УДК 531.36

© 1995 г. А.П. Иванов

К ЗАДАЧЕ О ЦЕНТРЕ УДАРА

В новой форме получены условия существования у твердого тела с неподвижной осью центра удара. Это позволило провести анализ возможных положений оси вращения в зависимости от вида центрального тензора инерции.

Понятие центра удара связано с важным для приложений случаем импульсивного движения твердого тела, имеющего неподвижную ось, когда ударная сила не нагружает ось крепления например, при ударе молотком или теннисной ракетной отдача незначительна).

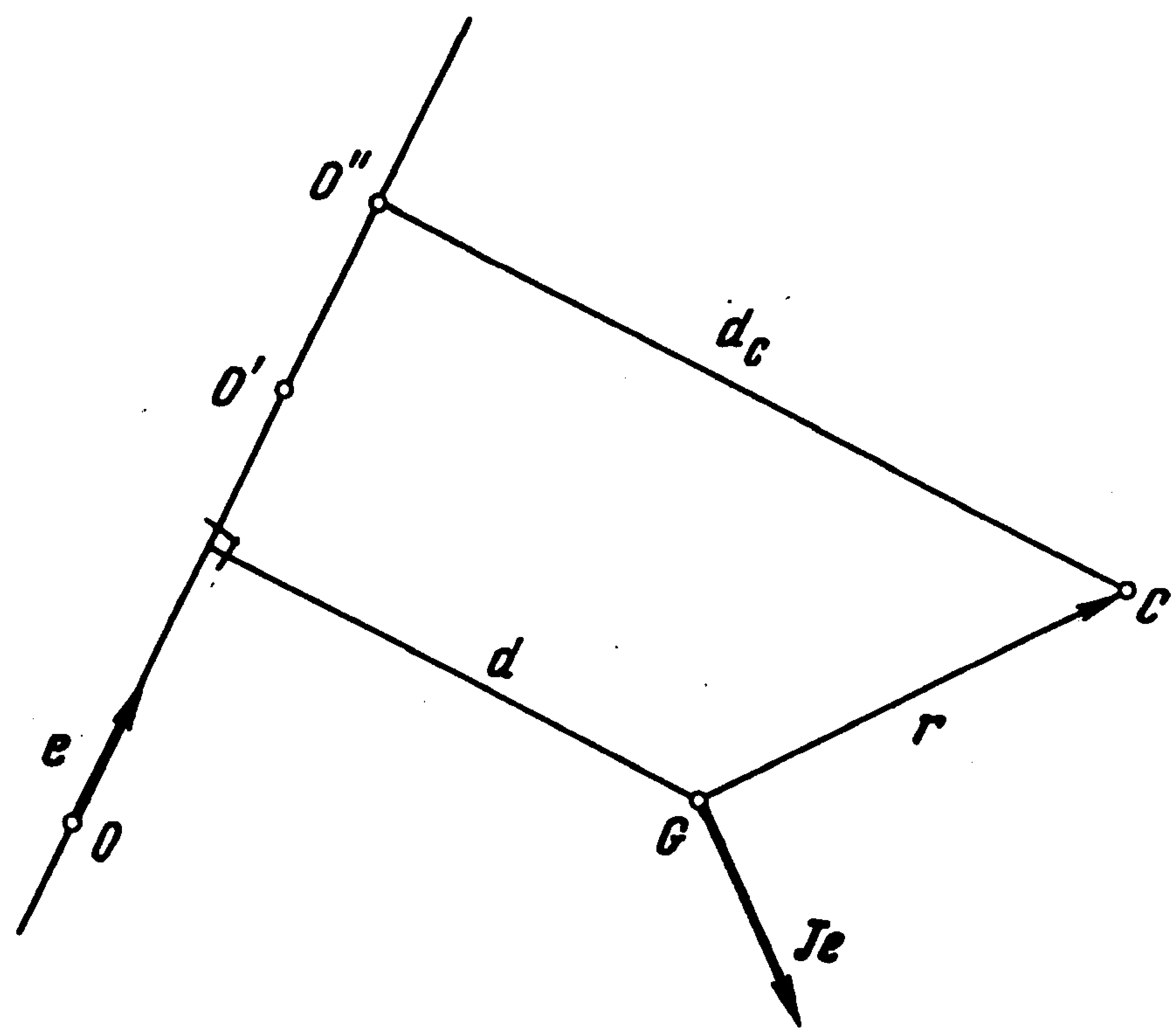
1. Постановка задачи. Построение центра удара – известная классическая задача динамики твердого тела. Ее решение содержится во многих монографиях и учебниках по динамике. Оказывается, что далеко не всегда центр удара существует. Известный классический критерий имеет следующий вид.

1°. Неподвижная ось OO' является главной осью инерции для одной из своих точек O''.

Если это условие выполнено, то центр удара C определяется следующими свойствами.

2°. Точка C лежит в плоскости, содержащей ось крепления и центр масс G, причем ее проекция на ось совпадает с точкой O''.

3°. Радиус инерции тела ρ относительно оси OO' является средним геометрическим между расстояниями от точек G и C до этой оси. При этом точки G и C лежат по одну сторону от оси (фигура).



Всякая ударная сила, линия действия которой проходит через точку C ортогонально плоскости GOO', сообщает телу вращение вокруг оси без появления импульсивных реакций в опорных точках O и O'.

Проверка условия 1° в случае, когда ось крепления задана, не представляет принципиальных трудностей. Однако оно не позволяет исследовать структуру множества всех допустимых осей спонтанного вращения для данного тела. Цель работы – получение критерия существования центра удара в более удобной для анализа форме.

2. Геометрический критерий существования центра удара. Пусть ударный импульс $\mathbf{I}$ действует вдоль линии, пересекающей плоскость GOO' в некоторой точке C. Общее уравнение удара при учете равенства нулю реакции оси выглядит так [1, 2]

$$M\Delta\mathbf{V} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{J}\Delta\mathbf{W} = \mathbf{r} \times \mathbf{I} \tag{2.1}$$

где M – масса тела, $\mathbf{J}$ – центральный тензор инерции, $\mathbf{V}$ – скорость центра масс G, $\mathbf{W}$ – угловая скорость, $\mathbf{r} = GC$. Условия неподвижности точек крепления O и O' имеют вид

$$\Delta\mathbf{V}_O = \mathbf{0}, \quad \Delta\mathbf{V}_{O'} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{V}_O = \mathbf{V} + \mathbf{W} \times GO, \quad \Delta\mathbf{V}_{O'} = \mathbf{V} + \mathbf{W} \times GO' \tag{2.2}$$

Подставляя равенства (2.1) в уравнения (2.2), получим

$$M^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{r} \times \mathbf{I}) \times \mathbf{r}_O = \mathbf{0}, \quad M^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{r} \times \mathbf{I}) \times \mathbf{r}_{O'} = \mathbf{0} \tag{2.3}$$

$$\mathbf{r}_O = GO, \quad \mathbf{r}_{O'} = GO'$$

Вычтя одно из соотношений (2.3) из другого, получим равенство

$$\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{r} \times \mathbf{I}) \times \mathbf{e} = \mathbf{0} \tag{2.4}$$

($\mathbf{e}$ – направляющий орт оси OO'), означающее, что векторы $\mathbf{r} \times \mathbf{I}$ и $\mathbf{Je}$ коллинеарны, т.е. для некоторого действительного числа λ

$$\mathbf{r} \times \mathbf{I} = \lambda\mathbf{Je} \tag{2.5}$$

Подставим соотношение (2.5) в первое из уравнений (2.3):

$$\mathbf{I} = -\lambda M\mathbf{e} \times \mathbf{r}_O \tag{2.6}$$

Отсюда следует ортогональность ударного импульса плоскости GOO'.

Далее, подстановка (2.6) в уравнение (2.5) преобразует последнее к виду

$$\mathbf{Je} = -M\mathbf{r} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{r}_O) \tag{2.7}$$

Условие (2.7) накладывает ограничения как на направление оси вращения, так и на положение центра удара C.

Во-первых, по свойствам двойного векторного произведения получаем следующее утверждение (геометрический критерий): вектор $\mathbf{Je}$ лежит в плоскости, содержащей ось подвеса и центр масс тела:

$$(\mathbf{Je} \times \mathbf{e}, \mathbf{r}_O) = 0 \tag{2.8}$$

Во-вторых, векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{Je}$ ортогональны:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{Je}) = 0 \tag{2.9}$$

В-третьих, умножая равенство (2.7) скалярно на $\mathbf{e}$ и используя свойства моментов инерции, получим

$$M\rho^2 = (\mathbf{Je}, \mathbf{e}) + Md^2 = M(\mathbf{r}_O \times \mathbf{e}, \mathbf{r}_O \times \mathbf{e}) - M(\mathbf{r}_O \times \mathbf{e}, \mathbf{r} \times \mathbf{e}) = Mdd_C \tag{2.10}$$

где d, d_C – расстояния от оси OO' до точек G и C соответственно.

Непосредственной проверкой можно убедиться в эквивалентности двух групп требований: 1°–3° и (2.8)–(2.10). В то же время критерий (2.8) в отличие от 1° использует лишь центральные моменты инерции, что делает его проверку более простой.

3. Анализ структуры множества осей спонтанного вращения. Если к телу прикладывается ударный импульс, оно в общем случае будет совершать винтовое движение. При определенных условиях это движение будет чисто вращательным. В этом случае говорят, что существует ось спонтанного вращения [1]. Очевидно, что такие оси, и только они, обладают центром удара.

Выясним, как устроено множество всех осей спонтанного вращения для данного тела. Для этого введем систему координат, направляя ее оси вдоль главных осей центрального эллипсоида инерции. Если (x, y, z) – координаты точки O, (e_1, e_2, e_3) – координаты вектора $\mathbf{e}$, а A_1, A_2, A_3 – главные центральные моменты инерции, то уравнение (2.8) примет форму

$$(A_1 - A_2)e_1e_2z + (A_3 - A_1)e_1e_3y + (A_2 - A_3)e_2e_3x = 0 \tag{3.1}$$

Совокупность решений данного уравнения имеет различную структуру в зависимости от наличия или отсутствия динамической симметрии.

В случае сферической симметрии $A_1 = A_2 = A_3$ равенство (3.1) является тождеством. Следовательно, для любой неподвижной оси существует центр удара (если ось проходит через центр масс, точка C удаляется на бесконечность). Данный результат дополняет известный вывод Ляпунова о том, что всякий удар по сферически симметричному телу сообщает ему вращение вокруг некоторой оси.

Для тела вращения $A_1 = A_2 \neq A_3$ уравнение (3.1) приводится к виду

$$e_1 e_3 y = e_2 e_3 x \tag{3.2}$$

Здесь имеются две группы решений: либо $e_3 = 0$, т.е. оси вращения и симметрии ортогональны, либо $e_1 y = e_2 x$, т.е. эти две оси имеют общую точку.

Наконец, в общем случае трехосного эллипсоида инерции каждому направлению $\mathbf{e}$ отвечает плоскость возможных положений точки O. Ввиду тождества

$$(A_1 - A_2)e_1 e_2 e_3 + (A_3 - A_1)e_1 e_3 e_2 + (A_2 - A_3)e_2 e_3 e_1 \equiv 0$$

эта плоскость параллельна вектору $\mathbf{e}$ и содержит ось OO'. Таким образом, каждому вектору $\mathbf{e}$ соответствует плоский пучок параллельных осей спонтанного вращения.

С другой стороны, если зафиксировать точку O, то уравнение (3.1) будет определять конус возможных направлений оси вращения.

Для тела вращения этот конус описывается уравнением (3.2), т.е. он распадается на пару плоскостей, проходящих через точку O. Одна из этих плоскостей перпендикулярна оси симметрии, вторая – содержит эту ось.

Для несимметричного тела конус имеет второй порядок в случае, если $xyz \neq 0$, т.е. точка O не лежит ни в одной из главных плоскостей центрального эллипсоида инерции. В случае, когда $z = 0$, $xy \neq 0$ (точка O лежит в главной плоскости, но не на главной оси), поверхность (3.1) распадается на пару плоскостей: $e_3 = 0$ (ось вращения лежит в той же главной плоскости эллипсоида инерции) и

$$(A_3 - A_1)e_1 y + (A_2 - A_3)e_2 x = 0 \tag{3.3}$$

Плоскость (3.3) ортогональна главной плоскости инерции, содержащей точку O, но в отличие от случая тела вращения не проходит через главную ось инерции.

Если же точка O лежит на главной оси центрального эллипсоида инерции, $x = y = 0$, $z \neq 0$, то уравнение (3.1) описывает пару главных плоскостей эллипсоида инерции, содержащих эту ось.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-17228).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Раус Э.Дж.* Динамика системы твердых тел. Т. 1. М.: Наука, 1983. 544 с.
2. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.X.1993