ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 59, Вып. 1, 1995

УДК 539.3

© 1995 г. А.В. Шитиков

О ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ ПОСТРОЕНИЯ УРАВНЕНИЙ УПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Для построения определяющих уравнений упругопластического течения при конечных деформациях предлагается вариационный принцип максимума диссипации механической энергии, основанный на предположении о том, что часть диссипации связана с изменением тензора внутренних переменных. С использованием ранее предложенного разбиения полного метрического тензора на упругую и пластическую части (но без привлечения понятия скорости пластической деформации) получены искомые уравнения для изотермического процесса. Система дифференциальных уравнений включает уравнения для тензора внутренних переменных.

Ранее получены [1] определяющие уравнения для упругопластических сред при конечных деформациях, обеспечивающие независимость разбиения полных деформаций на упругие и пластические и тензора напряжений от пути деформирования в упругой области. При этом понятия скорости пластической деформации и объективной производной тензора по времени не постулировались. Для замыкания системы уравнений при активном нагружении использовался принцип Мизеса и вводилось определение скорости пластической деформации, которое предлагалось использовать для записи кинетических уравнений параметров истории. Однако при конечных деформациях применение принципа Мизеса представляется недостаточно обоснованным, в частности в силу существования различных возможностей введения понятия скорости пластической деформации [1, 2]. То или иное определение скорости пластической деформации вводят и в подходах, не использующих принцип Мизеса [3].

Пусть внутренняя энергия на единицу массы $U = U(E, G, S, \kappa)$ зависит от метрического тензора полных деформаций G, тензора упругих деформаций E, энтропии единицы массы S и некоторого тензора внутренних переменных κ, определение которого дадим ниже. Обозначения всех величин, если это не оговорено специально, совпадают с обозначениями работы [1]. Используются ссылки на формулы из [1]. Внутри поверхности нагружения $\varphi(E, G, S, \kappa) = 0$ тензоры G и E удовлетворяют уравнениям [1]

$$G^{\cdot} + G \cdot W + W^{\mathrm{T}} \cdot G = 0, \quad W = \partial \mathbf{v}/\partial \mathbf{x}$$

$$E^{\cdot} + E \cdot W - R \cdot E = 0, \quad (\cdot)^{\cdot} = \mathbf{v} \cdot \partial(\cdot)/\partial \mathbf{x} + \partial(\cdot)/\partial t \tag{1}$$

где $\mathbf{v}$ – вектор скорости перемещений, антисимметричный тензор R определяется условием симметрии тензора E (см. (8) [1]).

Естественно предположить, что закон изменения симметричного тензора второго ранга κ в упругой области совпадает с законом изменения тензора пластических деформаций P (см. (1) [1] и (9) [1]), т.е. сводится к таким же ортогональным преобразованиям:

$$\kappa^{\cdot} = R \cdot \kappa - \kappa \cdot R \tag{2}$$

Последнее уравнение обеспечивает независимость тензора κ от пути разгрузки и удовлетворяет требованию объективности, т.е. является инвариантным относительно жестких вращений.

Пусть переход во вращающуюся систему координат описывается ортогональным тензором Q:

$$d\mathbf{x}' = Q \cdot d\mathbf{x}, \quad Q \cdot Q^{\mathrm{T}} = \mathrm{I} \tag{3}$$

Используя закон изменения тензора дисторсии $A = \partial\mathbf{x}_0/\partial\mathbf{x}$ при переходе во вращающуюся систему координат $A = A' \cdot Q$, где $A' = \partial\mathbf{x}_0/\partial\mathbf{x}'$, и уравнение (16) [1]: $A^{\cdot} + A \cdot W = 0$, получим $(A')^{\cdot} + A' \cdot W' = 0$, где

$$W' = Q \cdot W \cdot Q^{\mathrm{T}} + Q^{\cdot} \cdot Q^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

Из выражений (4) и (8) [1] вытекает закон преобразования тензора R

$$R' = Q \cdot R \cdot Q^{\mathrm{T}} + Q^{\cdot} \cdot Q^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

Используя это равенство, получаем

$$(\kappa')^{\cdot} + \kappa' \cdot R' - R' \cdot \kappa' = Q \cdot (\kappa^{\cdot} + \kappa \cdot R - R \cdot \kappa) \cdot Q^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

где $\kappa' = Q \cdot \kappa \cdot Q^{\mathrm{T}}$, что и доказывает объективность уравнения (2). Аналогично показывается объективность уравнений (1).

Закон сохранения энергии для случая безмоментной среды и отсутствия массовых сил можно представить в виде

$$\rho U^{\cdot} = \sigma \cdot\cdot W^{\mathrm{T}} - \mathrm{I} \cdot\cdot \partial\mathbf{q}/\partial\mathbf{x} \tag{7}$$

где σ – тензор напряжений Коши, ρ – плотность среды $\mathbf{q}$ – вектор потока тепла. Через свободную энергию $F(E, G, T, \kappa) = U - TS$ (T – абсолютная температура; здесь функция F не совпадает с аналогичной в работе [1], так как в [1] $F = F(E, P, T)$) уравнение (7) можно записать в виде

$$TS^{\cdot} + F_{\kappa} \cdot\cdot (\kappa^{\cdot} + \kappa \cdot R - R \cdot \kappa) + \frac{1}{\rho}\left(\mathrm{I} \cdot\cdot \frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\mathbf{x}}\right) = D; \quad S = -\frac{\partial F}{\partial T} \tag{8}$$

$$D = \frac{1}{\rho}\sigma \cdot\cdot W^{\mathrm{T}} - F_G \cdot\cdot G^{\cdot} - F_E \cdot\cdot E^{\cdot} + F_{\kappa} \cdot\cdot (\kappa \cdot R - R \cdot \kappa) \tag{9}$$

Здесь $F_{\kappa} = \partial F/\partial\kappa$, $F_E = \partial F/\partial E$, $F_G = \partial F/\partial G$ – симметричные тензора второго ранга, D имеет смысл мощности диссипации на единицу массы, которая складывается из мощности внутренних источников тепла $TS^{\cdot} + \rho^{-1}\mathrm{I} \cdot\cdot \partial\mathbf{q}/\partial\mathbf{x}$ и добавки $F_{\kappa} \cdot\cdot (\kappa^{\cdot} + \kappa \cdot R - R \cdot \kappa)$, имеющей смысл энергии, затрачиваемой в единицу времени на перестройку внутренней структуры единицы массы элемента. Таким образом, постулирована возможность введения такого тензора κ, что данная энергия выражается указанным способом. Это можно рассматривать как определение тензора κ.

Обе эти составляющие мощности диссипации механической энергии определялись экспериментально [4], причем отмечалось, что известные варианты теории течения при конечных деформациях неадекватно описывают такой процесс.

Условие $D = 0$ при любых процессах внутри поверхности нагружения определяет связь тензора σ с параметрами состояния E, G, T, κ.

Условие экстремальности функционала

$$\int_{t_1}^{t_2} D\,dt \tag{10}$$

позволяет получить уравнения для E, T, κ в активной области.

Пусть элемент среды разгружается, тогда при помощи формул (1), (2) и (8) [1] выражение (9) для мощности диссипации преобразуем к виду

$$D = [\rho^{-1}(\sigma - \sigma_1) + 2(G \cdot F_G + E \cdot F_E + \kappa \cdot F_{\kappa})^{a}] \cdot\cdot W^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

$$\sigma_1 = -\rho\{E \cdot F_E + 2G \cdot F_G + 2(J_1 J_2 - J_3)^{-1}[\Phi^{a} \cdot (J_1^2 E - J_1 E^2) + E \cdot \Phi^{a} \cdot E^2]\}^{c} \tag{12}$$

$$\Phi^a = -(2\kappa \cdot F_\kappa + E \cdot F_E)^a \qquad (13)$$

$$J_1 = \mathrm{I}\cdot\cdot E, \quad J_2 = \frac{1}{2}(J_1^2 - E\cdot\cdot E), \quad J_3 = \frac{1}{3}\left(\mathrm{I}\cdot\cdot E^3 + \frac{1}{2}J_1^3 - \frac{3}{2}J_1 E\cdot\cdot E\right) \qquad (14)$$

Индексы c и a означают симметричную и антисимметричную части тензора соответственно. Так как условие $D = 0$ должно выполняться при любых скоростях деформации W, то

$$\sigma = \sigma_1(E, G, T, \kappa), \quad (G \cdot F_G + E \cdot F_E + \kappa \cdot F_\kappa)^a = 0 \qquad (15)$$

Здесь учтено требование симметрии тензора σ. При помощи последнего соотношения из (13) имеем $\Phi = E \cdot F_E + 2G \cdot F_G$, так что производные свободной энергии по компонентам тензора κ исключаются из выражения для σ. Требование равенства нулю напряжений при отсутствии упругих деформаций (E = I) и стандартной температуре ($T = T_0$) приводит к условию $\Phi^c_{E\to \mathrm{I}, T\to T_0} = 0$.

Используя тождество Кейли – Гамильтона $E^3 - J_1E^2 + J_2E - J_3\mathrm{I} = 0$ выражение (12) для тензора напряжений можно преобразовать к виду, аналогичному, приведенному в работе [1]

$$\sigma = -\rho(J_1J_2 - J_3)^{-1}[(J_1^2 + J_2)E\cdot \overline{F}_E \cdot E + J_1J_3\overline{F}_E + E^2 \cdot \overline{F}_E \cdot E^2 -$$

$$-J_3(E\cdot \overline{F}_E + \overline{F}_E \cdot E) - J_1(E\cdot \overline{F}_E \cdot E^2 + E^2 \cdot \overline{F}_E \cdot E)] \qquad (16)$$

$$\overline{F}_E = \partial \overline{F} / \partial E = F_E + E^{-1}\cdot G\cdot F_G + F_G \cdot G\cdot E^{-1} \qquad (17)$$

Формула (16) полностью совпадает с формулой (13) [1] при замене в последней $F \to \overline{F}$, причем $\overline{F} = \overline{F}(E,P,T,\kappa) = F(E, E\cdot P\cdot E, T, \kappa)$.

Рассмотрим процесс активного нагружения. Полагая, что связь напряжений с деформациями (15) справедлива и в этом случае, из первого соотношения (1) и (9) имеем

$$D = -F_E \cdot\cdot (E^\cdot + E\cdot + EW - R \cdot E) \qquad (18)$$

Уравнения для E, κ и T найдём из требования максимума функционала (10) на любом отрезке времени активного процесса при условиях

$$\tau = TS^\cdot + F_\kappa \cdot\cdot(\kappa^\cdot + \kappa\cdot R - R\cdot\kappa) + \frac{1}{\rho}\left(\mathrm{I}\cdot\cdot\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}}\right) - D = 0 \qquad (19)$$

$$\bar{\varphi}(E, G, T, \kappa) = \varphi(E, G, S(E, G, T, \kappa), \kappa) = 0 \qquad (20)$$

$$(E \cdot W - R \cdot E)^a = 0 \qquad (21)$$

Равенство (21) определяет связь (8) [1] тензора R с E и W. Его включение в перечень условий позволяет избежать достаточно громоздкого дифференцирования тензора $R(E, W)$ по компонентам тензора E.

Таким образом, требуется найти безусловный экстремум функционала Лагранжа $\int_{t_1}^{t_2} L(t)dt$, где

$$L(t) = D - \lambda\bar{\varphi} - \nu\tau - \Lambda \cdot\cdot (E \cdot W - R \cdot E) \qquad (22)$$

Λ – антисимметричный тензор второго ранга. Варьирование производим по переменным E, κ, T, R, считая G, W и $\partial\mathbf{q}/\partial\mathbf{x}$ заданными функциями времени.

Ограничимся в данной работе случаем изотермического процесса, тогда

$$L = -F_E \cdot\cdot (E^\cdot + E \cdot W - R \cdot E) - \lambda\bar{\varphi} - \Lambda \cdot\cdot (E \cdot W - R \cdot E) \qquad (23)$$

а условие $\tau = 0$ определяет приток тепла в элемент, необходимый для поддержания заданной температуры. Тензоры E, κ, Λ должны удовлетворять уравнениям Эйлера

$$\frac{\partial L}{\partial \kappa} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial R} = 0, \quad \left(\frac{\partial L}{\partial E^\cdot}\right)^\cdot - \frac{\partial L}{\partial E} = 0 \qquad (24)$$

При варьировании функционала значения $E(t_1) = E_1$, $E(t_2) = E_2$ считаются заданными, а тензор κ в моменты времени t_1 и t_2 не фиксирован. Поскольку функция (23) не зависит от $\kappa^{\cdot}$, то условия трансверсальности выполняются автоматически.

Рассмотрим условие $\partial L/\partial\kappa = 0$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\kappa\partial E_{ij}}(E^{\cdot} + E\cdot W - R\cdot E)_{ij} + \lambda\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\kappa} = 0 \tag{25}$$

Это уравнение определяет упругие деформации в активной области только если тензор четвертого ранга $\partial^2 F/\partial\kappa\partial E$ не равен нулю тождественно, т.е. если в разложении свободной энергии имеется зависимость от смешанных инвариантов E и κ. Можно считать, что в этом случае

$$\kappa = \kappa(F_E, E, G, T) \tag{26}$$

Используя последнее соотношение, перейдем от функции нагружения $\bar{\varphi}(E, G, T, \kappa)$ к функции

$$\varphi_1(E, G, T, F_E) \equiv \bar{\varphi}(E, G, T, \kappa(F_E, E, G, T)) \tag{27}$$

Тогда

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\kappa} = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial F_E}\right)_{ij}\frac{\partial(F_E)_{ij}}{\partial\kappa} = \frac{\partial^2 F}{\partial\kappa\partial E_{ij}}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial F_E}\right)_{ij}$$

и из уравнения (25) следует уравнение для E при активном нагружении

$$E^{\cdot} + E\cdot W - R\cdot E + \lambda\partial\varphi_1/\partial F_E = 0 \tag{28}$$

Так как третье уравнение (1) удовлетворяет принципу объективности, то и (28) удовлетворяет этому принципу.

Последнее уравнение (24) при учете соотношений (27), (28) дает

$$F_E^{\cdot} - [W\cdot(F_E + \Lambda) - (F_E + \Lambda)\cdot R]^c - \lambda\partial\varphi_1/\partial E = 0 \tag{29}$$

Используя формулы (4), (5), можно показать объективность этого уравнения.

Наконец, из условия $\partial L/\partial R = 0$ получим уравнение для определения Λ

$$\Lambda\cdot E + E\cdot\Lambda = F_E\cdot E - E\cdot F_E \tag{30}$$

совпадающее по структуре с (7) [1]. Его решение имеет вид

$$\Lambda = (J_1 J_2 - J_3)^{-1}[(F_E\cdot E - E\cdot F_E)J_1^2 + (E^2\cdot F_E - F_E\cdot E^2)J_1 - E^2\cdot F_E\cdot E + E\cdot F_E\cdot E^2] \tag{31}$$

Уравнения (1) и (28)–(30) в совокупности позволяют проследить изменение переменных G, E, κ при заданных скоростях $W(t)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16921).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шитиков А.В., Быковцев Г.И.* Конечные деформации упругопластических сред // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311. № 1. С. 59–62.
2. *Седов Л.И.* Понятие разных скоростей изменения тензоров // ПММ. 1960. Т. 24. № 3. С. 393–398.
3. *Левитас В.И.* Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наук. думка, 1987. 231 с.
4. *Chrysochoos A.* Bilan énergétique en élastoplacticité grandes déformations // C.r. Acad. sci. 1985. Ser. 2. V. 300. № 20. P. 985–990.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
5.1.1994