

УДК 531/532:576.72

© 1995 г. А.А. Штейн

ДЕФОРМИРОВАНИЕ СТЕРЖНЯ ИЗ РАСТУЩЕГО БИОЛОГИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА, ПОДВЕРГНУТОГО ПРОДОЛЬНОМУ СЖАТИЮ

Рассматривается деформация объемного растущего упругого цилиндра под воздействием осевой сжимающей нагрузки с учетом влияния напряжений на скорость роста. Для анализа устойчивости осесимметричных точных решений получены приближенные дифференциальные соотношения, справедливые при малых поперечных размерах объекта. Постановка задачи об эволюции возмущений учитывает переменность реологических и геометрических характеристик стержня в процессе его искривления. Обсуждается физический смысл полученных результатов, определяемый сопоставлением характерных времен развития возмущений и невозмущенного процесса.

Математическое моделирование роста и развития живых организмов требует учета известной из наблюдений и экспериментов зависимости скорости роста от механических напряжений [1–3]. Исследуемая ниже простая модель дает возможность наиболее явным образом изучать следствия этого основного биологического факта. Присутствие обратной связи, определяемой зависимостью способа и скорости приращения материала от его напряженно-деформированного состояния, принципиально отличает задачи биологического роста от родственных постановок, диктуемых техническими приложениями [4].

Рассматриваемые задачи связаны с изучением механизмов искривления тонких объектов (позвоночник человека, стебель и корень растения), растущих в условиях осевого сжатия. Это широко распространенное явление [1] (наиболее известный пример – сколиоз) моделируется здесь в максимально общей форме на основе анализа закономерностей, присущих всем названным системам. Оценка и уточнение полученных результатов с учетом действующих в конкретных процессах специфических факторов представляет собой в каждом случае самостоятельную проблему.

1. Модель растущей биологической ткани как эффективно "вязкоупругой" среды была впервые непосредственно постулирована в [5] и получается в результате огрубляющих предположений при более детальном анализе [6, 7].

Примем, ограничившись линейными реологическими зависимостями, следующую систему определяющих соотношений:

$$\epsilon^e = K\sigma, \quad e^i = A + M\sigma, \quad e = e^e + e^i \quad (1.1)$$

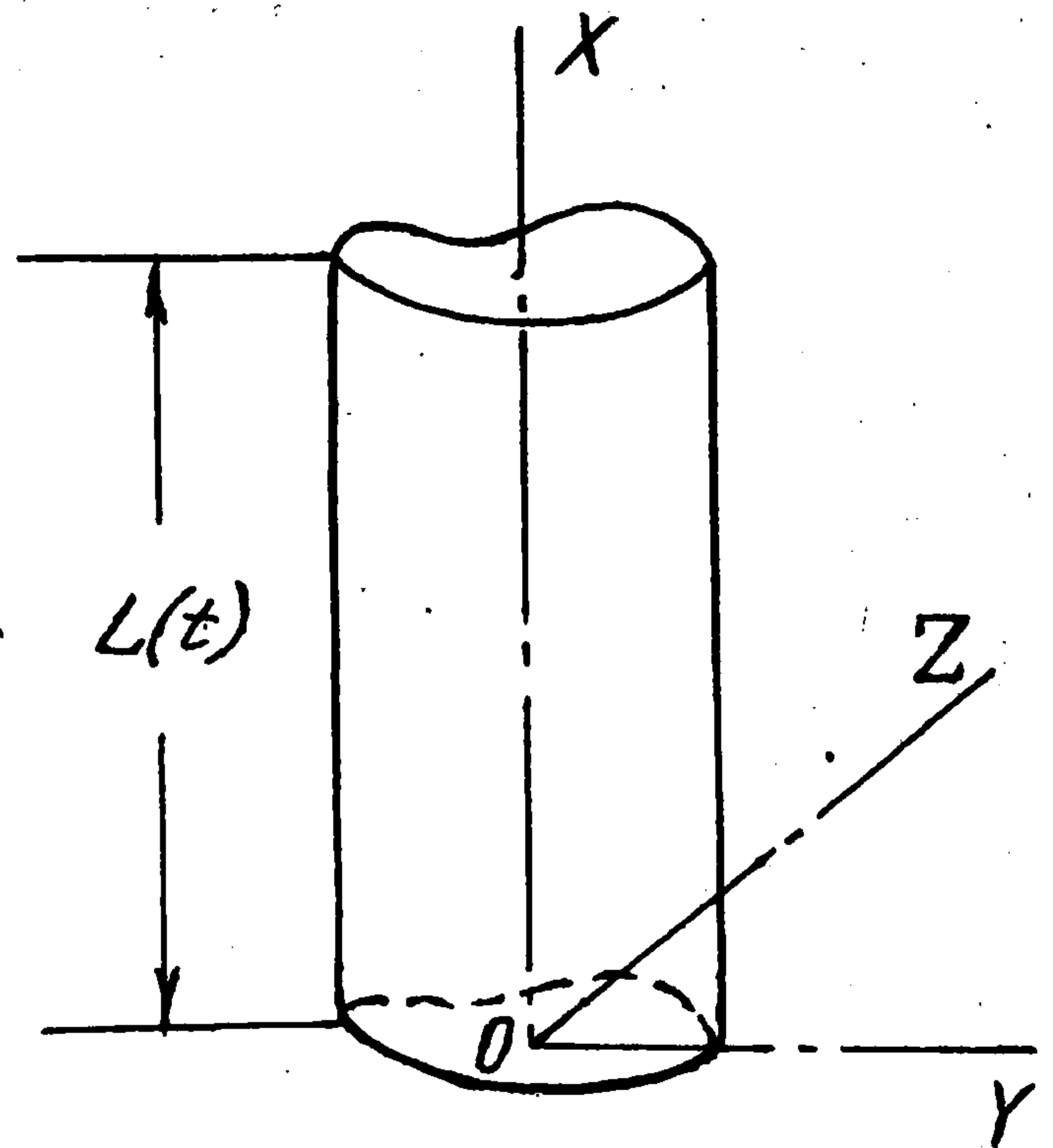
Здесь ϵ^e – тензор упругих деформаций, e , e^i , e^e – тензоры скоростей полных, неупругих (ростовых) и упругих деформаций соответственно, σ – тензор напряжений, K – тензор упругих коэффициентов. Во второй формуле (1.1) тензор A характеризует "собственный" рост материала (при отсутствии напряжений), а тензор M отвечает за влияние напряжений на ростовую деформацию.

Будем полагать упругие (но не ростовые) деформации малыми, в связи с чем отпадает необходимость конкретизации типа производной по времени при задании связи между тензорами ϵ^e и e^e , так что можно принять простейшую зависимость (в компонентах) $e_{kl}^e = d\epsilon_{kl}^e / dt$ и получить следующую дифференциальную связь:

$$e_{kl} = \nabla_{(k} v_{l)} = A_{kl} + M_{klmn} \sigma^{mn} + \frac{d}{dt} (K_{klmn} \sigma^{mn}) \quad (1.2)$$

где v_i — компоненты вектора скорости, круглые скобки означают симметризацию по соответствующим индексам, а символом d/dt обозначено дифференцирование по времени при фиксированных сопутствующих координатах. Замена в (1.2) оператора d/dt на производную, например, Олдройда приводит к появлению дополнительных пренебрежимо малых слагаемых (порядка $\epsilon\epsilon^e$). Здесь и далее по повторяющимся верхним и нижним индексам производится суммирование.

Из уравнений (1.1), (1.2) видно важное отличие рассматриваемой модели от классической вязкоупругой (максвелловской) среды: возможность деформирования в отсутствие напряжений. Связь скоростей деформаций с напряжениями определяется посредствующими химическими (метаболическими) процессами. Поэтому какие-либо



Фиг. 1

термодинамические неравенства, ограничивающие возможные значения компонент тензора M , для общего случая не могут быть выписаны. Уравнения (1.1), (1.2) совместно с уравнениями импульсов образуют замкнутую систему уравнений, если тензоры, A , K , M заданы. Медленность ростовых изменений предопределяет пренебрежение как притоком импульса за счет поступления массы в частицу среды, так и инерционными эффектами; быстрые по сравнению с ростом процессы могут учитываться в осредненной по медленному ("ростовому") времени форме [1, 2].

2. Рассмотрим рост объекта, первоначально имеющего форму прямого цилиндра. Выберем неподвижную декартову систему координат (фиг. 1) с началом у основания цилиндра и осью x , направленной по первоначальному направлению образующей (в случае необходимости далее отождествляем: $x = x^1$, $y = x^2$, $z = x^3$). Будем считать материал изотропным по упругим свойствам и обозначим его модуль Юнга, коэффициент Пуассона и модуль сдвига через E , σ и μ соответственно. Для ростовых характеристик примем условие трансверсальной изотропии, плоскость которой сначала направлена нормально к оси x , а при деформациях в каждой точке остается перпендикулярной волокну, первоначально ориентированному по оси x .

В декартовой неподвижной системе координат, ориентированной по плоскости изотропии (выбранная эйлерова система координат удовлетворяет этому условию по крайней мере в начальный момент времени), уравнения (1.2) примут вид

$$\begin{aligned}
 e_x &= w + \frac{1}{\theta} \sigma_x + \alpha_{12}(\sigma_y + \sigma_z) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\sigma_x}{E} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\sigma}{E} (\sigma_y + \sigma_z) \right) \\
 e_y &= w_s + \frac{1}{\theta_s} \sigma_x + \alpha_{22} \sigma_y + \alpha_{23} \sigma_z + \frac{d}{dt} \left(\frac{\sigma_y}{E} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\sigma}{E} (\sigma_x + \sigma_z) \right) \quad (y \leftrightarrow z) \\
 e_{xy} &= \alpha \sigma_{xy} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\sigma_{xy}}{2\mu} \right) \quad (y \rightarrow z), \quad e_{yz} = \beta \sigma_{yz} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\sigma_{yz}}{2\mu} \right)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Нижние индексы x , y , z , xy , xz , yz заменяют соответственно индексы 11, 22, 33, 12, 13, 23. Коэффициенты θ (ростовая "вязкость" в направлении оси x), θ_s , α_{kl} , α , β выражаются при учете симметрии тензоров e и σ [8] через пять параметров (например, исключая коэффициенты, определяющие сдвиговые деформации, получаем $\beta = \alpha_{22} + \alpha_{23}$, $\alpha = (1/\theta - \alpha_{12} - 1/\theta_s + \alpha_{22})/2$).

Примем неравенства $w > 0$ и $w_s > 0$, обеспечивающие положительную ростовую деформацию при отсутствии напряжений, что характерно для тканей в период интенсивного роста. В соответствии с наблюдаемым на многих биологических объектах в широком диапазоне нагрузок ускоряющим влиянием растягивающих (и, наоборот, замедляющим воздействием сжимающих) осевых напряжений на рост в том же направлении всюду ниже будем требовать выполнения неравенства $\theta > 0$. Знаки остальных коэффициентов, связанных с ростом, в дальнейшем не требуются и не обсуждаются.

При малых поворотах координатных линий сопутствующей системы координат относительно их первоначальных направлений (что не исключает больших перемещений, например, вдоль оси x) формулы (2.1) допустимо применять непосредственно в эйлеровой системе координат, изображенной на фиг. 1, но уже как приближенные.

В этой декартовой системе уравнения равновесия имеют вид

$$\partial \sigma^{kl} / \partial x^l + F^k = 0 \quad (2.2)$$

где $F^2 = F^3 = 0$, а $F^1 = \rho g$ – распределенная объемная сила тяжести (ось x при учете последней считается ориентированной вертикально). На боковой поверхности объект будем полагать ненагруженным, а на торце ($x = L$) зададим условия $\sigma_{xy} = 0$, $\sigma_x = -P/S(t, L)$, где $S(t, x)$ – площадь нормального к оси x сечения, $P = P(t) \geq 0$ – приложенная на торце осевая нагрузка.

Если весом объекта можно пренебречь по сравнению с внешней силой P (так что допустимо положить $F^k = 0$) и считать все реологические коэффициенты зависящими только от времени, то система уравнений (2.1), (2.2) при учете кинематических связей допускает точное решение. Оно соответствует росту без изменения цилиндрической формы с пространственно однородным распределением напряжений и скоростей деформаций, которое определяется следующими легко разрешимыми конечными и дифференциальными связями между функциями только времени:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{P}{S}, \quad \sigma_y = \sigma_z = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \\ e_x &= w - \frac{1}{\theta} \frac{P}{S} - \frac{d}{dt} \left(\frac{P}{ES} \right), \quad e_{xy} = e_{yz} = e_{xz} = 0 \\ e_y &= e_z = w_s - \frac{1}{\theta_s} \frac{P}{S} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\sigma P}{ES} \right), \quad \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} = e_y + e_z = 2e_y \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для компонент скорости имеют место линейные зависимости от координат: $v_x = e_x x$, $v_y = e_y y$, $v_z = e_z z$ (при выборе очевидных несущественных условий закрепления).

Решение (2.3) сохраняет форму (в пренебрежении изменениями геометрии сечения из-за малых упругих деформаций) для вертикального роста при учете собственного веса, когда выполнено условие $1/\theta_s = 0$ (осевые нагрузки не влияют на боковой рост). В этом случае в (2.3) следует положить:

$$P = P(x, t) = P_0 + \int_x^L \rho g S dx \quad (2.4)$$

где P_0 – торцевая нагрузка. Переменные σ_x , e_x , e_y , e_z , S теперь определяются из (2.3) при известной плотности ρ как функции от t и x . Соотношения (2.3) могут использоваться как приближенные и при $1/\theta_s \neq 0$ для достаточно малых времен, пока неоднородность толщины не приведет к значительным изменениям распределения напряжений.

Отбросив малые упругие деформации, несущественные при отсутствии возмущений однородного роста, получаем (для нагружения общего вида) из (2.3) уравнение,

определяющее длину цилиндра:

$$\dot{L} - wL + \frac{\tilde{p}(L,t)}{\theta} = 0, \quad \tilde{p}(L,t) = \int_0^L \frac{P}{S} dx \quad (2.5)$$

где точка означает дифференцирование по времени (функций только времени).

Пусть коэффициенты w, w_s, θ, θ_s – постоянные. Тогда уравнения (2.5), если нагрузка ограничивается лишь постоянным давлением на торце ($P = P_0 = p_0 S; p_0 = \text{const}$), дают экспоненциальный рост в длину (при $p_0 < \theta w$) и в толщину (при $p_0/\theta_s < w_s$). Сжимающее напряжение $p_0 = \theta w$ останавливает осевой рост, а при $p_0 > \theta w$ происходит укорочение и $L \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Для получения результатов, имеющих физический смысл на больших временах, необходимо воспользоваться нелинейным обобщением уравнений (1.1) или учесть зависимость реологических коэффициентов от времени.

Координатные линии сопутствующей системы координат при сосредоточенной нагрузке не искривляются; в общем случае в пределах применимости формул (2.3) таким искривлением можно пренебречь. С использованием (2.3) находится связь между эйлеровой координатой x и сопутствующей координатой ξ , в начальный момент совпадающей с x . При нагрузке, приложенной лишь на верхнем конце ($P = P_0$), эта зависимость приобретает форму

$$x = LL_0^{-1} \xi \quad (2.6)$$

соответствующую однородному растяжению (L_0 – длина объекта при $t = 0$). Формула (2.6) приближенно имеет место также в случае несущественности влияния напряжений на осевой рост ($P/(S\theta) \ll w$).

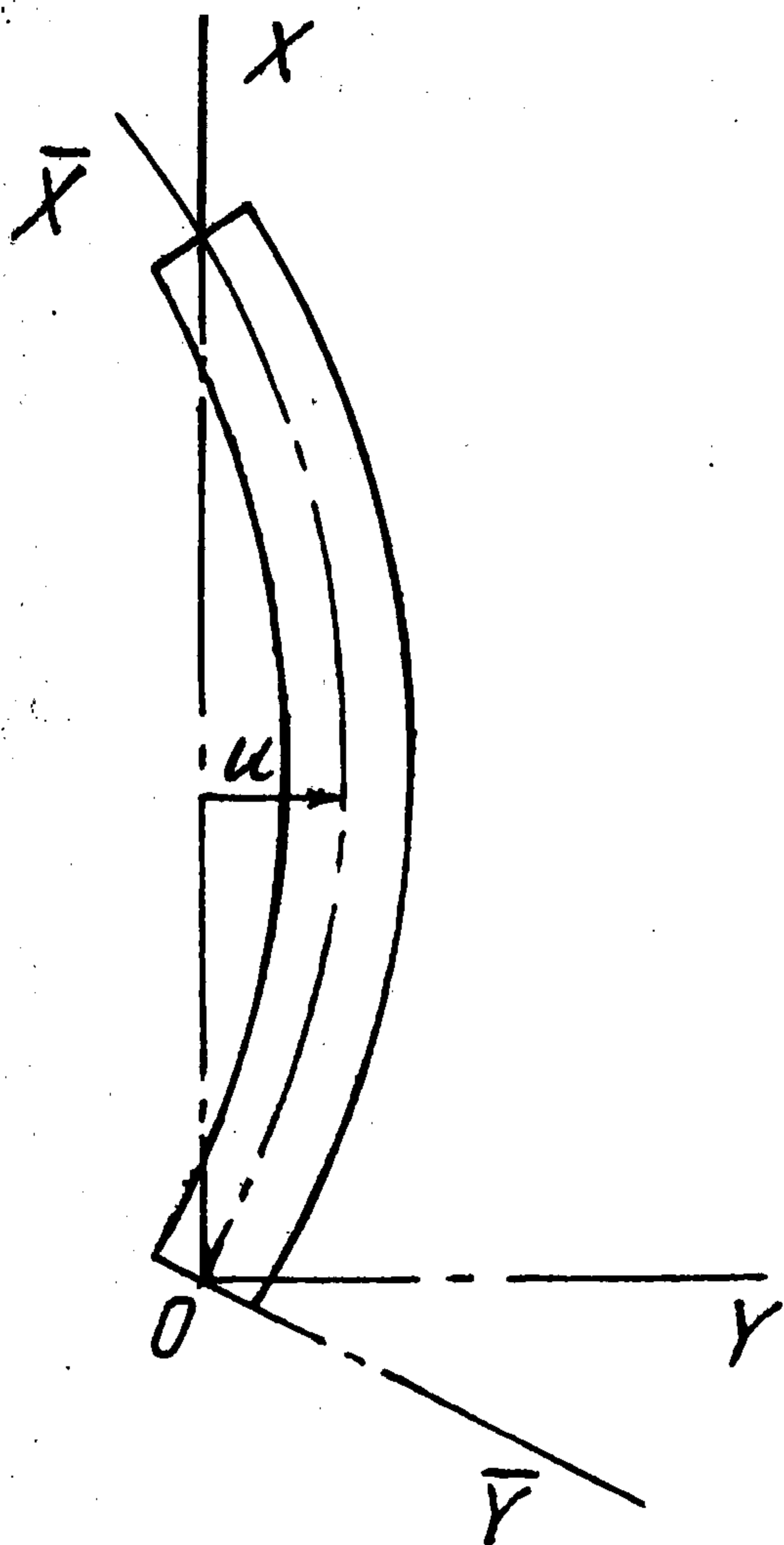
Рассмотрим еще изометрическую задачу, соответствующую постоянной длине цилиндра L ; такая постановка диктуется экспериментами с жестким ограничением роста. Задавая на торце нулевое осевое смещение с допущением свободного касательного проскальзывания ($\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0$) и предполагая ненагруженность боковой поверхности, имеем в случае несущественности массовых сил точное решение

$$e_x = e_{xy} = e_{xz} = e_{yz} = 0, \quad \sigma_y = \sigma_z = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

$$w + \frac{1}{\theta} \sigma_x + \frac{d}{dt} \left(\frac{\sigma_x}{E} \right) = 0, \quad e_y = e_z = w_s + \frac{1}{\theta_s} \sigma_x - \frac{d}{dt} \left(\frac{\sigma \sigma_x}{E} \right) = 0 \quad (2.7)$$

характеризуемое отсутствием осевой деформации и однородным осевым напряжением $\sigma_x = \sigma_x(t)$. Система (2.7) описывает нарастание осевого сжатия, сопровождаемое изменением скорости бокового роста. Зависимость (2.6) остается формально справедливой: $L = L_0, x = \xi$. При постоянных коэффициентах в (2.7) происходит установление постоянного осевого сжимающего напряжения $\sigma_x = -\theta w$ по экспоненциальному закону с характерным временем $\tau_m = \theta/E$.

3. Для анализа устойчивости процесса стационарного роста рассмотрим в случае сильно вытянутого объекта ($\delta/L \ll 1, \delta$ – характерный поперечный размер) его малое искривление. Приближенные уравнения, описывающие деформацию объекта (стержня) в квазистационарном процессе, будем получать осреднением уравнений равновесия (2.2) и состояния (2.1), а также некоторых сконструированных из них моментных соотношений по площади поперечного сечения. Ограничимся случаем плоского изгиба, который имеет место при начальном отклонении оси стержня в плоскости одной из главных осей тензора моментов инерции поперечного сечения. В силу условия трансверсальной изотропии и в рамках рассматриваемого ниже приближения это допущение обеспечивает развитие отклонения в той же плоскости (соотношения, оп-



Фиг. 2

ределяющие прогиб в перпендикулярной плоскости, выполняются тождественно и далее не рассматриваются). При линейризованной постановке задачи общий случай пространственного искривления может быть изучен как суперпозиция решений, описывающих изгиб в двух главных плоскостях.

Введем систему координат \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} следующим образом: \bar{x} – длина дуги искривленной оси; \bar{y} отсчитывается в плоскости изгиба от оси по перпендикуляру к последней, \bar{z} – по перпендикуляру к этой плоскости. Осредненное значение переменной есть ее интеграл по нормальному к деформированной оси сечению, отнесенный к его площади. Такие средние будем обозначать угловыми скобками. За физическими компонентами векторов и тензоров в новой системе координат сохраняются прежние обозначения (с индексами x , y , z); $y = u(x, t)$ – уравнение смещенной оси в неподвижной двумерной декартовой системе координат наблюдателя, расположенной в плоскости изгиба (фиг. 2). Процедура получения уравнений предусматривает отбрасывание малых порядка δ/L и u/L при их сравнении с единицей.

Осреднение уравнений равновесия и моментного уравнения, полученного домножением осевой проекции уравнения импульсов на координату \bar{y} , при-

водит к традиционным соотношениям

$$N' - p = 0 \quad (3.1)$$

$$Q = M' \quad (3.2)$$

$$M'' + (Nu)' = 0 \quad (3.3)$$

$N = \langle \sigma_x \rangle S$ и $Q = \langle \sigma_{xy} \rangle S$ – растягивающая и перерезывающая силы соответственно, $M = \langle \sigma_x \bar{y} \rangle S$ – изгибающий момент, действующие в поперечном сечении. Штрихи обозначают дифференцирование по осевой координате в системе наблюдателя x . Предполагается наличие распределенной сжимающей нагрузки $p \geq 0$, в которую включены как вес самого стержня, так и, возможно, нагружение через боковую поверхность. При изгибе нагрузка сохраняет свое направление относительно системы координат наблюдателя.

Осреднение уравнений состояния рассмотрим более подробно. С сохранением требуемой степени точности исходные зависимости в новой системе координат совпадают с (2.1), причем σ_y и σ_z теперь могут быть отброшены вследствие их малости по сравнению с σ_x .

Для компонент тензора e имеют место формулы

$$e_x = \frac{\partial v_x}{\partial \bar{x}}, \quad e_y = \frac{\partial v_y}{\partial \bar{y}}, \quad 2e_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial v_y}{\partial \bar{x}} + v_x u'' \quad (3.4)$$

Если в первом приближении ограничиться линейным распределением переменных по координате \bar{y} , получаем в результате осреднения уравнений (2.1) и моментного уравнения, образованного домножением первого уравнения (2.1) на \bar{y} , следующие зависимости:

$$\langle v_x \rangle' = w + \frac{1}{\theta} \frac{N}{S} + \frac{d}{dt} \left(\frac{N}{ES} \right) \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{I} \frac{dI}{dt} = \frac{2}{S} \frac{dS}{dt} = 4 \left[w_s + \frac{1}{\theta_s} \frac{N}{S} + \frac{d}{dt} \left(\frac{N}{ES} \right) \right] \quad (3.6)$$

$$\langle v_y \rangle' = -\frac{\langle v_x \bar{y} \rangle S}{I} - \langle v_x \rangle u'' + 2\alpha \langle \sigma_{xy} \rangle + \frac{d}{dt} \frac{\langle \sigma_{xy} \rangle}{\mu} \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{\langle v_x \bar{y} \rangle S}{I} \right)' = \frac{M}{I\theta} + \frac{d}{dt} \left(\frac{M}{IE} \right) \quad (3.8)$$

где I – момент инерции сечения относительно поперечной оси, а оператор d/t означает дифференцирование по времени при фиксированной сопутствующей осевой координате ξ . Исключим из (3.7), (3.8) параметр $\langle v_x \bar{y} \rangle$ с использованием (3.2):

$$\langle v_y \rangle'' = -\frac{M}{I\theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{M}{IE} \right) - (\langle v_x \rangle u'')' + \left(2\alpha \frac{M'}{S} \right)' + \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\mu} \left(\frac{M'}{S} \right) \right] \right\}' \quad (3.9)$$

В правой части уравнения (3.9) последнее слагаемое имеет порядок малости $(\delta/L)^2$ в сравнении со вторым; не меньшего порядка малость предпоследнего слагаемого по сравнению с первым, если $|\alpha| \lesssim 1/\theta$. Далее два последних слагаемых в (3.9) отбрасываются.

Из простых геометрических соображений получается связь:

$$du/dt = \langle v_y \rangle + \langle v_x \rangle u' \quad (3.10)$$

Соотношения (3.1), (3.3), (3.5), (3.6), (3.9), (3.10) образуют замкнутую систему уравнений. Для определения осевого смещения индивидуализированных точек необходима еще зависимость $dx/dt = \langle v_x \rangle$.

4. Полученная система уравнений имеет (если это не противоречит краевым условиям) решение, описывающее неискривленное деформирование стержня, при котором $u = 0$, $\langle v_y \rangle = 0$, $M = 0$. Для определения остальных переменных N , $\langle v_x \rangle$, S , I служат уравнения (3.1), (3.5), (3.6), которые требуют кроме начальных условий и допущения, определяющего неподвижную точку (например, $\langle v_x \rangle(0, t) = 0$), лишь одного физически содержательного условия. При $N(L, t) = -P_0(t)$ или $\langle v_x \rangle(L, t) = 0$ получаем обобщения точных решений, рассмотренных в разд. 2, причем все соотношения из названного раздела, которые связывают соответствующие переменные в точных решениях, остаются справедливыми для средних, в их числе формулы (2.5) и (2.6) (при указанных в разд. 2 гипотезах).

Рассмотрим теперь задачу о развитии малого возмущения решения, описывающего неискривленный рост, при изгибе стержня, для чего будем анализировать систему уравнений (3.3), (3.9) (с отброшенными двумя последними слагаемыми в правой части), (3.10), в которые вместо $\langle v_x \rangle$, N , S и I подставим функций, полученные из решения невозмущенной задачи, а обозначенный выше штрихом оператор $\partial/\partial x$ заменим на оператор $\xi_x \partial/\partial \xi$, где переменная $\xi_x = \partial \xi / \partial x$ определяется также из невозмущенного процесса. Для решения этой системы кроме начальных требуется задание четырех краевых условий. При возможности считать осевую ростовую деформацию за время искривления малой операторы $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial \xi$ можно отождествить. Такая постановка задачи об эволюции начального возмущения формально не отличается от известной для стержня из линейно ползучего материала [9] и была использована в [10] для растущего стержня.

В рассматриваемом далее примере коэффициенты θ , E , θ_s , w_s и момент инерции I будем считать функциями только времени (в отношении I это условие налагает неявное ограничение на постановку невозмущенной задачи и выполнено точно при сосредоточенной торцевой нагрузке). Предположим также реализацию формулы (2.6),

которая, напомним, имеет место не только при сосредоточенной нагрузке, но и при выполнении неравенства $P/(S\theta) \ll w$, не исключая существенное влияние напряжений на боковое искривление.

Введем безразмерные переменные $\tilde{\xi} = \xi/L_0$ (здесь $L_0 = L(0)$) и $\tilde{u} = u/L$ (относительный поперечный прогиб), сохранив размерное время. Система теперь сводится к одному уравнению

$$\frac{1}{L} u_t^{\prime\prime\prime} - \frac{L}{I\theta} (Nu')' - \left[\frac{L}{IE} (Nu')' \right]_t = 0 \quad (4.1)$$

где тильды при безразмерных переменных опущены (ниже эти величины употребляются только в безразмерной форме), штрихи и римские цифры означают теперь и далее дифференцирование соответствующей кратности по безразмерной сопутствующей координате ξ , а нижний индекс t указывает на дифференцирование по времени (при $\xi = \text{const}$). Если пренебречь удлинением стержня за время искривления ($L = L_0$) и считать θ, I постоянными, а N – функцией времени, (4.1) переходит в один из вариантов уравнения, рассмотренного в [9] (с учетом принятых в [9] краевых условий). Соотношение, исследованное в [10], получается, если, кроме того, пренебречь упругими деформациями ($1/E = 0$) и положить $N = \text{const}$.

Рассмотрим задачу с краевыми условиями

$$\partial_k^0 u(0, t) = 0, \quad \partial_k^1 u(1, t) = 0 \quad (4.2)$$

где k пробегает значения 1, 2, а $\partial_k^j u$ – однородные линейные формы от u, u', u'', u''' . К условиям такого типа относятся, например, чисто геометрические предположения об отсутствии боковых смещений концов ($u = 0$) или их жесткой заделке ($u = 0, u' = 0$). С использованием уравнений (3.9), (3.10) традиционные по форме соотношения вида (4.2) выводятся из допущений о незагруженности одного из концов ($u'' = 0, u''' = 0$) или о равенстве нулю изгибающего момента M ($u'' = 0$). (Строго говоря, в этих случаях на границе получаются более общие условия: $u''' = C_1$ и/или $u'' = C_2$, допускающие произвольное задание постоянных C_1 и C_2 , определяемых, в частности, геометрией начального неупругого искривления стержня. При неравенстве этих постоянных нулю отсутствие стационарного решения $u = 0$ исключает рассматриваемую далее постановку задачи.)

Пусть сила $N(\xi, t)$ представима в виде $N = -N_0(\xi)P(t)$. Положим $P > 0$; тогда в случае сжимающей нагрузки $N_0(\xi) > 0$ при $\xi \in (0, 1)$. Если нагрузка сосредоточена на верхнем конце, $N_0 = 1$; при нагрузке только собственным весом (в пренебрежении зависимостью площади сечения от ξ) $P(t)$ – полный вес стержня, $N_0 = 1 - \xi$.

Методом разделения переменных для задачи (4.1), (4.2) ищутся решения вида

$$u_n(\xi, t) = u_{1n}(\xi)u_{2n}(t) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.3)$$

Каждая из собственных функций $u_{1n}(\xi)$ является решением уравнения

$$u_{1n}^{\prime\prime\prime} + \lambda_n (N_0 u_{1n}')' = 0 \quad (4.4)$$

при условиях (4.2), где функции u заменены на u_{1n} ; λ_n – собственные числа задачи. Функции $u_{2n}(t)$ – решения уравнения

$$\frac{PL}{I\theta} u_{2n} + \left(\frac{PL}{IE} u_{2n} \right)' = \frac{\lambda_n}{L} \dot{u}_{2n} \quad (4.5)$$

даваемые формулой

$$u_{2n} = u_{2n}(0) \exp \int_0^t \Lambda_n dt, \quad \Lambda_n = L \left[\frac{PL}{I\theta} + \left[\frac{PL}{IE} \right]' \right] \left(\lambda_n - \frac{PL^2}{IE} \right)^{-1} \quad (4.6)$$

Если функции $u_{1n}(\xi)$ образуют полную систему, решение задачи (4.1), (4.2) имеет вид

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_{0n} u_n(\xi, t) \quad (4.7)$$

где u_{0n} – коэффициенты разложения начального возмущения $u_0 = u(0, \xi)$ по функциям $u_{1n}(\xi)$ (при $u_{2n}(0) = 1$). Все $\lambda_n > 0$ и выполнено условие полноты, если, в частности, среди связей (4.2) присутствуют равенства $u(0) = u(1) = 0$, а второе условие на каждом конце $u' = 0$ или $u'' = 0$ [11]. Еще один пример реализации упомянутых выше требований – задача о стержне, нагруженном собственным весом, с заделанным нижним и свободным верхним концами. Далее исследуется развитие отдельных мод при $\lambda_n > 0$.

Приняв условие устойчивости стержня как упругого объекта (по Эйлеру) в каждый момент времени при тех же граничных условиях и той же нагрузке, рассматриваемой как квазистационарная, получаем: $\lambda_n > PL^2/(IE)$. При учете этого ограничения в соответствии с формулой (4.6) возмущения нарастают, если выполнено условие

$$\frac{PL}{I\theta} + \left(\frac{PL}{IE} \right) > 0 \quad (4.8)$$

Первое слагаемое в (4.8) при сформулированных выше допущениях ($P > 0, \theta > 0$) положительно; знак второго не определен. В частности, при быстром по сравнению с удлинением и возрастанием нагрузки увеличением радиуса сечения и жесткости это слагаемое может быть отрицательным. В случае, когда условие (4.8) выполнено, все моды нарастают, причем особенно быстро развивается наиболее длинноволновая мода, допускаемая краевыми условиями, которая в основном и отвечает за наблюдаемое изменение формы.

Ростовые процессы в биологических объектах затухают за конечное характерное время t^* (меньшее, вообще говоря, времени жизни). Это формально означает, что $1/\theta(t) \rightarrow 0, w(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, причем наибольшее время релаксации этих функций равно t^* . Тогда $L(t)$ и $I(t)$ приближаются к конечным пределам. Существенным для оценки степени искривления объекта оказывается не самый факт нарастания возмущений, а уровень их развития за время роста, вычисляемый по формуле (4.6) при $t \rightarrow \infty$ (или при $t = t^*$). Характерное время невозмущенного процесса τ^* определяется задачей и может оказаться меньшим, чем t^* (например, для рассмотренного в разд. 2 примера изометрического нагружения $\tau^* = \theta/E$). Тем не менее развитие неустойчивости должно, вообще говоря, оцениваться за время t^* , поскольку нарастание возмущений при $\tau^* < t < t^*$ может и продолжаться из-за сохранения возможности роста ($w \neq 0, 1/\theta \neq 0$).

При неизвестном уровне начального искривления физически решающим оказывается сопоставление характерного времени развития возмущений τ , оцениваемого из (4.6), и времени ростовой активности t^* . Если эти времена одного порядка: $\tau \sim t^*$, имеет место медленное искривление, которое может быть значительным при больших начальных возмущениях, но не приводит к катастрофической деформации объекта; если же $\tau \gg t^*$, процесс следует считать физически полностью устойчивым. О физически существенной неустойчивости можно говорить лишь в том случае, когда возмущение развивается быстро по сравнению с ростовым процессом: $\tau \ll t^*$.

Нетрудно выписать достаточное условие "устойчивости" в разъясненном выше смысле при нарастающих возмущениях (реализуется ограничение (4.8)):

$$1/\Lambda_1 \gg t^* \quad (4.9)$$

(Λ_1 – наименьшее собственное число). Структура условия (4.9) обеспечивает его нарушение при приближении к порогу устойчивости стержня по Эйлеру, если левая часть неравенства (4.8) ограничена снизу положительной постоянной.

Механизм потери устойчивости, определяемый влиянием напряжений на рост, был впервые замечен В.М. Ентовым [10] (предварительная публикация в 1978 г.). Анализ, проведенный в настоящей работе, демонстрирует более сложную, чем изложено в [10], картину процесса, которая (даже в элементарной постановке) не сводится просто к неустойчивости осесимметричного роста при сжатии. Исследованный здесь механизм нарушения симметрии может участвовать в формообразовании биологических систем и среди других механо-химических факторов должен учитываться при разработке физических теорий морфогенеза [3, 12–15].

Часть изложенных результатов предварительно опубликована ранее [16, 17].
Автор благодарит С.А. Регирера за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Регирер С.А., Штейн А.А. Механические аспекты процессов роста, развития и перестройки биологических тканей // Итоги науки и техники. Комплексные и специальные разделы механики. М.: ВИНТИ, 1985. Т. 1. С. 3–142.
2. Регирер С.А., Штейн А.А. Методы механики сплошной среды в применении к задачам роста и развития биологических тканей // Современные проблемы биомеханики. Рига: Зинатне, 1985. Т. 2. С. 5–37.
3. Регирер С.А., Штейн А.А. Механохимические модели морфогенеза // Теоретические и математические аспекты морфогенеза. М.: Наука, 1987. С. 151–161.
4. Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э. Механика растущих вязкоупругопластических тел. М.: Наука, 1987. 471 с.
5. Hsu F.H. The influences of mechanical loads on the form of growing elastic body // J. Biomech. 1968. V. 1. N 4. P. 303–311.
6. Штейн А.А. Новый подход к континуальному описанию механики объемного роста. Модель растущего упругого тела // Биомеханика мягких тканей. Казань: Каз. Филиал АН СССР, 1987. С. 90–101.
7. Штейн А.А. О континуальных моделях растущего материала // Механика композитных материалов. 1979. № 6. С. 1105–1110.
8. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
9. Ржаницын А.Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 252 с.
10. Ентов В.М. О механической модели сколиоза // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 201–208.
11. Collatz L. Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Leipzig: Geest, 1963. 500 S. Р. перев.: Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями. М.: Наука, 1968. 503 с.
12. Мелихов А.В., Регирер С.А., Штейн А.А. Механические напряжения как фактор морфогенеза // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 6. С. 1341–1344.
13. Штейн А.А., Логвенков С.А. Пространственная самоорганизация тонкого слоя биологического материала, растущего на подложке // Докл. РАН. 1993. 328. № 4. С. 443–446.
14. Белинцев Б.Н. Физические основы биологического формообразования. М.: Наука, 1991. 252 с.
15. Murray J.D., Oster G.F., Harris A.K. A mechanical model for mesenchymal morphogenesis // J. Math. Biol. 1983. V. 17. N 1. P. 125–129.
16. Штейн А.А. Некоторые модели и задачи механики растущего материала // Отчет Ин-та механики МГУ. 1979. № 2235. 28 с.
17. Штейн А.А. Устойчивость вертикально растущего тонкого цилиндрического объекта по отношению к возмущениям, вызывающим его изгиб // Тез. докл. 3 Всесоюз. конф. по пробл. биомеханики. Т. 1. Рига: Ин-т механики полимеров АН ЛатвССР, 1983. С. 199–200.