УДК 532.529:534.1

© 1995 г. Н.А. Золовкин, А.Г. Петров, Н.С. Хабеев

К ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ О МЕЖФАЗНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА С ЖИДКОСТЬЮ

Рассматривается задача о радиальных колебаниях сферического газового пузыря в безграничном объеме несжимаемой жидкости при условии гомобаричности в газе [1, 2]. Изучается тепловой поток на межфазной поверхности в виде интеграла Дюамеля. Ядро интеграла представляется рядом из экспонент и для него с высокой точностью найдено простое аналитическое приближение. Получены главные асимптотические выражения для теплового потока при больших и малых числах Пекле. Приведены выражения для остаточных членов разложения.

Исследованию влияния межфазного теплообмена на колебания газовых пузырьков в жидкости посвящено значительное число теоретических и экспериментальных работ, детальное обсуждение которых содержится в [1-3].

1. Основное выражение для межфазного теплового потока. В отсутствие фазовых переходов температура жидкости практически не меняется, а тепловой поток q на межфазной поверхности формируется исключительно термическим сопротивлением газа [4]. Тепловой поток, из-за отсутствия фазовых переходов, естественно, непрерывен. Таким образом, q определяется из решения внутренней задачи теплообмена для пузырька. Из решения линеаризованного уравнения теплопроводности в газе методом Фурье, получено выражение [3]

$$q(t) = -\frac{R_0}{\pi^2 t_*}\int_0^t \frac{dp}{dt_1} G\left(\frac{t-t_1}{t_*}\right) dt_1 \tag{1.1}$$

Здесь R_0 – равновесный радиус пузырька, t – время, p – давление в газе, $q = \lambda\, \partial T/\partial r$ $(r = R)$ – межфазный тепловой поток, r – эйлерова координата – расстояние от центра пузырька, T и λ – температура и коэффициент теплопроводности газа, $t_* = R_0^2/(\pi^2 a)$ – характерное тепловое время задачи, a – коэффициент температуропроводности газа.

Ядро интеграла (1.1) записывается следующим образом:

$$G(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 x) = \psi(x) - 1, \quad \psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-n^2 x) \tag{1.2}$$

2. Аналитические приближения подынтегрального ядра. Функция $\psi(x)$ выражается через тета-функцию, и для нее справедливо следующее тождество [5]:

$$\psi(x) = \sqrt{\pi/x}\,\psi(\pi^2/x) \tag{2.1}$$

Из тождества (2.1) можно получить разложение, удобное для вычисления $\psi(x)$ при $x < x_1$:

$$\psi(x) = \sqrt{\pi/x} + r_1(x)$$

$$r_1(x) = 2\sqrt{\pi/x}\left(\exp(-\pi^2/x) + \exp(-4\pi^2/x) + \ldots\right) \tag{2.2}$$

Из (1.2) следует разложение, удобное для расчета $\psi(x)$ при $x > x_1$:

$$\psi(x) = 1 + 2\exp(-x) + r_2(x)$$

$$r_2(x) = 2\left(\exp(-4x) + \exp(-9x) + \ldots\right) \tag{2.3}$$

Точку x_1 удобно выбрать так, чтобы остаточные члены r_1 и r_2 были одновременно наименьшими. Очевидно, что точка x_1 будет удовлетворять уравнению $r_1(x) = r_2(x)$, откуда получаем $x_1 = 1{,}526$.

В результате имеем аналитическое приближение для функции $G(x)$:

$$G(x)=\begin{cases}\sqrt{\pi/x}-1, & 0<x\leqslant x_1\\ 2\exp(-x), & x_1\leqslant x\end{cases} \tag{2.4}$$

Наибольшая погрешность приближения (2.4) достигается в точке x_1: $r_1(x_1)=r_2(x_1)=$ $=0{,}0045$ ($G(x_1)=0{,}44$), т.е. относительная погрешность приближения (2.4) составляет 1%.

Второе приближение для $G(x)$, вытекающее из разложений (2.2) и (2.3), имеет вид

$$G(x)=\begin{cases}\sqrt{\pi/x}\left(1+2\exp(-\pi^2/x)\right)-1, & 0<x\leqslant x_2\\ 2\exp(-x)+2\exp(-4x), & x_2\leqslant x\end{cases} \tag{2.5}$$

Граничная точка x_2 находится аналогично, из условия минимума погрешности: $x_2=2{,}083$, причем наибольшая относительная погрешность составляет $5{,}6\times10^{-6}$%.

Процесс получения более точных приближений можно продолжить аналогично. Максимальная погрешность k-го приближения уменьшается по закону $\exp\left(-(k+1)^2x_k\right)$. Можно показать, что величина x_k монотонно возрастает и в пределе, при $k\to\infty$, стремится к π.

Ранее [6] было предложено приближение (2.4), в котором вместо точки x_1 берется $\pi/2$.

3. Асимптотики при больших и малых числах Пекле. Выражение (1.1) при учете (2.4) запишем в виде:

$$q(t)=-\frac{R_0}{\pi^2t_*}\left(2\int\limits_0^{t-x_1t_*}\frac{dp}{dt_1}\exp\left(-\frac{t-t_1}{t_*}\right)dt_1+\sqrt{\pi t_*}\int\limits_{t-x_1t_*}^{t}\frac{dp}{dt_1}\frac{dt_1}{\sqrt{t-t_1}}-\int\limits_{t-x_1t_*}^{t}\frac{dp}{dt_1}dt_1\right),\quad t>x_1t_* \tag{3.1}$$

Здесь p_0 – равновесное давление в газе и в жидкости, ρ_1 – плотность жидкости ($\rho_1=\mathrm{const}$), $\omega_r=(3\gamma p_0/\rho_1)^{1/2}/R_0$ – частота Миннаэрта свободных адиабатических колебаний газового пузырька [2], $\mathrm{Pe}=2\pi^2\omega_rt_*=(2R_0/a)(3\gamma p_0/\rho_1)^{1/2}$ – тепловое число Пекле в газе, которое характеризует квадрат отношения характерного размера задачи к толщине температурного пограничного слоя в газе. Если колебания пузырька близки к изотермическим, то число Пекле стремится к нулю, и наоборот, для колебаний, близких к адиабатическим, имеем $\mathrm{Pe}\gg1$.

Рассматриваются малые синусоидальные колебания пузырьков. Давление газа изменяется по периодическому закону в виде действительной части выражения

$$p(t)=p_0(1+\sigma\exp(i\omega_rt)),\quad |\sigma|\ll1\quad(\sigma=\Delta p/p_0)$$

Здесь Δp – амплитуда колебаний (для простоты считаем $\Delta p=\mathrm{const}$).

После замены переменной интегрирования $y=\omega_r(t-t_1)$, выражение (3.1) принимает вид ($\tau=t\omega_r$ – безразмерное время)

$$q(t)=-i\sigma\frac{R_0p_0}{\pi^2t_*}\exp(i\tau)\left(I_1+I_2+I_3\right),\quad \tau>\tau_*,\quad \tau_*=x_1\frac{\mathrm{Pe}}{2\pi^2}$$

$$I_1=2\int\limits_{\tau_*}^{\tau}\exp\left(-y(i+\frac{2\pi^2}{\mathrm{Pe}})\right)dy,\quad I_2=\left(\frac{\mathrm{Pe}}{2\pi}\right)^{1/2}\int\limits_0^{\tau_*}\frac{\exp(-iy)}{\sqrt{y}}dy,\quad I_3=-\int\limits_0^{\tau_*}\exp(-iy)dy$$

Здесь I_1,I_2,I_3 соответствуют трем слагаемым в выражении для теплового потока (3.1).

Асимптотика для $\mathrm{Pe}\ll1$, $\tau\gg\mathrm{Pe}/\pi^2$ такова:

$$I_1=\exp(-x_1)\frac{\mathrm{Pe}}{\pi^2}-i\exp(-x_1)(1+x_1)\frac{\mathrm{Pe}}{2\pi^4}+\ldots$$

$$I_2=\frac{\mathrm{Pe}}{\pi}\left(\frac{x_1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}-i\frac{2}{3}\left(\frac{x_1}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\mathrm{Pe}}{2\pi}\right)^2+\ldots \tag{3.2}$$

$$I_3=-\tau_*+i\tau_*^2/2+\ldots$$

Данная асимптотика показывает, что в случае колебаний пузырька, близких к изотермическим (Pe ≪ 1), в (3.1) необходимо учитывать все три слагаемых в скобках.

Асимптотика для $\mathrm{Pe} \gg 1$, $\tau \gg \mathrm{Pe}/\pi^2$ такова:

$$I_1 = -2\exp(-x_1)(\sin\tau_* + i\cos\tau_*) + \ldots$$

$$I_2 = \left(\frac{\mathrm{Pe}}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\pi}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\tau_* - i\left(\left(\frac{\mathrm{Pe}}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\pi}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\tau_*\right) + \ldots \tag{3.3}$$

$$I_3 = -\sin\tau_* + i(1 - \cos\tau_*)$$

Из (3.3) следует, что сумма интегралов $I = I_1 + I_2 + I_3$ имеет следующую главную асимптотику: $I = \sqrt{\mathrm{Pe}}/2 + O(1)$.

Таким образом, для колебаний пузырька, близких к адиабатическим с частотой Миннаэрта, из (3.1) при помощи (3.3) имеем выражение для межфазного теплового потока (1.1):

$$q(t) = -\sqrt{a/\pi} \int\limits_{t - x_1 t_*}^{t} \frac{dp}{dt_1} \frac{dt_1}{\sqrt{t - t_1}} \left(1 + O\left(\mathrm{Pe}^{-\frac{1}{2}}\right)\right) \tag{3.4}$$

Выражение (3.4), как видно из (3.3), имеет погрешность, порядка $\mathrm{Pe}^{-\frac{1}{2}}$. Таким образом, оно справедливо в случае $\sqrt{\mathrm{Pe}} \gg 1$.

Асимптотические выражения (3.2) и (3.3) справедливы при $\tau \gg \mathrm{Pe}/\pi^2$. При учете τ в разложении для I_1 добавляются слагаемые, содержащие экспоненциально малый множитель $\exp(-2\pi^2\tau/\mathrm{Pe})$.

Было показано [6], как при помощи асимптотики (3.4) можно получить известное решение Чепмана – Плессета (выражение для логарифмического декремента затухания радиальных колебаний газового пузырька) [7], построенное ранее более сложным методом, без использования выражения (3.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1984. 560 с.
2. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
3. *Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р.* Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248 с.
4. *Нигматулин Р.И., Хабеев Н.С.* Теплообмен газового пузырька с жидкостью // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 5. С. 94–100.
5. *Федорюк М.В.* Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
6. *Золовкин Н.А., Хабеев Н.С.* Радиальные колебания газовых пузырьков в жидкости при наличии в газе горючей компоненты // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 1. С. 103–109.
7. *Chapman R.B., Plesset M.S.* Thermal effects in the free oscillation of gas bubbles // Trans. ASME. Ser. D.J. Basic Eng.-1974. V. 93. № 3. P. 373–376. *Чэпмен Р.Б., Плессет М.С.* Тепловые эффекты при свободном колебании газовых пузырьков // Теоретические основы инженерных расчетов. 1971. Т. 93. № 3. С. 37–40.

Москва

Поступила в редакцию 29.XI.1993