

ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ КЕРАМИЧЕСКИХ ТРУБЧАТЫХ СИСТЕМ ПРИ КОНВЕКТИВНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ

Определяются температурные напряжения и перемещения, возникающие в упругом полом круговом цилиндре из керамики при конвективном теплообмене. Исследуется зависимость параметров термонапряженного состояния от радиальной координаты при различных условиях теплообмена и отношения радиусов цилиндра. Полученные результаты применены для истолкования термоупругого поведения термочувствительных керамических труб при изменении температурных условий.

Расчет труб и других цилиндрических изделий при осесимметричном распределении температуры проводится известными методами [1–3]. Однако между поведением круговых цилиндров из термочувствительного и нетермочувствительного материалов имеется существенное различие. При равномерном нагреве или охлаждении изотропного нетермочувствительного (без учета температурной зависимости термоупругих свойств от температуры) полого цилиндра со свободной поверхностью напряжений в нем не возникает, а все его размеры изменяются на одну и ту же величину. При изменении температуры в термочувствительном теле его внутренний и внешний радиусы могут как уменьшаться, так и увеличиваться.

Было приведено [4] решение задачи термоупругости для свободной от внешних усилий бесконечной пластинки из густого поликристалла Al_2O_3 , нагреваемой асимметрично. При этом зависимость удельной теплопроводности материала от температуры в интервале $100\text{--}700^\circ\text{C}$ принимали в виде [5]

$$\lambda_r(t) = a_0 + a_1 / t \quad (1)$$

где a_0, a_1 – постоянные, t – температура тела. В случае когда $100^\circ\text{C} \leq t \leq 600^\circ\text{C}$, зависимость (1) хорошо аппроксимируется выражением

$$\lambda_r(t) = a / t, \quad a = 117, 1 \times 10^2 \text{ Вт/м} \quad (2)$$

В эксплуатационных условиях керамические конструкционные элементы подвергаются тепловым воздействиям. С целью исследования влияния термочувствительности материала, задаваемой посредством (2), на характер и величину температурных напряжений в круговом цилиндре с внутренним радиусом R_1 , наружным R_2 и с боковой поверхностью, свободной от напряжений, находящемся в условиях конвективного теплообмена, рассмотрим соответствующую статическую задачу термоупругости.

Стационарное температурное поле определяется из решения краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \lambda_r(t) \frac{dt}{dr} \right] = 0 \quad (3)$$

$$r = R_1: \lambda_r(t) \frac{dt}{dr} - \alpha_1 (t - t_1) = 0 \quad (4)$$

$$r = R_2: \lambda_r(t) \frac{dt}{dr} + \alpha_2 (t - t_2) = 0$$

где α_1, α_2 – коэффициенты теплоотдачи с поверхностями $r = R_1$ и $r = R_2$ соответственно, t_1, t_2 – температуры внешних сред, омывающих эти поверхности.

Интегрируя уравнение (3) дважды при учете граничных условий (4), решение задачи теплопроводности находим в виде

$$\theta = \gamma r^{-\kappa} \quad (5)$$

$$\theta = \frac{t}{t_0}, \quad \gamma = \theta_0 - \frac{\kappa}{Bi_1}, \quad \rho = \frac{r}{R_1}, \quad \theta_0 = \frac{t_1}{t_0}, \quad Bi_1 = \frac{\alpha_1 R_1 t_0}{a}$$

где t_0 – температура ненапряженного и недеформированного состояния, κ – безразмерная постоянная интегрирования, являющаяся решением трансцендентного уравнения

$$(Bi_2 + \kappa)\theta\rho_2^\kappa + \kappa\varepsilon - Bi_2 = 0 \quad (6)$$

$$\rho_2 = \frac{R_2}{R_1}, \quad \theta = \frac{t_2}{t_1}, \quad Bi_2 = \frac{\alpha_2 R_2 t_2}{a}, \quad \varepsilon = \frac{Bi_2}{Bi_1}$$

Термонапряженное состояние рассматриваемой системы определяется формулами [6]

$$\sigma_{rr} = \frac{E(t)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right] - \frac{E(t)}{1-2\nu} \Phi(t)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E(t)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\nu \frac{du}{dr} + (1-\nu) \frac{u}{r} \right] - \frac{E(t)}{1-2\nu} \Phi(t) \quad (7)$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) - E(t)\Phi(t); \quad \Phi(t) = \int_{t_0}^t \alpha_r(\zeta) d\zeta$$

где $\Phi(t)$ – чисто тепловая деформация, $E(t)$ – модуль Юнга, $\alpha_r(t)$ – температурный коэффициент линейного расширения, ν – коэффициент Пуассона, u – компонента вектора перемещения (радиальная составляющая), удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d}{dr} \left[E(t) \frac{du}{dr} \right] + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{d}{dr} \left[E(t) \frac{u}{r} \right] + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{E(t)}{r} \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{d}{dr} [E(t)\Phi(t)] \quad (8)$$

Модуль Юнга, например для оксидной керамики, вполне адекватно описывается формулой [7, 8]

$$E(t) = E_0 t \quad (9)$$

где E_0 – некоторая постоянная, тогда как температурный коэффициент линейного расширения в интервале температур от 100 до 700°C – величина практически постоянная; однако для обобщения решения поставленной задачи примем, что он может изменяться по закону

$$\alpha_r(t) = \alpha/t, \quad \alpha = \text{const} \quad (10)$$

На основании (5), (9), (10) уравнение равновесия в перемещениях (8) приводим к уравнению, родственному уравнению Бесселя [9], вида

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + (\kappa + 1) \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - L^2 \frac{u}{r^2} = f(r) \quad (11)$$

$$L^2 = \frac{1-\nu(\kappa+1)}{1-\nu}, \quad f(r) = \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\kappa}{r} \left(\ln \frac{t}{t_0} - 1 \right)$$

Общее решение уравнения (11) будем искать в виде [10]

$$u = u_+ + u_-, \quad u_{\pm} = \left(C_{\pm} \pm \frac{1}{\mu} \int f(\xi) \xi^{k_{\pm}} d\xi \right) r^{1-k_{\pm}}$$

$$\mu = \sqrt{\kappa^2 + 4L^2}, \quad k_{\pm} = (\kappa \mp \mu) / 2 + 1$$

где C_+ , C_- – постоянные, определяемые из граничных условий

$$\sigma_{rr}(r = R_1) = \sigma_{rr}(r = R_2) = 0.$$

После удовлетворения граничным условиям на основании формул (7) для радиального перемещения и компонент тензора температурных напряжений получаем формулы,

ρ_2	$Bi_1; Bi_2$		
	0,1; 10	1; 1	10; 0,1
2	-2954	-5476	-787
4	-2465	-4542	-775
6	-2260	-4108	-770

которые в безразмерных переменных имеют вид:

$$U = \frac{2\nu-1}{\rho_0} \left(\frac{\rho_2^k - 1}{a_+} \rho^{-k_+} - \frac{\rho_2^k - \rho_2^\mu}{a_-} \rho^{-k_-} \right) + (1+\nu)[\ln(\vartheta_0 \gamma \rho^{-\kappa}) + (1-\nu)(\kappa+2) - 1] \quad (12)$$

$$\sigma_\rho = \frac{\rho^\kappa}{\vartheta_0 \gamma} \left\{ \frac{1}{\rho_0} [(1-\rho_2^k) \rho^{-k_+} - (\rho_2^\mu - \rho_2^{\kappa-}) \rho^{-k_-}] + 1 \right\}$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\rho + \kappa \frac{\rho^\kappa}{\vartheta_0 \gamma}, \quad \sigma_z = 2\nu \sigma_\rho + \frac{\rho^\kappa}{\vartheta_0 \gamma} [\kappa\nu - \ln(\vartheta_0 \gamma \rho^{-\kappa})] \quad (13)$$

$$\rho_0 = \rho_2^\mu - 1, \quad a_\pm = \frac{(1-\nu)(\mu \mp \kappa) \pm 2\nu}{2(1+\nu)}, \quad U = \frac{u}{\alpha R_1}$$

$$\sigma_j = \frac{\sigma_{jj} t_0}{E_0 \alpha} \quad (j = \rho, \varphi, z)$$

Если предположить, что термоупругие характеристики не зависят от температуры, т.е. в (9) положить

$$E(t) = E = \text{const}, \quad \alpha_i(t) = \alpha_i = \text{const} \quad (14)$$

то вместо (13) получим

$$\sigma_\rho = B(B^- - \rho^{-\kappa}) - 2 \frac{1-\nu}{1-2\nu}$$

$$\sigma_\varphi = B(B^+ - (1-\kappa)\rho^{-\kappa}) - 2 \frac{1-\nu}{1-2\nu}, \quad \sigma_z = \nu(\sigma_\rho + \sigma_\varphi) - \theta$$

$$B = \frac{\gamma}{2-\kappa}, \quad B^\pm = \frac{1-\rho_2^{2-\kappa}}{1-\rho_2^2} \pm \frac{1-\rho_2^{-\kappa}}{1-\rho_2^2} \left(\frac{\rho}{\rho_2} \right)^{-2}, \quad \sigma_j = \frac{\sigma_{jj}(1-\nu)}{E\alpha_i t_0}$$

В такой постановке решение этой задачи в предположении, что на внутренней поверхности цилиндра задан постоянный тепловой поток, получено ранее [11].

Если дополнительно к (14) принять, что коэффициент теплопроводности величина постоянная, то решение задачи термоупругости в этом случае запишется таким образом

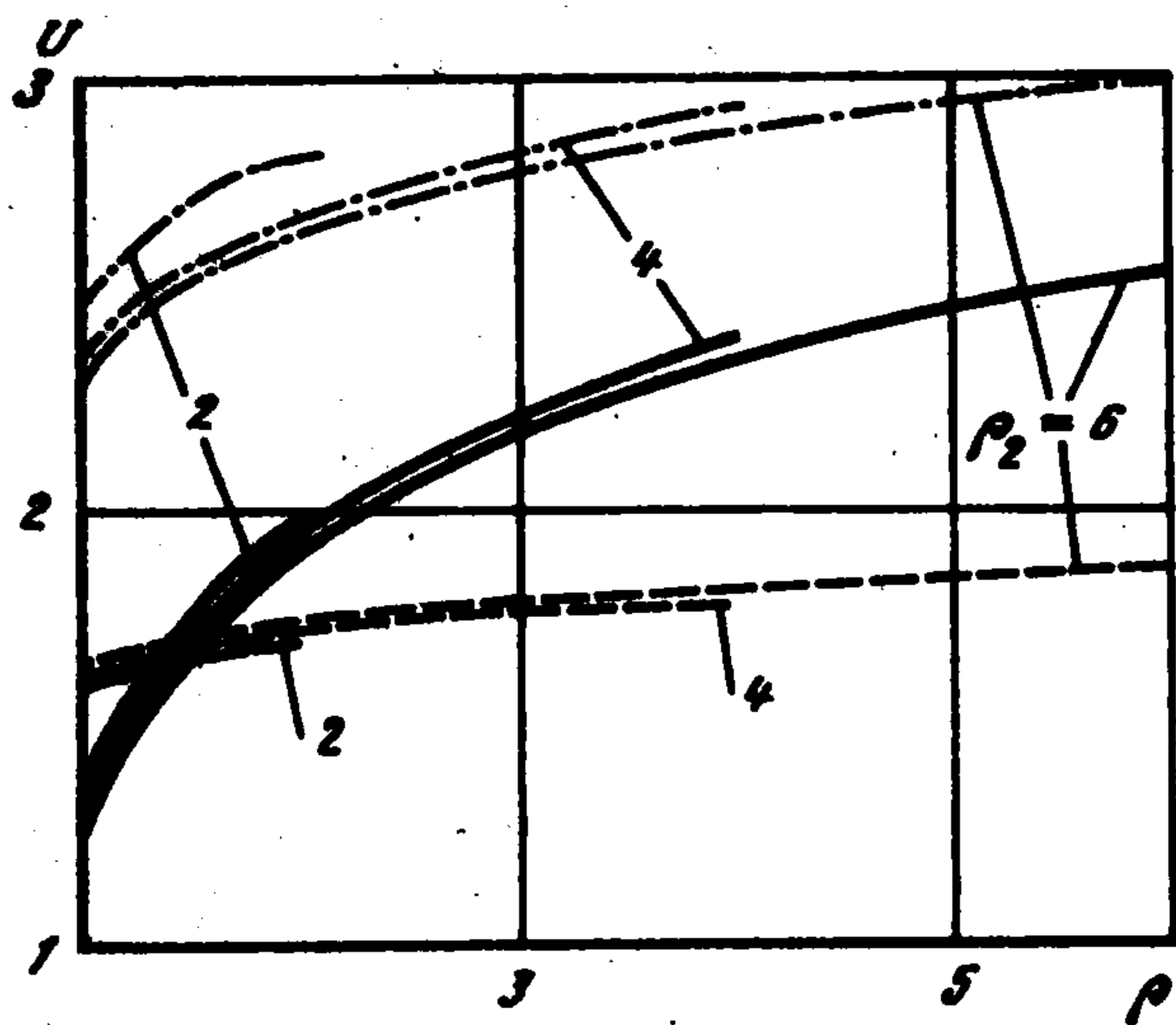
$$\theta = \vartheta_0 [D(Bi_1^* \ln \rho - 1) + 1]$$

$$\sigma_\rho = \frac{1}{2} \vartheta_0 D Bi_1^* \left[\frac{\rho_2^2}{1-\rho_2^2} \left(\frac{1}{\rho_2} - 1 \right) \ln \rho_2 - \ln \rho \right]$$

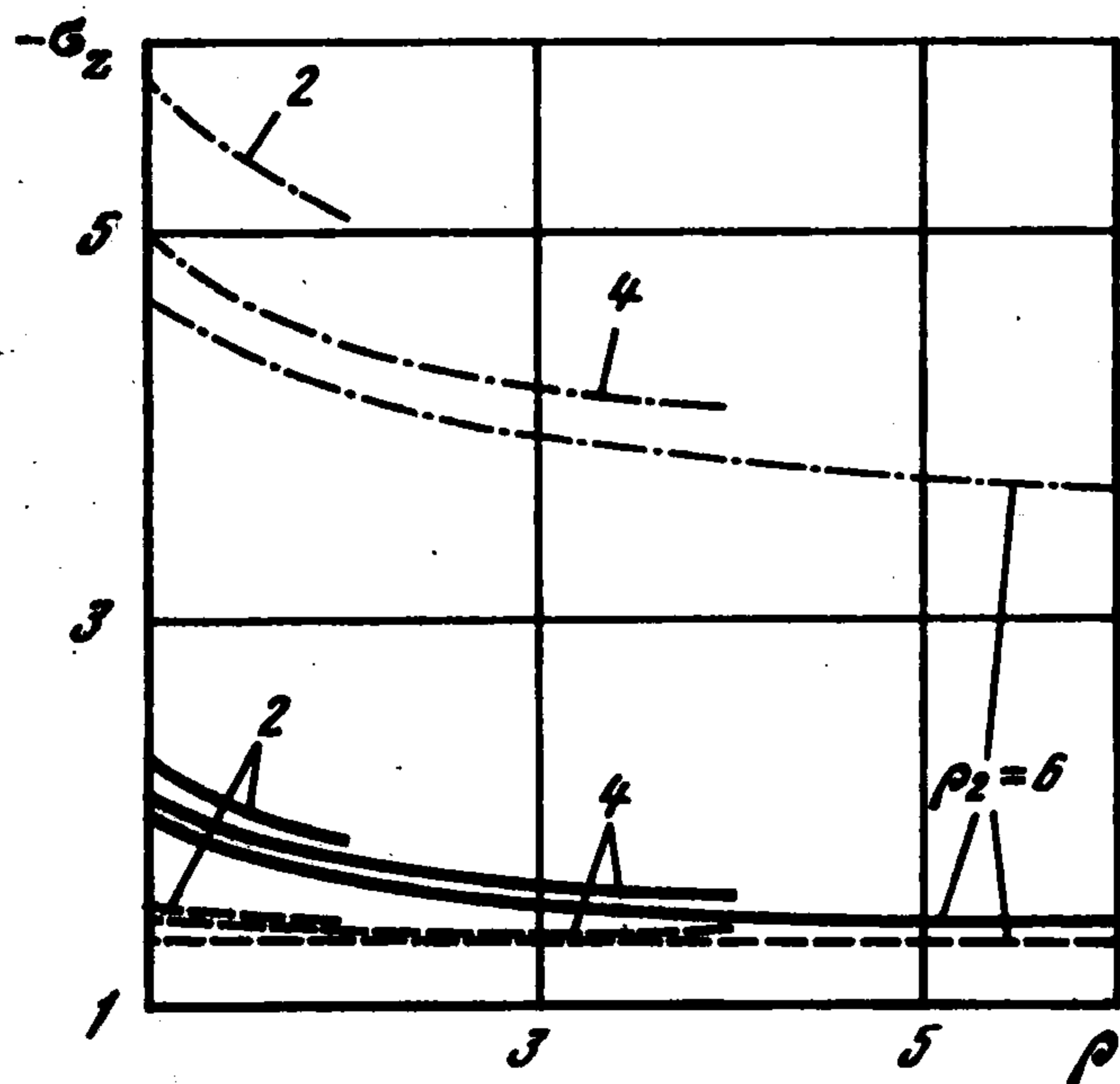
$$\sigma_\varphi = -\frac{1}{2} \vartheta_0 D Bi_1^* \left[\frac{\rho_2^2}{1-\rho_2^2} \left(\frac{1}{\rho_2} + 1 \right) \ln \rho_2 + \ln \rho + 1 \right]$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_\rho + \sigma_\varphi) - \theta$$

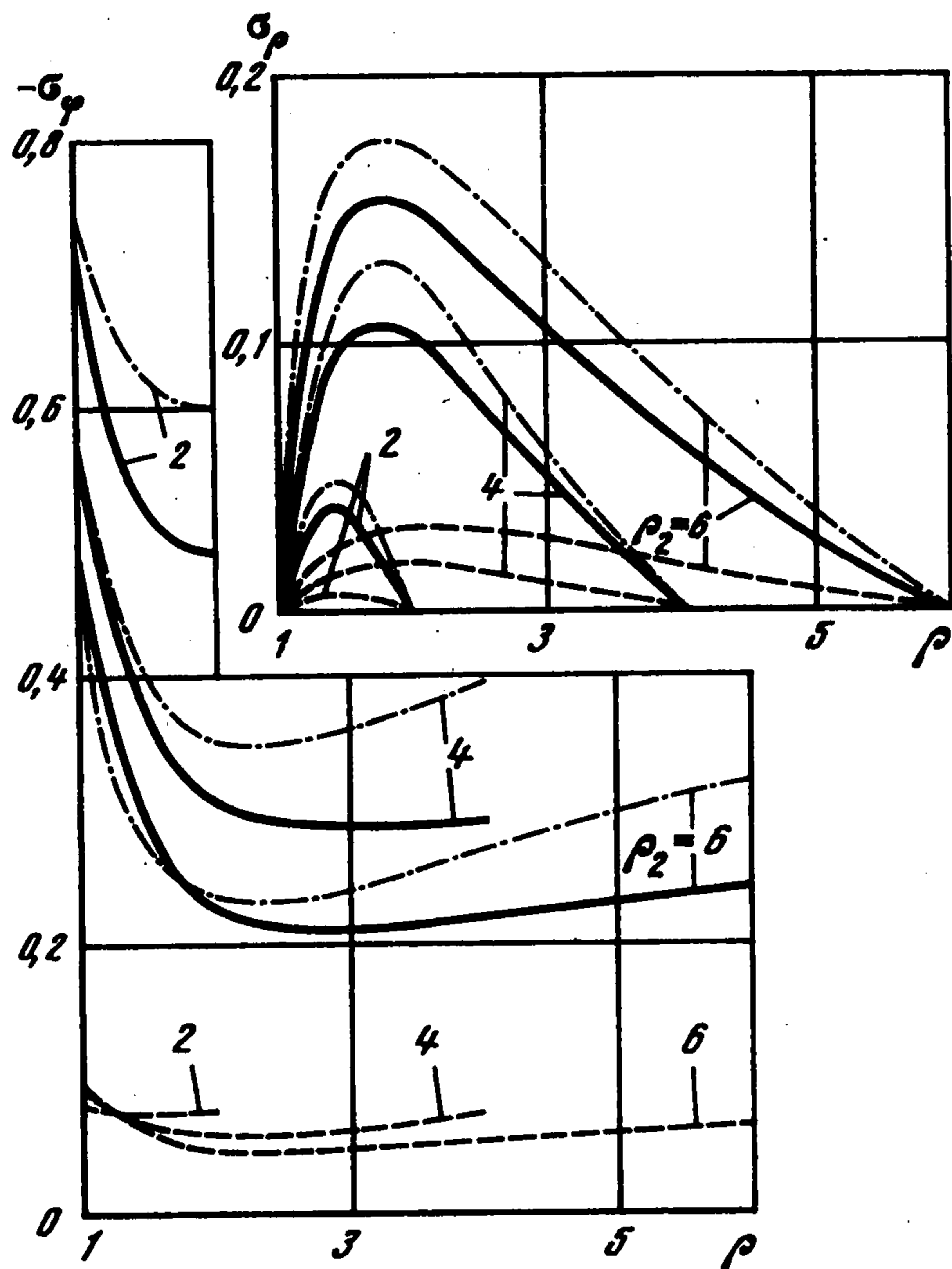
$$D = \frac{(\vartheta-1)K_\alpha \rho_2}{1+Bi_2^* \ln \rho_2 + K_\alpha \rho_2}, \quad K_\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad Bi_1^* = \frac{\alpha_i R_i}{\lambda_i} \quad (i=1,2)$$



Фиг. 1



Фиг. 3



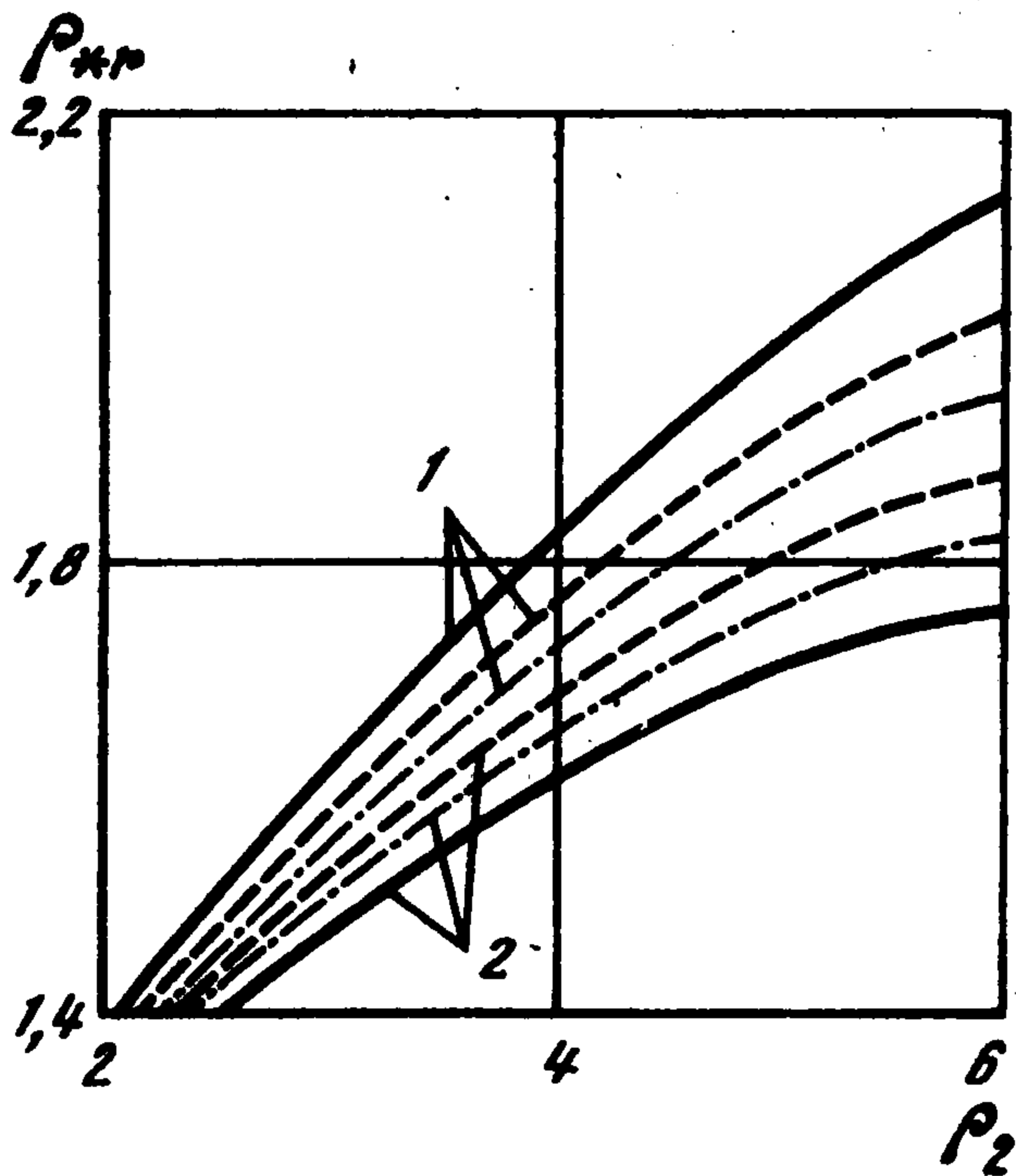
Фиг. 2

При проведении численных исследований постоянная k в каждом случае определяется из уравнения (6). Для некоторых комбинаций критериев Bi_1 и Bi_2 значения $k \times 10^4$ приведены в таблице ($\vartheta = 5$, $\vartheta_0 = 2$).

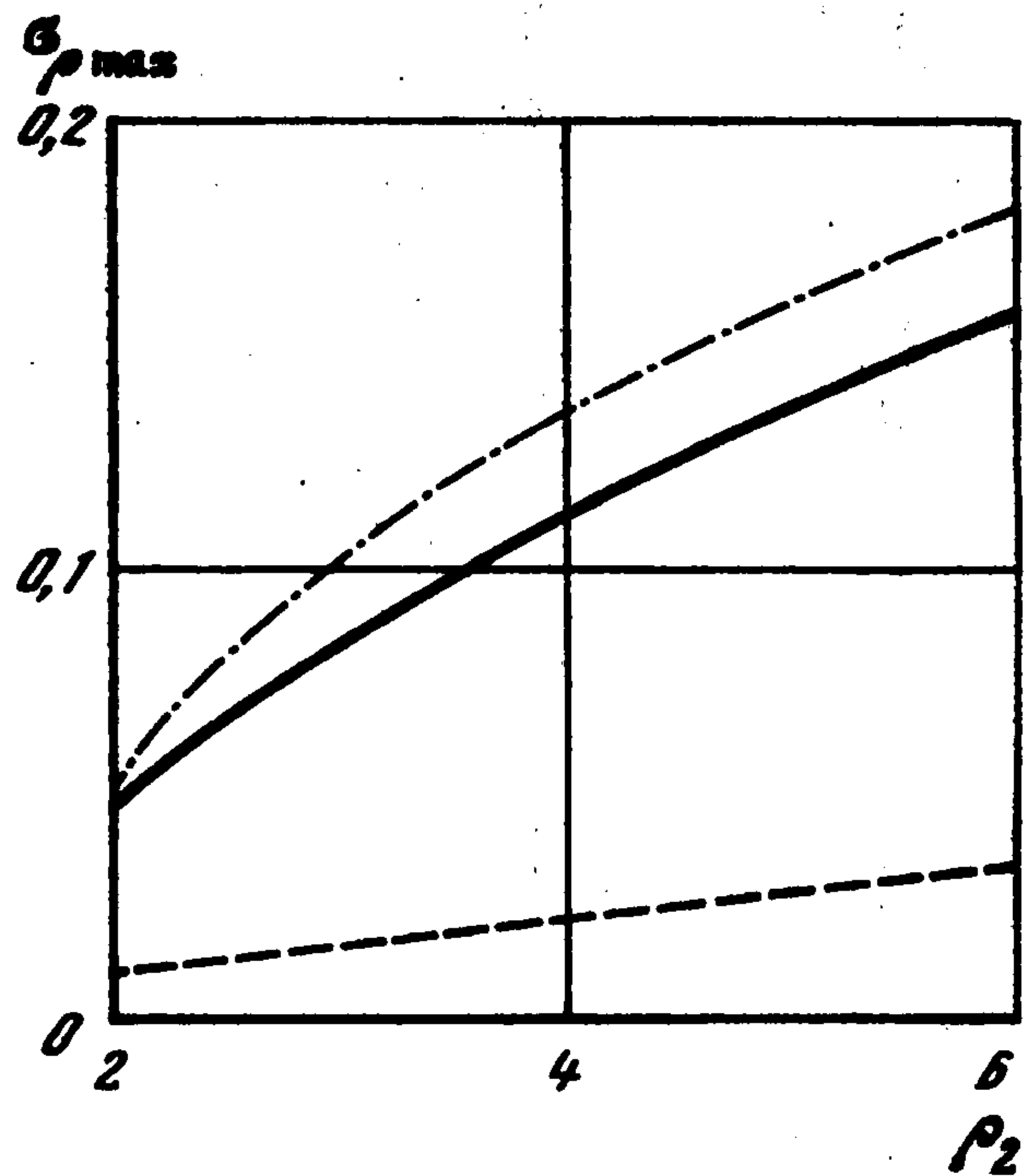
Для вычислений по формулам (12), (13) были взяты следующие значения: $\nu = 0,233$; $\vartheta_0 = 2$; $\vartheta = 5$, что отвечает случаю, когда обе граничные поверхности нагреваются. Сплошные кривые на всех фигурах соответствуют значениям $Bi_1 = Bi_2 = 1$; штриховые — $Bi_1 = 10$; $Bi_2 = 0,1$; штрихпунктирные — $Bi_1 = 0,1$; $Bi_2 = 10$.

На фиг. 1 представлены результаты вычислений безразмерного радиального перемещения. При нагреве полого кругового термочувствительного цилиндра перемещения на наружной и внутренней поверхностях одинаковы по знаку, причем на внешней поверхности они больше. При увеличении ρ_2 они уменьшаются, тогда как с уменьшением критерия Bi_1 и увеличением Bi_2 они растут; при равных значениях коэффициентов теплоотдачи радиальные перемещения практически одинаковы для всех ρ_2 .

На фиг. 2, 3 показана зависимость от радиальной координаты ρ компонент тензора температурных напряжений в термочувствительном керамическом полом цилиндре. Для рассматриваемых случаев наибольшими по абсолютной величине являются осевые компоненты тензора напряжений, превышающие радиальные и кольцевые в среднем в 40 и 8 раз соответственно. Если радиальная компонента тензора напряжений увеличивается с возрастанием внешнего радиуса, то кольцевые и осевые наоборот уменьшаются независимо от комбинаций величин коэффициентов теплоотдачи с граничных поверхностей. Все компоненты тензора напряжений растут при уменьшении теплоотдачи с внутренней поверхности (Bi_1) и одновременном увеличении с внешней поверхности (Bi_2).



Фиг. 4



Фиг. 5

Радиальные нормальные напряжения растягивающие и, несмотря на то, что они в несколько раз меньше величин кольцевых и осевых компонент тензора напряжений, которые являются сжимающими, именно они ответственны за прочностные свойства конструкции в целом.

Проведем более детальный анализ напряжений. Как показывают расчеты, радиальные нормальные и аксиальные напряжения достигают своего экстремума, причем экстремальные напряжения σ_{rmax} (растягивающие) и $\sigma_{\phi max}$ (сжимающие) достигаются в точках $\rho = \rho_{*r}$ и $\rho = \rho_{*\phi}$, которые удовлетворяют следующим трансцендентным уравнениям:

$$(1 - \rho_2^{k_-}) \rho_{*r}^{-k_+} (\kappa - k_+) - (\rho_2^{\mu} - \rho_2^{k_-}) \rho_{*r}^{-k_-} (\kappa - k_-) + \kappa \rho_0 = 0$$

$$(1 - \rho_2^{k_-}) \rho_{*\phi}^{-k_+} (\kappa - k_+) - (\rho_2^{\mu} - \rho_2^{k_-}) \rho_{*\phi}^{-k_-} (\kappa - k_-) + \kappa \rho_0 (1 + \kappa) = 0$$

На фиг. 4 иллюстрируется поведение точек экстремума ρ_{*r} радиальных нормальных напряжений в зависимости от параметра ρ_2 , характеризующего соотношение внешнего и внутреннего радиусов. Точки максимума радиальных напряжений при $\rho_2 = 2$ для всех рассмотренных комбинаций коэффициентов теплообмена Bi_1 и Bi_2 и значения ϑ находятся в интервале $1,33 \leq \rho \leq 1,39$. При увеличении внешнего радиуса в три раза этот интервал расширяется почти в шесть раз; сами же точки экстремума смещаются в сторону внешней поверхности цилиндра, причем это смещение происходит быстрее в случае, когда $\vartheta = 0,2$ (внешняя поверхность охлаждается; кривые 1 на фиг. 4), чем, например, в случае $\vartheta = 5$ (кривые 2).

Заметим, что при решении термоупругой задачи для кругового цилиндра из армированного слоистого материала была установлена [12] приближенная формула для нахождения точек экстремума радиальных нормальных напряжений. В отличие от [12] в рассматриваемом здесь случае зависимость, позволяющая находить эти точки, не содержит явно значения внешнего и внутреннего радиусов; в нее входят также величины, определяющие условия теплообмена на граничных поверхностях, характеризуемых параметром κ .

На фиг. 5 дан график безразмерного напряжения σ_{rmax} . Максимальные радиальные напряжения с увеличением внешнего радиуса возрастают практически по линейному закону, причем они достигают максимального уровня для значений коэффициентов теплообмена, равных $Bi_1 = 0,1$ и $Bi_2 = 10$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 517 с.
2. Коваленко А.Д. Избранные труды. Киев: Наук. думка, 1976. 762 с.
3. Тимошенко С.П. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.
4. Ganguly B.K., McKinney K.R., Hasselman D.P.H. Thermalstress analysis of flat plate with temperature-dependent thermal conductivity // J. Amer. Ceram. Soc. 1975. № 9/10. P. 455–456.
5. Touloukian Y.S., Powell R.W., Ho C.Y., Klemens P.G. Thermal conductivity: Non-metallic Solids (Thermo-physical properties of mater. V. 2. The TPRC. Data series), N.Y.: IFI/Plenum. 1970. 1273 p.
6. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. Киев: Наук. думка, 1992. 280 с.
7. Балкевич В.Л. Техническая керамика. М.: Стройиздат, 1984. 256 с.
8. Бакунов В.С., Балкевич В.Л., Власов А.С. и др. Керамика из высокоогнеупорных окислов. М.: Металлургия, 1977. 304 с.
9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
10. Коляно Ю.М., Кулик А.Н. Температурные напряжения от объемных источников. Киев: Наук. думка, 1983. 287 с.
11. Стасюк С.Т., Громовык В.И., Бичуя А.Л. Расчет термонапряженного состояния полого цилиндра при зависящей от температуры тепловой проводимости // Проблемы прочности. 1979. № 1. С. 41–43.
12. Болотин В.В., Болотина К.С. Термоупругая задача для кругового цилиндра из армированного слоистого материала // Механика полимеров. 1967. № 1. С. 136–141.

Львов

Поступила в редакцию
25.X.1993