.2}$$

$$\left|\sum_{i=1}^{m} q_i\omega_i - \alpha_j\right| > \gamma |q|^{-\tau},\ \ j = 1,\ldots,2l \tag{2.3}$$

$$\left|\sum_{i=1}^{m} q_i\omega_i + \alpha_j - \alpha_k\right| > \gamma |q|^{-\tau},\ \ j,\ k = 1,\ldots,2l;\ \ j \neq k \tag{2.4}$$

*Лемма* 1. При выполнении условия (2.3) система (1.2) имеет единственное квазипериодическое решение $x = \psi(t)$.

*Доказательство.* Запишем систему (1.2) в виде системы

$$\dot{\varphi} = \omega,\ \ \varphi(0) = 0;\ \ \dot{x} = \Lambda x + F(\varphi) \tag{2.5}$$

где $F(\varphi)$ – образующая квазипериодической функции $f(t)$. Нужно доказать, что система (2.5) имеет интегральное многообразие $x = \Psi(\varphi)$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы функция $\Psi(\varphi)$ удовлетворяла уравнению

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\omega - \Lambda\Psi = F(\varphi)$$

Последнее уравнение при условии (2.3) однозначно разрешимо в рассматриваемом классе функции (см., например, [2]).

Пусть траектория $\psi(t)$ принадлежит области $D$. Будем искать квазипериодическое решение системы (1.1), стремящееся при $\varepsilon \to 0$ к порождающему решению $\psi(t)$. Положим

$$y = x - \psi(t) \tag{2.6}$$

Тогда система (1.1) примет вид

$$\dot{y} = \Lambda y + \varepsilon X(t,\ \ y + \psi(t),\ \ \varepsilon) \tag{2.7}$$

Если положить $A = \mathrm{diag}\ (\lambda_1, ..., \lambda_{2l})$, то в подходящих координатах $\xi$, $\eta$ систему (2.7) можно представить в виде:

$$\begin{gathered}\dot{\varphi} = \omega,\ \ \varphi(0) = 0\\ \dot{\xi} = A\xi + \varepsilon a(\varphi) + \varepsilon T(\varphi)\xi + \varepsilon\Xi(\varphi,\ \xi,\ \eta,\ \varepsilon)\\ \dot{\eta} = Q\eta + \varepsilon b(\varphi) + \varepsilon Y(\varphi,\ \xi,\ \eta,\ \varepsilon)\\ \Xi(\varphi,\ 0,\ 0,\ 0) = 0,\ \ Y(\varphi,\ 0,\ 0,\ 0) = 0,\ \ \frac{\partial\Xi}{\partial\xi}(\varphi,\ 0,\ 0,\ 0) = 0\end{gathered} \tag{2.8}$$

где $Q$ – некритическая матрица. При этом уравнения, соответствующие комплексно сопряженным элементам матрицы $A$, тоже комплексно сопряжены.

*Лемма* 2. При выполнении условия (2.1) существует замена

$$\xi = u + \varepsilon p(\varphi) + \varepsilon P(\varphi)u, \quad \eta = \upsilon + \varepsilon q(\varphi) \tag{2.9}$$

приводящее систему (2.8) к виду

$$\dot\varphi = \omega, \quad \varphi(0) = 0$$

$$\dot u = (A + \varepsilon B)u + \varepsilon U(\varphi, u, \upsilon, \varepsilon), \quad \dot\upsilon = Q\upsilon + \varepsilon V(\varphi, u, \upsilon, \varepsilon) \tag{2.10}$$

$$U(\varphi, 0, 0, 0) = 0, \ V(\varphi, 0, 0, 0) = 0; \ \frac{\partial U}{\partial u}(\varphi, 0, 0, 0) = 0$$

где $B = \mathrm{diag}(B_1, ..., B_{2l})$ – постоянная диагональная матрица, причем комплексно сопряженным $\lambda_j$ соответствуют комплексно-сопряженные $B_j$.

*Доказательство*. Дифференцируя равенства (2.9) в силу систем (2.8) и (2.10), получим следующие уравнения для определения векторов $p(\varphi)$, $q(\varphi)$ и компонент $P_{jk}(\varphi)$ матрицы $P(\varphi)$:

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi}\omega - Ap = a(\varphi), \ \frac{\partial q}{\partial \varphi}\omega - Qq = b(\varphi) \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial P_{jk}}{\partial \varphi}\omega + i(\alpha_j - \alpha_k)P_{jk} = T_{jk}(\varphi), \ j \neq k$$

$$\frac{\partial P_{jj}}{\partial \varphi}\omega = T_{jj}(\varphi) - B_j$$

Если в качестве $B_j$ взять средние значения функций $T_{jj}(\varphi)$ ($j = 1, ..., 2l$), то в силу условий (2.2)–(2.4) уравнения (2.11) разрешимы [2]. Утверждение о комплексной сопряженности $B_j$ вытекает из комплексной сопряженности функций $T_{jj}(\varphi)$.

Положим

$$u = \sqrt{\varepsilon}z, \quad \upsilon = \sqrt{\varepsilon}w \tag{2.12}$$

Система (2.10) примет вид

$$\dot\varphi = \omega, \quad \varphi(0) = 0$$

$$\dot z = (A + \varepsilon B)z + \varepsilon^{3/2} Z(\varphi, z, w, \sqrt{\varepsilon}) \tag{2.13}$$

$$\dot w = Qw + \sqrt{\varepsilon}\, W(\varphi, z, w, \sqrt{\varepsilon})$$

где $Z$, $W$ – гладкие при малых $\| z \|$, $\| w \|$, $\sqrt{\varepsilon}$ и $\varphi \in \mathbb{R}^m$ функции.

Система (2.13) имеет ([3], лемма 2.1) интегральное многообразие вида $z = z(\varphi, \varepsilon)$, $w = w(\varphi, \varepsilon)$. Отсюда вытекает

*Теорема* 1. Если выполнено условие (2.1) и

$$\mathrm{Re}B_j \neq 0, \ j = 1, ..., 2l \tag{2.14}$$

то система (1.1) имеет при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ квазипериодическое решение, стремящееся при $\varepsilon > 0$ к порождающему решению.

Теорема 1 – частный случай доказанной ниже теоремы 2.

*Замечание*. Наряду с квазипериодическими решениями с $m$ базисными частотами, благодаря наличию у матрицы $A$ $l$ пар чисто мнимых собственных чисел система (1.1) при определенных условиях обладает инвариантными торами любой размерности от $m + 1$ до $m + l$ (см. [2], § 6 гл. 1). В таком случае при $\varepsilon = 0$ имеет место ветвление инвариантного тора.

Рассмотрим более общую ситуацию.

*Лемма* 3. Каково бы ни было натуральное число $\nu$ при выполнении условия (2.1) существует замена

$$\xi = u + \varepsilon g(\varphi, u, \varepsilon), \quad \eta = \upsilon + \varepsilon h(\varphi, u, \varepsilon) \tag{2.15}$$

приводящая систему (2.8) к виду

$$\begin{gathered}\dot\varphi = \omega, \quad \varphi(0) = 0 \\ \dot u = (A + \varepsilon B^{(1)} + \ldots + \varepsilon^{\nu} B^{(\nu)})u + \varepsilon U(\varphi, u, \upsilon, \varepsilon) \\ \dot\upsilon = Q\upsilon + \varepsilon V(\varphi, u, \upsilon, \varepsilon) \\ U(\varphi, 0, 0, \varepsilon) = O(\varepsilon^{2\nu-1}), \quad V(\varphi, 0, 0, \varepsilon) = O(\varepsilon^{2\nu-1}) \\ \frac{\partial U}{\partial u}(\varphi, 0, 0, \varepsilon) = O(\varepsilon^{\nu}), \quad \frac{\partial V}{\partial u}(\varphi, 0, 0, \varepsilon) = O(\varepsilon^{\nu-1})\end{gathered} \tag{2.16}$$

где $B^{(j)} = \mathrm{diag}(B_1^{(j)}, \ldots, B_{2l}^{(j)})$ – постоянные диагональные матрицы.

Лемма 3 доказывается аналогично лемме 2. При этом функции $g$, $h$ в замене (2.15) являются линейными функциями переменной $u$, коэффициенты и свободные члены которых – полиномы по $\varepsilon$.

Далее полагаем

$$u = \varepsilon^{\nu - \frac{1}{2}} z, \quad \upsilon = \varepsilon^{2\nu-1} w \tag{2.17}$$

Тогда система (2.16) принимает вид

$$\begin{gathered}\dot\varphi = \omega, \quad \varphi(0) = 0 \\ \dot z = (A + \varepsilon B^{(1)} + \ldots + \varepsilon^{\nu} B^{(\nu)})z + \varepsilon^{\nu + \frac{1}{2}} Z(\varphi, z, w, \sqrt{\varepsilon}) \\ \dot w = Qw + \sqrt{\varepsilon}\, W(\varphi, z, w, \sqrt{\varepsilon})\end{gathered} \tag{2.18}$$

где $Z$, $W$ – гладкие функции при малых $\| z \|$, $\| w \|$, $\sqrt{\varepsilon}$ и $\varphi \in \mathbb{R}^m$.

*Теорема* 2. Если выполнено условие (2.1) и

$$(\mathrm{Re}\, B_j^{(1)})^2 + \ldots + (\mathrm{Re}\, B_j^{(\nu)})^2 > 0, \quad j = 1, \ldots, 2l \tag{2.19}$$

то система (1.1) имеет при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ квазипериодическое решение, стремящееся при $\varepsilon > 0$ к порождающему решению.

*Доказательство*. В силу условия (2.19) $A + \varepsilon B^{(1)} + \ldots + \varepsilon^{\nu} B^{(\nu)}$ – диагональная матрица с блоками вида $iS(\varepsilon) + \varepsilon^{r} R(\varepsilon)$, где $0 < r \leqslant \nu$, а $S(\varepsilon)$, $R(\varepsilon)$, – вещественные диагональные матрицы, причем $R(0)$ – матрица с ненулевыми диагональными элементами. Пусть число таких блоков равно $\sigma$. Систему (2.18) можно представить в виде

$$\begin{gathered}\dot\varphi = \omega, \quad \varphi(0) = 0 \\ \dot z_k = \varepsilon^{r_k}\left[iS_k(\varepsilon)\varepsilon^{-r_k} + R_k(\varepsilon)\right] + O(\varepsilon^{\nu + \frac{1}{2}}) \\ \dot w = Qw + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad k = 1, \ldots, \sigma; \quad 0 < r_k \leqslant \nu\end{gathered}$$

Не нарушая общности, считаем, что $R_k = \mathrm{diag}\,(R_k^{+}, R_l^{-})$, где диагональные элементы матриц $R_k^{+}$ положительны, а диагональные элементы матриц $R_k^{-}$ отрицательны. Пусть соответственно $\varepsilon^{-r_k} S_k = \mathrm{diag}(S_k^{(1)}(\varepsilon), S_k^{(2)}(\varepsilon))$. Для матриц

$$J_k(t) = \begin{cases} -\mathrm{diag}(X_{1k}^{+}, 0), & t > 0 \\ \mathrm{diag}(0, X_{2k}^{-}), & t < 0 \end{cases}$$

$$\chi_{mk}^{\pm} = \exp\left[-(iS_k^{(m)} + R_k^{\pm})t\right], \quad m = 1, 2; \quad k = 1, \ldots, \tau$$

при всех $t \in \mathbb{R}$ имеет место оценка

$$\|J_k(t)\| \le \beta e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

Используя эту оценку, точно так же, как при доказательстве теоремы из ([2], § 3 гл. 1), докажем, что система (2.18) имеет интегральное многообразие $z = z(\varphi, \varepsilon)$, $w = w(\varphi, \varepsilon)$. Подставляя эти выражения в (2.17), учитывая замены (2.14) и (2.6) и тот факт, что $\varphi = \omega t$, получим утверждение теоремы.

Если существует натуральное число $\nu$, для которого выполняется условие (2.19), то, следуя Ляпунову, говорим, что имеет место алгебраический случай. В противном случае говорим, что имеет место трансцендентный случай. Итак, выше был рассмотрен алгебраический случай.

**3. Трансцендентный случай**. Пусть в системе (2.10) выполнено условие

$$B_j = i\beta_j, \quad \beta_j \ne 0, \quad j = 1, \ldots, 2l \tag{3.1}$$

где числа $\beta_j$ вещественны и попарно различны.

Ограничимся рассмотрением случая $n = 2l$, т.е. когда в системе (1.1) некритические переменные отсутствуют. Кроме того, предположим, что функции в правой части (1.1) вещественно аналитичны при малых $|\operatorname{Im} t|$, $|\varepsilon|$, а по $x$ – в комплексной окрестности области $D$. Соответственно, система (2.13) аналитична при малых $\|z\|$, $\|w\|$, $\|\operatorname{Im}\varphi\|$, $\left|\sqrt{\varepsilon}\right|$.

Числа $\lambda_j = i\alpha_j$, $B_j = i\beta_j$ распадаются на комплексно-сопряженные пары. Пусть $\alpha_k = -\alpha_{k+l}$, $\beta_k = -\beta_{k+l} (k = 1, \ldots, l)$, причем, не нарушая общности, считаем, что $\beta_k > 0$.

Рассмотрим числа $\mu_1, \ldots \mu_{2l}$, где $\mu_k = -\mu_{k+l}$, удовлетворяющие условию (2.1) при $\gamma = K\varepsilon$, т.е. условию

$$\left|\sum_{i=1}^{m} q_i\omega_i + \sum_{j=1}^{2l} p_j\mu_j\right| > K\varepsilon|q|^{-\tau}, \quad K > 0, \quad \tau > 0 \tag{3.2}$$

$$|q| > 0, \ |p| \le 2, \ |p_1 + \ldots + p_{2l}| \le 1$$

Образуем матрицу $M = \operatorname{diag}(i\mu_1, \ldots, i\mu_{2l})$.

Справедливо [4] следующее утверждение.

*Лемма* 3. Существует число $\varepsilon^*(K) > 0$, обладающее свойством: существуют матричные функции $\Delta(\sqrt{\varepsilon})$, $C(\varphi, \sqrt{\varepsilon})$ и векторная функция $c(\varphi, \sqrt{\varepsilon})$, аналитические по $\sqrt{\varepsilon}$ при $\left|\sqrt{\varepsilon}\right| < \sqrt{\varepsilon^*}$ и такие, что замена

$$z = \zeta + c(\varphi, \sqrt{\varepsilon}) + C(\varphi, \sqrt{\varepsilon})\zeta \tag{3.3}$$

приводит систему

$$\dot\varphi = \omega, \ \varphi(0) = 0; \ \dot z = (M + \varepsilon^{3/2}\Delta(\sqrt{\varepsilon}))z + \varepsilon^{3/2} Z(\varphi, z, \sqrt{\varepsilon}) \tag{3.4}$$

к виду

$$\dot\varphi = \omega, \ \varphi(0) = 0; \ \dot\zeta = M\zeta + Y(\varphi, \zeta, \sqrt{\varepsilon}) \tag{3.5}$$

$$\left(Y(\varphi, 0, \sqrt{\varepsilon}) = 0, \ \frac{\partial Y}{\partial \zeta}(\varphi, 0, \sqrt{\varepsilon}) = 0\right) \tag{3.6}$$

При этом $\Delta(\sqrt{\varepsilon})$ – диагональная матрица и комплексно-сопряженным элементам матрицы $M$ соответствуют комплексно-сопряженные элементы матрицы $\Delta$.

Рассмотрим вопрос о существовании чисел $\mu_1, \ldots, \mu_{2l}$, удовлетворяющих условию (3.2). Причем $\tau = m + 1$. Положим $\mu_k - \alpha_k = \varepsilon_k$ $(k = 1, \ldots l)$. При $|p| = 0$ неравенство

(3.2) выполняется в силу (2.2), так как можно считать, что $K\varepsilon < \gamma$. При $|p| = 1$ неравенства (3.2) имеют вид неравенств

$$\left|\sum_{i=1}^{m} q_i\omega_i - (\alpha_k + \varepsilon_k)\right| > K\varepsilon|q|^{-(m+1)}, \quad k = 1,\ldots,l \tag{3.7}$$

При $|p| = 2$ неравенства (3.2) принимают вид неравенств

$$\left|\sum_{i=1}^{m} q_i\omega_i + (\alpha_j + \varepsilon_j) \mp (\alpha_k + \varepsilon_k)\right| > K\varepsilon|q|^{-(m+1)} \tag{3.8}$$

$k, j = 1, \ldots, l; \; k \neq j$

Лемма 4. Для любых $\theta > 0$, $\eta > 0$ можно выбрать $K(\theta, \eta) > 0$ так, чтобы неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{m} q_i\omega_i - \Omega\right| > K\varepsilon|q|^{-(m+1)} \tag{3.9}$$

выполнялось для значений $\Omega$ из некоторого множества $\Gamma$, причем для любого интервала $L$ длины $2\eta\varepsilon$ было mes $(\Gamma \cap L) > 2\eta\varepsilon(1-\theta)$.

*Доказательство*[1]. Найдем меру множества тех $\Omega > 0$, для которых неравенство 3.9 не выполняется, т.е.

$$\left|\sum_{i=1}^{m} q_i\omega_i - \Omega\right| \leqslant K\varepsilon|q|^{-(m+1)}$$

Для данных $q_1, \ldots, q_m$ мера множества таких $\Omega$ равна $2K\varepsilon\,|q|^{-(m+1)}$. Просуммируем эту величину по всем целочисленным $q_1, \ldots, q_m$. Так как количество различных наборов $q_1, \ldots, q_m$ с одной и той же нормой $|q|$ мажорируется величиной $c_1|q|^{m-1}$, $c_1 > 0$, то получим величину, не превосходящую

$$\sum_{|q|=1}^{\infty} \frac{2c_1K_\varepsilon}{|q|^2} = c_2K_\varepsilon, \quad c_2 > 0$$

Следовательно, mes $(\Gamma \cap L) \geqslant 2\eta\varepsilon - c_2K\varepsilon$. Если принять $K < 2\eta\theta\, c_2^{-1}$, то mes $(\Gamma \cap L) > 2\eta\varepsilon(1-\theta)$, что и требовалось доказать.

*Следствие*. Для любых $\eta_k > 0$ $(k = 1, \ldots, l)$ неравенства (3.7) выполняются при $\varepsilon_k \in \Gamma_k \subset (-\eta_k\varepsilon, \eta_k\varepsilon)$, причем за счет выбора $K$ меру $\Gamma_k$ можно сделать сколь угодно близкой к величине $2\eta_k\varepsilon$. Аналогичное утверждение справедливо для чисел $(\varepsilon_j \mp \varepsilon_k \in \Gamma_{kj}^{\mp} \subset (-\eta_j + \eta_k)\varepsilon, (\eta_j + \eta_k)\varepsilon)$, удовлетворяющих неравенствам (3.8).

Предположим, что выполняется условие

$$\Delta = i\,\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_l, \; -d_1, \ldots, \; -d_l) \tag{3.10}$$

где $d_k(\sqrt{\varepsilon})$ $(k = 1, \ldots, l)$ – вещественно аналитические функции.

*Теорема* 3. Если выполнены условия (2.1), (3.1), (3.10), то в любой положительной полуокрестности точки $\varepsilon = 0$ существуют значения $\varepsilon$, которым соответствуют квазипериодические решения системы (1.1), стремящиеся при $\varepsilon \to 0$ к порождающему решению. При этом для $\varepsilon \leftarrow (0, \varepsilon_0)$ мера множества таких $\varepsilon$ эквивалентна как бесконечно малая величина величине $\varepsilon_0$.

*Доказательство*. Рассматрим систему (3.5). Из (3.6) вытекает, что она имеет решение $\varphi = \omega t$, $\zeta = 0$, которому в силу (3.3) соответствует решение

---

[1] Это доказательство принадлежит *Брюно А.Д.*

$\varphi = \omega t$, $z = c(\omega t, \sqrt{\varepsilon})$ системы (3.4). Система (3.4) совпадает с системой (2.13) (у которой третье уравнение в данном случае отсутствует), если

$$A + \varepsilon B = M + \varepsilon^{3/2}\Delta(\sqrt{\varepsilon}) \tag{3.11}$$

В неравенстве (3.2) зафиксируем $\varepsilon = \varepsilon_0$, считая $\varepsilon_0$ достаточно малой величиной. Пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\eta_k = \beta_k/2$. Зафиксируем значение $K$, обеспечивающее согласно следствию из леммы 4 достаточную близость меры множеств $\Gamma_k$ к величинам $2\eta_k\varepsilon_0$ при всех $k = 1, ..., l$.

Так как матрица $M$ зависит от параметров $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_l$, то функция $\Delta$ зависит не только от $\sqrt{\varepsilon}$, но и от этих параметров. Как функция этих параметров она определена в силу (3.7), (3.8) и следствия из леммы 4 на некотором множестве $\Gamma \subset \prod_{k=1}^{l}(-\eta_k\varepsilon_0, \eta_k\varepsilon_0)$.

Более того, было показано [5], что как функция $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_l$ она может быть продолжена до функции класса $C^\infty$ на прямое произведение интервалов $(-\eta_k\varepsilon_0, \eta_k\varepsilon_0)$. Продолженную функцию обозначим $E = i\,\mathrm{diag}(E_1, ..., E_l, -E_1, ..., -E_l)$.

Запишем уравнение (3.10) с продолженной функцией $\Delta$ покоординатно:

$$\beta_k\varepsilon - \varepsilon_k - \varepsilon^{3/2}E_k(\sqrt{\varepsilon},\ \varepsilon_1,\dots,\varepsilon_l) = 0,\ \ k = 1,\dots,l \tag{3.12}$$

Якобиан этой системы по $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_l$, при $\varepsilon = \varepsilon_1 = ... = \varepsilon_l = 0$ отличен от нуля. Следовательно, система (3.12) имеет решение $\varepsilon_{k*} = \beta_k\varepsilon + F_k(\varepsilon)$, $k = 1, ..., l$, причем $F_k(\varepsilon) = o(\varepsilon)$. Функции $F_k$ определены при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0/2)$. Однако представляют интерес лишь те значения $\varepsilon$, которым соответствуют

$$\varepsilon_{k*} = \beta_k\varepsilon + F_k(\varepsilon) \in \Gamma_k \tag{3.13}$$

$$\varepsilon_j \mp \varepsilon_k = (\beta_j \mp \beta_k) + (F_j(\varepsilon) \mp F_k(\varepsilon)) \in \Gamma_{kj}^{\mp}$$

$$k, j = 1, ..., l$$

По следствию из леммы 4 каждое из условий (3.13) определяет множество значений $\varepsilon = (0, \varepsilon_0/2)$, мера которого сколь угодно близка к $\varepsilon_0/2$. В силу аддитивности мера множества значений $\varepsilon$, удовлетворяющих всем условиям (3.13), также сколь угодно близка к $\varepsilon_0/2$. При указанных значениях $\varepsilon$ система (2.13) имеет решение $\varphi = \omega t$, $z = c(\omega t, \sqrt{\varepsilon})$, которому на основании (2.6), (2.9), (2.12) соответствует искомое квазипериодическое решение системы (1.1). Теорема 3 доказана.

Условие (2.1) при фиксированной матрице $A$ выполняется для почти всех векторов частот $\omega$. В противоположность этому условию (3.1) и (3.10) налагают существенные ограничения на характер рассматриваемой системы. Эти ограничения аналогичны тем, которые налагает на системы дифференциальных уравнений условие применимости к ним КАМ-теории. Как известно, КАМ-теория применима к гамильтоновым и обратимым системам. Покажем, что условия (3.1) и (3.10) тоже выполняются для гамильтоновых и обратимых систем. Одновременно будет показано, что гамильтоновы и обратимые системы принадлежат трансцендентному случаю.

Рассмотрим обратимые системы. Систему (1.1) будем называть обратимой, если коэффициенты Фурье по $\varphi$ правой части соответствующей ей системы (2.8) с диагональной матрицей $A$ – чисто мнимые функции вещественных переменных $\xi$, $\varepsilon$ (переменная $\eta$ в (2.8) отсутствует).

Приведем пример обратимой системы. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{x}_k + a_k^2 x_k = f_k(t) + \varepsilon X_k(t,\ x,\ \dot{x},\ \varepsilon),\ \ k = 1,\dots,d \tag{3.14}$$

где функции $f_k$, $X_k$ удовлетворяют условиям, наложенным в разд. 3 на координатные функции векторов $f$, $X$ системы (1.1).

*Лемма* 5. Если в системе (3.14)

$$f_k(-t)=f_k(t),\ X_k(-t,\ x,\ -\dot{x},\ \varepsilon)=X_k(t,\ x,\ \dot{x},\ \varepsilon),\ k=1,...,d \tag{3.15}$$

то система (3.14) обратима.

*Доказательство*. Порождающее решение системы (3.14) – четная функция. Система, соответствующая системе (2.7), имеет вид

$$\dot{y}_{2k-1}=-ia_k y_{2k-1}+ia_k^{-1}\varepsilon g_k\left(t,\ \frac{1}{2}(y_{2j-1}+y_{2j}),\ \frac{a_j}{2i}(y_{2j-1}-y_{2j}),\ \varepsilon\right)$$

$$\dot{y}_{2k}=ia_k y_{2k}-ia_k^{-1}\varepsilon g_k\left(t,\ \frac{1}{2}(y_{2j-1}+y_{2j}),\ \frac{a_j}{2i}(y_{2j-1}-y_{2j}),\ \varepsilon\right)$$

$$g_k(t,\ u_j,\ \dot{u}_j,\ \varepsilon)=X_k(t,\ u_j+\sigma_j(t),\ \dot{u}_j+\dot{\sigma}_j(t),\ \varepsilon)-X_k(t,\ \sigma_j(t),\ \dot{\sigma}_j(t),\ \varepsilon)$$

$$j,k=1,\ ...,\ d$$

где $\sigma(t)$ – порождающее решение. Функции

$$Y_k(\varphi,\ y,\ \dot{y},\ \varepsilon)=a_k^{-1}G_k\left(\varphi,\ \frac{1}{2}(y_{2j-1}+y_{2j}),\ \frac{a_j}{2}(y_{2j-1}-y_{2j}),\ \varepsilon\right)$$

где $G_k$ – образующие квазипериодических функций $g_k$, инвариантны в силу (3.15) относительно замены $i\to -i$, $\varphi\to-\varphi$. Следовательно, их коэффициенты Фурье равны своим сопряженным, т.е. вещественны.

*Следствие*. Квазилинейное дифференциальное уравнение

$$x^{(2d)}+b_1x^{(2d-2)}+...+b_dx=f(t)+\varepsilon X(t,\ x,\ \dot{x},...x^{(2d-1)},\ \varepsilon)$$

обратимо, если все корни уравнения

$$\lambda^d+b_1\lambda^{d-1}+...+b_d=0$$

отрицательны и справедливы соотношения $f(-t)=f(t)$,

$$X(-t,\ x,\ -\dot{x},...,\ -x^{(2d-1)},\ \varepsilon)=X(t,\ x,\ \dot{x},...,x^{(2d-1)},\ \varepsilon)$$

*Теорема* 4. Если система (1.1) обратима и выполняется условие (2.1), то для нее справедливо заключение теоремы 3.

*Доказательство*. Нужно доказать, что для обратимых систем выполняются условия (3.1) и (3.10). Условие (3.1) вытекает из последнего уравнения (2.11).

Кроме того, из уравнений (2.11) вытекает, что коэффициенты Фурье координатных функций $p(\varphi)$ и $P(\varphi)$ в первом уравнении (2.9) вещественны. Разлагая правую часть (2.8) в степенные ряды по $\xi=y$, $\varepsilon$ и в ряды Фурье по $\varphi$, получим ряды с чисто мнимыми коэффициентами. Следовательно, этим же свойством обладает и система (2.10), а значит и (2.13). Замена (3.3) является композицией бесконечного числа замен типа (2.9) [4]. Поэтому выполняется условие (3.10), так как элементы матрицы $\Delta$ получаются суммированием свободных членов рядов Фурье с указанным свойством.

Рассмотрим гамильтоновы системы.

*Теорема* 5. Если система (1.1) гамильтонова и выполняется условие (2.1), то для нее справедливо заключение теоремы 3.

*Доказательство*. Преобразования системы (1.1) к системе (2.7) являются каноническими. Следовательно, если к системе (2.8) добавить уравнение $\dot{r}=-\varepsilon\partial H/\partial r$, где $\varepsilon H$ – образующая гамильтониана системы (2.7) как квазипериодической функции $t$, то получим гамильтонову систему с функцией Гамильтона $\omega' r+\varepsilon H(\varphi, x, y, \varepsilon)$, где пара $(x, y)$ соответствует $\xi$ в (2.8) (переменная $\eta$ отсутствует).

Замену (2.9) строим как каноническое преобразование переменных $\varphi, r, x, y$ в переменные $\varphi, \bar{r}, \bar{x}, \bar{y}$ с производящей функцией $\varphi' r+x' y+\varepsilon S(\varphi, \bar{x}, \bar{y}, \varepsilon)$. Так как $H$ не зависит от $r$, то системы (2.10) и (2.13) оказываются гамильтоновыми. Поэтому коэффициенты их правых частей при $u$ и $z$ соответственно отличаются знаком от своих комплексно сопряженных, т.е. они чисто мнимые, что дает (3.1).

Но замена (3.3) является композицией указанных канонических замен. Поэтому элементы матрицы $\Delta$ тоже оказываются чисто мнимыми, что и означает выполнение условия (3.10).

*Замечание*. Аналогично доказательству выполнения условия (3.1) докажем, что для гамильтоновых систем условие (2.19) не выполняется ни при каких $j$ и $\nu$.

Пример. Рассмотрим уравнение Дуффинга

$$\ddot{x}+a(\varepsilon)x=bx^3+\varepsilon h(t),\quad a(\varepsilon)>0,\quad \varepsilon>0$$

Полагая $x=\sqrt{\varepsilon}\,y$, получим квазилинейное уравнение

$$\ddot{y}+a(0)y=\sqrt{\varepsilon}\,h(t)+\varepsilon(by^3+c(\varepsilon)y),\quad c(\varepsilon)=\varepsilon^{-1}(a(\varepsilon)-a(0)) \tag{3.16}$$

Поскольку уравнение (3.16) может быть представлено в гамильтоновой форме, к нему применима теорема 5. Следовательно, при малых положительных $\varepsilon$ типичным является существование у уравнения (3.16) квазипериодического решения с тем же базисом частот, что и у функции $h(t)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-011-1717).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1969. 248 с.
2. *Бибиков Ю.Н.* Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1991. 144 с.
3. *Hale J.K.* Integral manifolds of perturbed differential systems // Ann. of Maths. 1963. V. 73. P. 496–531.
4. *Moser J.* Convergent series expansions for quasiperiodic motions // Math. Ann. 1967. V. 169. P. 136–176.
5. *Broer H.W., Huitema G.B., Takens F.* Unfolding of quasi-periodic tori // Mem. Amer. Math. Soc. 1990. V. 83. P. 1–82.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
26. XI. 1993