

УДК 539.3

© 1994 г. С.Б. Филиппов

УСТОЙЧИВОСТЬ СОПРЯЖЕННЫХ ПОД УГЛОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНОГО ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

Асимптотический метод [1] используется для приближенного решения задачи о потере устойчивости безмоментного напряженного состояния двух сопряженных под углом тонких упругих замкнутых цилиндрических оболочек средней длины под действием однородного внешнего бокового давления. Получены простые приближенные формулы для определения верхнего критического давления и формы потери устойчивости. Установлено, что форма потери устойчивости локализована в окрестности наиболее длинной образующей той из оболочек, которая имеет большую длину, а верхнее критическое давление мало отличается от критического давления для более длинной оболочки, шарнирно опертой по линии сопряжения.

1. Предположим, что сопряженные под углом 2β цилиндрические оболочки имеют одинаковый радиус R и толщину h . Обозначим $x^{(k)}, \varphi^{(k)}$ систему координат на срединной поверхности k -й оболочки. Пусть

$$\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = \varphi, \quad x^{(1)} \in [x_0^{(1)}, x_*^{(1)}(\varphi)], \quad x^{(2)} \in [x_*^{(2)}(\varphi), x_0^{(2)}]$$

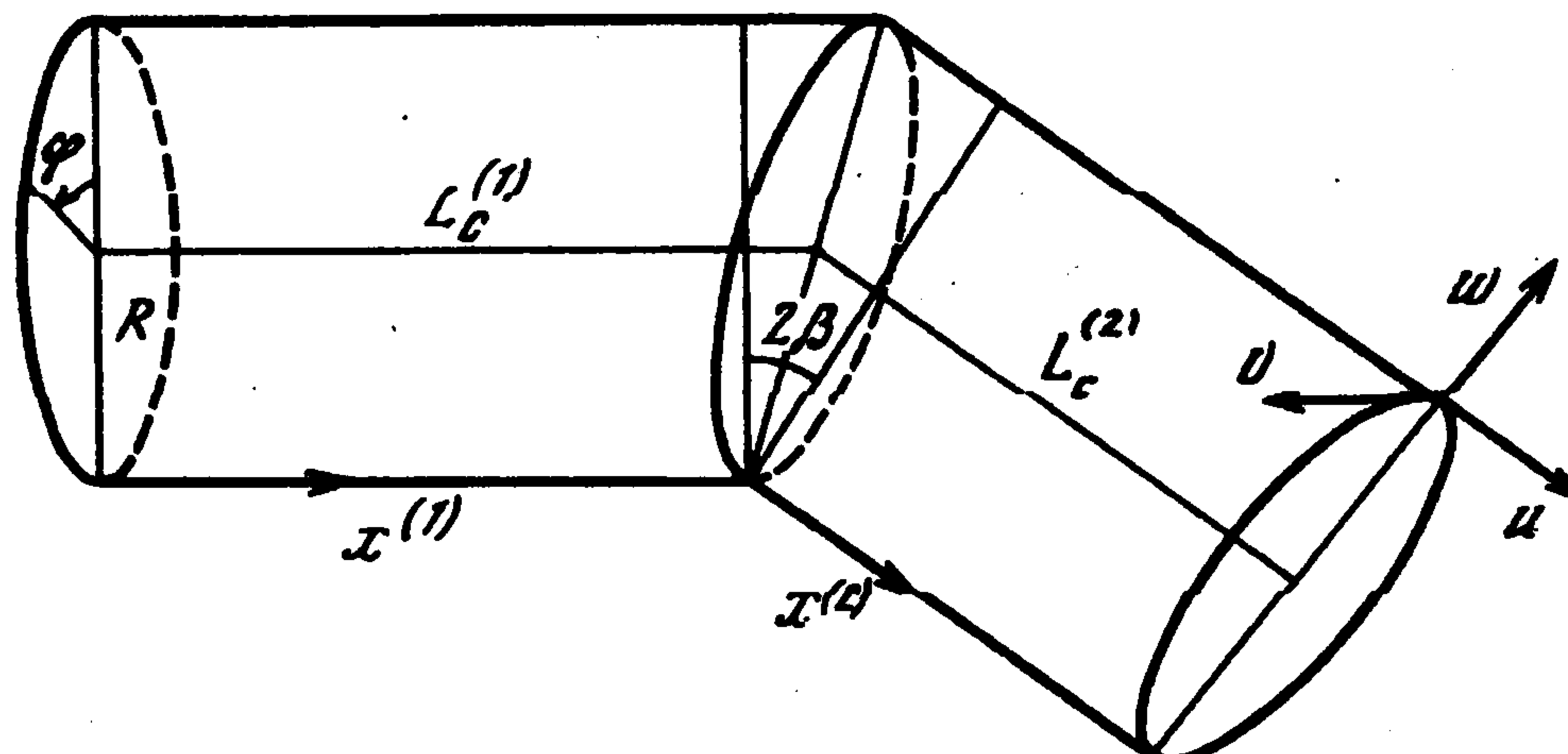
$$x_*^{(k)}(\varphi) = x_0^{(k)} + (-1)^{k+1} (l_c^{(k)} + \operatorname{tg} \beta \cos \varphi), \quad x_0^{(1)} + l_c^{(1)} = x_0^{(2)} - l_c^{(2)}$$

$$l_c^{(k)} = L_c^{(k)} / R, \quad k = 1, 2$$

где $L_c^{(k)}$ – «средняя» длина k -й оболочки (фигура).

Здесь и в дальнейшем величины с верхним индексом (k) соответствуют k -й оболочке. Верхние индексы могут отсутствовать в формулах, справедливых для обеих оболочек.

Уравнения устойчивости каждой из оболочек можно записать в следующем



безразмерном виде [2]:

$$\begin{aligned}
 T_2 - Q_{2,\varphi} - Q_{1,x} + \lambda(w_{,\varphi\varphi} - v_{,\varphi}) &= 0, \quad S_{,x} + T_{2,\varphi} + Q_2 = 0 \\
 T_{1,x} + S_{,\varphi} &= 0, \quad Q_2 = M_{2,\varphi}, \quad Q_1 = M_{1,x} + 2H_{,\varphi}, \quad H = (1-v)\varepsilon^8\vartheta_{2,x} \\
 M_1 &= \varepsilon^8(\vartheta_{1,x} + v\vartheta_{2,\varphi}), \quad M_2 = \varepsilon^8(\vartheta_{2,\varphi} + v\vartheta_{1,x}) \\
 (1-v^2)T_1 &= u_{,x} + v(w + v_{,\varphi}), \quad (1-v^2)T_2 = w + v_{,\varphi} + vu_{,x} \\
 2(1-v)S &= v_{,x} + u_{,\varphi}, \quad v_1 = -w_{,x}, \quad v_2 = -w_{,\varphi} + v
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $T_1, T_2, S, Q_1, Q_2, M_1, M_2, H$ – безразмерные усилия и моменты, ϑ_1, ϑ_2 – углы поворота, u, v, w – безразмерные проекции перемещений, $\varepsilon^8 = h_2/[12(1-v^2)R^2]$ – малый параметр, $\lambda = pR/(Eh\varepsilon^6)$ – искомый параметр нагружения, p – величина внешнего давления, v – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга.

Предположим, что прямые края оболочек свободно оперты:

$$T_1^{(k)} = v^{(k)} = w^{(k)} = M_1^{(k)} = 0, \quad x^{(k)} = x_0^{(k)} \tag{1.2}$$

На линии сопряжения оболочек $x^{(1)} = x_*^{(1)}, x^{(2)} = x_*^{(2)}$ должны быть выполнены условия непрерывности

а) перемещений:

$$\begin{aligned}
 u_n^{(1)} c \sin \beta + w^{(1)} \cos \beta &= -u_n^{(2)} c \sin \beta + w^{(2)} \cos \beta \\
 u_n^{(1)} \cos \beta - w^{(1)} c \sin \beta &= u_n^{(2)} \cos \beta + w^{(2)} c \sin \beta \\
 u_t^{(1)} &= u_t^{(2)}
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

где

$$\begin{aligned}
 u_n^{(k)} &= u^{(k)} \cos \gamma + (-1)^{k+1} v^{(k)} \sin \gamma, \quad u_t^{(k)} = (-1)^k u^{(k)} \sin \gamma + v^{(k)} \cos \gamma \\
 &\quad \text{tg} \gamma + \text{tg} \beta \sin \varphi, \quad c = \cos \gamma \cos \varphi
 \end{aligned}$$

б) усилий

$$\begin{aligned}
 T_n^{(1)} c \sin \beta + Q_n^{(1)} \cos \beta &= -T_n^{(2)} c \sin \beta + Q_n^{(2)} \cos \beta \\
 T_n^{(1)} \cos \beta - Q_n^{(1)} c \sin \beta &= T_n^{(2)} \cos \beta + Q_n^{(2)} c \sin \beta \\
 S_{nt}^{(1)} &= S_{nt}^{(2)}
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

где

$$\begin{aligned}
 T_n^{(k)} &= T_1^{(k)} \cos^2 \gamma + 2(-1)^{k+1} S^{(k)} \sin \gamma \cos \gamma + T_2^{(k)} \sin^2 \gamma \\
 S_{nt}^{(k)} &= (-1)^{k+1} (T_2^{(k)} - T_1^{(k)} \sin \gamma \cos \gamma) + S^{(k)} (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \\
 Q_n^{(k)} &= Q_1^{(k)} \cos \gamma + (-1)^{k+1} Q_2^{(k)} \sin \gamma
 \end{aligned}$$

в) углов поворота и моментов:

$$\vartheta_n^{(1)} = \vartheta_n^{(2)}, \quad M_n^{(1)} = M_n^{(2)} \tag{1.5}$$

где

$$\begin{aligned}
 M_n^{(k)} &= M_1^{(k)} \cos^2 \gamma + 2(-1)^{k+1} H^{(k)} \sin \gamma \cos \gamma + M_2^{(k)} \sin^2 \gamma \\
 \vartheta_n^{(k)} &= \vartheta_1^{(k)} \cos \gamma + (-1)^{k+1} \vartheta_2^{(k)} \sin \gamma
 \end{aligned}$$

В соотношениях (1.1)–(1.5) отброшены некоторые малые слагаемые, добавление которых не влияет на полученные в работе приближенные формулы. Так, например, несущественным оказывается влияние докритических деформаций. Однако для определения критического давления с принятой в работе точностью оказалось необходимым сохранить в (1.1) члены, отсутствующие в технической теории Доннелла–Власова.

В дальнейшем предполагается, что угол сопряжения β не является малой величиной, т.е. $\beta = O(1)$.

2. Приближенное решение краевой задачи (1.1)–(1.5), экспоненциально убывающее при удалении от образующей $\varphi = 0$, будем искать в виде:

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots \quad (2.1)$$

$$y = y_a + y_b \quad (2.2)$$

Здесь y – любая из неизвестных функций, входящих в (1.1). Первое слагаемое в (2.2) описывает основное полубезмоментное напряженно-деформированное состояние оболочки, а второе – простой краевой эффект вблизи краев $x^{(k)} = x_0^{(k)}$ и линии сопряжения $x^{(k)} = x_*^{(k)}$. Приближенное решение y_a представим в виде [1]

$$y_a = \varepsilon^{a(y)} \tilde{y} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_0^\varphi q(\varphi) d\varphi\right) \quad (2.3)$$

где

$$\text{Im}\{q(0)\} = 0, \quad \text{Im}\{q_{,\varphi}(0)\} > 0 \quad (2.4)$$

$$\tilde{y} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(x, \varphi) \quad (2.5)$$

Для определения коэффициентов интенсивности $a(y)$, постоянных λ_n и функций $q(\varphi)$, $y_n(x, \varphi)$ подставим (2.1) и (2.3) в (1.1). Положим $a(w) = 0$. Тогда $a(v) = 1$, $a(u) = a(T_1) = 2$, $a(S) = 3$. Функция \tilde{w} удовлетворяет уравнению

$$G\tilde{w} - \lambda\tilde{w} = \varepsilon^2 N\tilde{w}, \quad N = 4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 - \lambda_0 \Phi^{-2} \left(1 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \quad (2.6)$$

$$G = \Phi^{-6} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \Phi^2, \quad \Phi = q - i\varepsilon \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Здесь Φ^{-n} – формальный асимптотический ряд, причем $\Phi^{-n} \Phi^n y = y$.

Величины $\tilde{u}, \tilde{v}, \dots$ выражаются через \tilde{w} . В частности

$$\tilde{u} \approx -\Phi^{-2} \tilde{w}_{,x} - \varepsilon^2 (2 + \nu) \Phi^{-4} \tilde{w}_{,xxx}, \quad \tilde{T}_1 \approx -\Phi^{-2} \tilde{w}_{,xx} + 2\varepsilon^2 (q^4 - \lambda_0 q^2) \tilde{w}$$

$$\tilde{v} \approx i\Phi^{-1} \tilde{w} - i\nu \varepsilon^2 \Phi^{-3} \tilde{w}_{,xx}, \quad \tilde{S} \approx -i\Phi^{-3} \tilde{w}_{,xxx} + 2i\varepsilon^2 q(q^2 - \lambda_0) \Phi^{-1} \tilde{w}_{,x}$$

Оператор G , определенный в (2.6), разложим в ряд по степеням параметра ε :

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n G_n, \quad G_0 = \frac{1}{q^6} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + q^2, \quad G_1 = -i \left(\frac{\partial G_0}{\partial q} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{q_{,\varphi}^2}{2} \frac{\partial^2 G_0}{\partial q^2} \right) \quad (2.7)$$

$$G_2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 G_0}{\partial q^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + q_{,\varphi} \frac{\partial^3 G_0}{\partial q^3} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{q_{,\varphi\varphi}}{3} \frac{\partial^3 G_0}{\partial q^3} + \frac{(q_{,\varphi})^2}{4} \frac{\partial^4 G_0}{\partial q^4} \right)$$

Подставив (2.1), (2.5) и (2.7) в (2.6), получим последовательность уравнений для

определения λ_n и $w_n(x, \varphi)$:

$$(G_0 - \lambda_0)w_0 = 0, \quad (G_0 - \lambda_0)w_1 + (G_1 - \lambda_1)w_0 = 0, \dots \quad (2.8)$$

Функции краевого эффекта y_b можно представить в виде

$$y_b^{(k)} = \varepsilon^{b(y)} \hat{y}^{(k)} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} q_0 \varphi\right), \quad \hat{y}^{(k)} = \sum_{j=1}^4 C_j^{(k)} \hat{y}_j f_j^{(k)}(x, \varepsilon) \quad (2.9)$$

$$f_j^{(k)} = \exp[(-1)^k (g_j^{(k)} - x^{(k)}) r_j / \varepsilon^2], \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$g_1^{(k)} = g_2^{(k)} = x_0^{(k)}, \quad g_3^{(k)} = g_4^{(k)} = x_*^{(k)}(0)$$

$$r_j = -[1 + (-1)^j i] / \sqrt{2}, \quad j = 1, 2, \quad r_3 = -r_2, \quad r_4 = -r_1$$

где $\hat{y}_j, C_j^{(k)}$ – неизвестные постоянные, $q_0 = q(0)$. Функции $f_1^{(k)}, f_2^{(k)}$ быстро убывают при удалении от прямого края k -й оболочки, а функции $f_3^{(k)}, f_4^{(k)}$ – при удалении от линии сопряжения.

Подстановка (2.9) в систему (1.1) позволяет найти связь между коэффициентами интенсивности $b(y)$ и определить \hat{y}_j . В частности

$$\hat{w}_j = 1, \quad \hat{\vartheta}_{nj} = -r_j, \quad \hat{M}_{nj} = -r_j^2$$

$$\hat{Q}_{nj} = -r_j^3, \quad \hat{S}_{nj} = \frac{i q_0}{r_j}, \quad \hat{T}_{nj} = -\frac{q_0}{r_j^2} + \frac{\text{tg} \beta}{r_j}$$

Конкретные значения коэффициентов интенсивности

$$b(w) = 2, \quad b(\vartheta_n) = 0, \quad b(M_n) = 6$$

$$b(Q_n) = 4, \quad b(S_n) = 3, \quad b(T_n) = 4$$

находятся после подстановки решения (2.2) в граничные условия (1.2)–(1.5). Эта же подстановка дает возможность определить граничные условия для уравнений (2.8). В нулевом и первом приближениях эти условия разделяются на две группы, каждая из которых содержит только величины, относящиеся к одной из оболочек. Это позволяет решать краевые задачи нулевого и первого приближений отдельно для каждой из оболочек.

3. Перейдем к последовательному решению краевых задач для уравнений (2.8). В нулевом приближении получаем две независимые краевые задачи:

$$(G_0 - \lambda_0)w_0^{(k)} = 0 \quad (3.1)$$

$$w_0^{(k)} = w_{0,xx}^{(k)} = 0 \quad \text{при} \quad x^{(k)} = x_0^{(k)}, \quad x^{(k)} = x_*^{(k)}$$

совпадающие с краевыми задачами нулевого приближения для первой ($k = 1$) и второй ($k = 2$) оболочек со свободно опертыми краями.

Решение каждой из задач (3.1) ищем в виде

$$w_0(x, \varphi) = P_0(\varphi)W_0(x, \varphi)$$

Здесь

$$P_0(\varphi) = 1 + V_1 \varphi + V_2 \varphi^2 / 2 + \dots \quad (3.2)$$

причем коэффициенты V_n определяются при построении первого приближения. Функция W_0 удовлетворяет уравнению

$$d^4 W_0 / dx^4 - \alpha^4 W_0 = 0, \quad \alpha^4 = \lambda_0 q^6 - q^8 \quad (3.3)$$

и граничным условиям

$$W_0 = W_{0,xx} = 0 \quad \text{при } x = x_0, \quad x = x_* \quad (3.4)$$

Из (3.3), (3.4) следует, что

$$\lambda_0 = \alpha^4/q^6 + q^2 = f(\varphi, q(\varphi)) \quad (3.5)$$

где $\alpha = \pi/l(\varphi)$ – наименьшее положительное собственное значение краевой задачи (3.3), (3.4), $l(\varphi) = l_c + \text{tg } \beta \cos \varphi$.

Нулевому приближению для параметра критической нагрузки λ_0 соответствуют значения $\varphi = 0$ и $q = q_0 = q(0)$, для которых

$$\lambda_0 = f(0, q_0) = \min_q f(0, q) \quad (3.6)$$

Из (3.6) и (2.4) следует, что

$$q_0 = 3^{1/8} \sqrt{\alpha_0}, \quad \alpha_0 = \pi/l_0, \quad l_0 = l(0) = l_c + \text{tg } \beta \quad (3.7)$$

Подставив (3.7) в (3.6), получим

$$\lambda_0 = 4\pi / 3^{3/4} l_0 \quad (3.8)$$

Функцию $q(\varphi)$ представим в виде ряда

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n \varphi^n}{n!}$$

причем q_0 определяется по формуле (3.7). Для того чтобы найти остальные коэффициенты q_n , следует дифференцировать по φ равенство (3.5), полагая затем $\varphi = 0$. В частности

$$q_1 = \frac{i}{4} \sqrt{\frac{\lambda_0 \text{tg } \beta}{l_0}}, \quad q_2 = -\frac{11q_1^2}{3q_0}, \quad q_3 = -\frac{q_1}{3} \left(\frac{40q_1^2}{q_0^2} + \frac{3}{4} \right) \quad (3.9)$$

Без ограничения общности можно считать, что $l_0^{(1)} \geq l_0^{(2)}$. Тогда $l_0^{(1)} \leq l_0^{(2)}$, и следовательно, в нулевом приближении параметр критического давления для сопряженных оболочек вычисляется по формуле

$$\lambda \approx \lambda_0^{(1)} = 4\pi / (3^{3/4} l_0^{(1)}) \quad (3.10)$$

Собственные функции краевой задачи (3.3), (3.4), соответствующие $\lambda_0^{(1)}$, можно представить в виде

$$W_0^{(1)} = D^{(1)} \sin[\alpha^{(1)}(x^{(1)} - x_0^1)], \quad W_0^{(2)} = D^{(2)} \sin[\alpha^{(2)}(x_0^2 - x^{(2)})]$$

где $D^{(k)}$ – произвольные постоянные.

В нерезонансном случае

$$l_0^{(1)} - l_0^{(2)} \sim 1 \quad (3.11)$$

краевая задача (3.3), (3.4) при $k = 2$ имеет только тривиальное решение, поэтому $D^{(2)} = 0$.

В резонансном случае

$$l_0^{(1)} = l_0^{(2)} + \varepsilon^2 \Delta, \quad \Delta = O(1) \quad (3.12)$$

отношение $D^{(2)}/D^{(1)}$ определяется при построении следующих приближений.

4. Краевая задача первого приближения для каждой из оболочек имеет вид

$$(G_0 - \lambda_0)w_1 = -(G_1 - \lambda_1)w_0 \quad (4.1)$$

$$w_1 = w_{1,xx} = 0 \quad \text{при } x = x_0 \quad (4.2)$$

$$w_1 = w_{1,xx} - 4iq^{-1}w_{0,xxx}x_{*,\varphi} = 0 \quad \text{при } x = x_*$$

и представляет собой неоднородную задачу на спектре. Условие ее разрешимости получим, если домножим уравнение (4.1) на W_0 и проинтегрируем полученное равенство по частям на интервале изменения x при учете (4.2). После преобразований условие разрешимости принимает вид

$$f_{,q}(P_{0,\varphi}I_0 + P_0I_1) + (f_{,q\varphi} + f_{,qq}q_{,\varphi} - 2\lambda_1i)I_0P_0 / 2 = 0 \quad (4.3)$$

$$I_0 = \int_{x_0}^{x_*} W_0^2 dx, \quad I_1 = \int_{x_0}^{x_*} W_0 W_{0,\varphi} dx$$

В виду того, что $f_{,q}(0, q_0) = f_{,q\varphi}(0, q_0) = 0$, из (4.3) следует, что

$$\lambda_1 = -iq_1 f_{,qq}(0, q_0) / 2 = 2\sqrt{\lambda_0} \text{tg}\beta / l_0 \quad (4.4)$$

Коэффициенты V_n в разложении (3.2) функции $P_0(\varphi)$ последовательно определяются путем вычисления произвольных по φ левой части равенства (4.3) при $\varphi = 0$. Принимая во внимание (3.9), получим

$$V_1 = \frac{4q_1}{3q_0}, \quad V_2 = \frac{103q_1^2}{18q_0^2} + \frac{1}{16} \quad (4.5)$$

Из (4.1) и (4.3) следует, что

$$(G_0 - \lambda_0)w_1 = -\frac{2i}{q} f_{,\varphi} P_0 W_0 + if_{,q} P_0 \left(W_{0,\varphi} + \frac{\alpha_{,\varphi}}{2\alpha} W_0 \right) \quad (4.6)$$

Решение уравнения (4.6) ищем в виде

$$w_1 = P_1(\varphi)W_0 + A(\varphi)W_{0,\varphi\varphi} + B(\varphi)W_{0,\varphi} + C(\varphi)\sinh[\alpha(x - x_0)] \quad (4.7)$$

Подставим (4.7) в (4.6) и воспользуемся равенствами

$$(G_0 - \lambda_0)W_{0,\varphi} = f_{,\varphi} W_0, \quad (G_0 - \lambda_0)W_{0,\varphi\varphi} = 2f_{,\varphi} W_{0,\varphi} + f_{,\varphi\varphi} W_0$$

Для функций A и B получим выражения

$$A = \frac{if_{,q}}{2f_{,\varphi}} P_0, \quad B = -A \left(4 \frac{x_{*,\varphi}}{l} + \text{tg}\varphi \right) \quad (4.8)$$

Функция C определяется после подстановки (4.7) в (4.2) при учете (4.8), а функция $P_1(\varphi)$ находится при построении следующего приближения.

Для параметра λ при учете поправки первого приближения получаем

$$\lambda \approx \lambda_0^{(1)} + 2\varepsilon \sqrt{\lambda_0^{(1)} \text{tg}\beta / l_0^{(1)}} \quad (4.9)$$

Формула (4.9) совпадает с полученной в [1] для оболочки со свободно опертыми краями. Следовательно, параметр λ для сопряженных оболочек отличается от значения λ для наиболее длинной из оболочек со свободно опертыми краями на величину $O(\varepsilon^2)$.

5. Для определения величины λ_2 достаточно рассмотреть краевые задачи второго

приближения при $\varphi = 0$:

$$(G_0 - \lambda_0)w_2^{(k)} + (G_1 - \lambda_1)w_1^{(k)} + (G_2 - \lambda_2)w_0^{(k)} = Nw_0^{(k)}$$

$$w_2^{(k)} = -\hat{w}^{(k)}, \quad w_{2,xx}^{(k)} = s_0 \hat{T}_n^{(k)} \quad \text{при } x^{(k)} = x_0^{(k)}$$

$$w_2^{(k)} = \frac{w_{0,x}^{(2)} - w_{0,x}^{(1)} \cos 2\beta}{s_0 \sin 2\beta} - \hat{w}^{(1)}, \quad w_2^{(2)} = \frac{w_{0,x}^{(2)} \cos 2\beta - w_{0,x}^{(1)}}{s_0 \sin 2\beta} - \hat{w}^{(2)}$$

$$w_{2,xx}^{(1)} = s_0 \left(\hat{T}_n^{(1)} + \frac{\hat{Q}_n^{(1)} \cos 2\beta - \hat{Q}_n^{(2)}}{\sin 2\beta} \right) - \frac{5}{s_0} w_{0,xxx}^{(1)} \operatorname{tg} \beta \quad (5.1)$$

$$w_{2,xx}^{(2)} = s_0 \left(\hat{T}_n^{(2)} - \frac{\hat{Q}_n^{(2)} \cos 2\beta - \hat{Q}_n^{(1)}}{\sin 2\beta} \right) + \frac{5}{s_0} w_{0,xxx}^{(2)} \operatorname{tg} \beta$$

$$\text{при } x^{(k)} = x_*^{(k)}(0), \quad s_0 = (q_0^{(1)})^2$$

Граничные условия содержат значения функций краевого эффекта.

Подстановка решения (2.2) в (1.2)–(1.5) дает следующие соотношения для определения постоянных $C_j^{(k)}$ в функциях краевого эффекта (2.9):

$$\hat{w}^{(k)} = \hat{M}_n^{(k)} 0 \quad \text{при } x^{(k)} = x_0^{(k)} \quad (5.2)$$

$$\hat{w}^{(1)} = \hat{w}^{(2)}, \quad \hat{\vartheta}^{(1)} - \hat{\vartheta}^{(2)} = w_{0,x}^{(1)} - w_{0,x}^{(2)}, \quad \hat{M}^{(1)} = \hat{M}^{(2)} \quad (5.3)$$

$$\hat{S}_{nr}^{(1)} - \hat{S}_{nr}^{(2)} = i(q_0^{(1)})^{-3} (w_{0,xxx}^{(1)} - w_{0,xxx}^{(2)}) \quad \text{при } x^{(k)} = x_*^{(k)}(0)$$

Из (5.2) следует, что $C_1^{(k)} = C_2^{(k)} = 0$. Таким образом, на прямых свободно опертых краях главные члены в разложениях в ряд функций краевого эффекта обращаются в нуль.

Равенства (5.3) представляют собой систему линейных неоднородных алгебраических уравнений для определения четырех постоянных $C_3^{(k)} = C_4^{(k)}$.

В нерезонансном случае (3.11) $w_0^{(2)} \equiv 0$ и решение системы (5.3) имеет вид

$$C_3^{(1)} = C_4^{(2)} \approx \frac{\alpha_0^{(1)}}{4} D^{(1)} r_{43}, \quad C_3^{(2)} = C_4^{(1)} \approx \frac{\alpha_0^{(1)}}{4} D^{(1)} r_{34} \quad (5.4)$$

$$r_{43} = r_4 - r_3 / \sqrt{3}, \quad r_{34} = r_3 - r_4 / \sqrt{3}$$

Из условия разрешимости краевой задачи (5.1) при $k = 1$ после преобразований при учете (2.9), (4.5) и (5.4) получаем

$$\lambda_2 = \frac{1}{3l_0^{(1)}} \left(\frac{4\pi^2}{l_0^{(1)}} + \frac{169}{18} \operatorname{tg} \beta \right) - \frac{7}{6} + \Lambda_2$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{3l_0^{(1)}} \left(\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\pi}{3^{1/4} l_0^{(1)}} - \frac{4}{\sin 2\beta} \right)$$

Следовательно, в нерезонансном случае

$$\lambda \approx \lambda_0^{(1)} + \varepsilon \lambda_1^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_2 \quad (5.5)$$

Отметим, что $\lambda_2 \rightarrow -\infty$ при $\beta \rightarrow 0$, поэтому при малых β точность вычисления λ снижается.

В резонансном случае (3.12)

$$C_3^{(1)} = C_4^{(2)} = \frac{\alpha_0^{(1)}}{4} (D^{(1)} + D^{(2)}) r_{43}, \quad C_3^{(2)} = C_4^{(1)} = \frac{\alpha_0^{(1)}}{4} (D^{(1)} + D^{(2)}) r_{34}$$

и из условий разрешимости краевых задач (5.1) следует, что

$$\lambda_2^{(1)} = \lambda_2 + \Lambda_2 z, \quad \lambda_2^{(2)} = \lambda_2 + \Lambda_2 z^{-1}, \quad z = D^{(2)} / D^{(1)}$$

Предположим, что $\Lambda_2 \sim 1$. Тогда величина z определяется из условия

$$\lambda_0^{(1)} = \varepsilon \lambda_1^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_2^{(1)} = \lambda_0^{(2)} + \varepsilon \lambda_1^{(2)} + \varepsilon^2 \lambda_2^{(2)}$$

которое сводится к квадратному уравнению, имеющему два вещественных корня

$$z_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 + 1} > 0, \quad p = 2\pi\Delta / [3^{3/4} (l_0^{(1)})^2 \Lambda_2]$$

В резонансном случае

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_1^*, & \Lambda_2 < 0 \\ \lambda_1^*, & \Lambda_2 > 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\lambda_k^* = \lambda_0^{(1)} + \varepsilon \lambda_1^{(1)} + \varepsilon^2 (\lambda_2 + \Lambda_2 z_k)$$

причем λ_k^* соответствует форма потери устойчивости с $z = z_k$.

При $\Delta = 0$ в случае $\Lambda_2 < 0$ форма потери устойчивости будет симметричной ($D^{(1)} = D^{(2)}$), а в случае $\Lambda_2 > 0$ — анатисимметричной ($D^{(1)} = -D^{(2)}$). При $\Delta \rightarrow \infty$ формула (5.6) переходит в (5.5), поэтому ее можно использовать и в нерезонансном случае.

Если $\Lambda_2 = O(\varepsilon)$ и, в частности, $\Lambda_2 = 0$, то приближенное значение λ находится по формуле (5.5), а для определения z необходимо построение следующих приближений.

Из формул (2.3), (3.2), (3.9), (4.5) следует, что форму потерю устойчивости можно приближенно представить в виде:

$$w = \begin{cases} w^{(1)}, & x_0^{(1)} \leq x^{(1)} \leq x_*^{(1)} \\ w^{(2)}, & x_*^{(2)} \leq x^{(2)} \leq x_0^{(2)} \end{cases}$$

где

$$w^{(k)} \approx \left[1 + \frac{4is_1^{(k)}}{3} \varphi - \left(\frac{103s_2^{(k)}}{36} - \frac{1}{32} \right) \varphi^2 \right] W_0^{(k)} \exp\left(\frac{Z^{(k)}(\varphi)}{\varepsilon} \right)$$

$$Z^{(k)}(\varphi) = iq_0^{(k)} \varphi \left(1 + \frac{11s_2^{(k)}}{18} \varphi^2 \right) - \frac{t_1^{(k)} \varphi^2}{2} \left[1 + \left(\frac{10s_2^{(k)}}{9} - \frac{1}{48} \right) \varphi^2 \right]$$

$$t_1^{(k)} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\lambda_0^{(k)} \operatorname{tg} \beta}{l_0^{(k)}}}, \quad s_1^{(k)} = \frac{t_1^{(k)}}{q_0^{(k)}}, \quad s_2^{(k)} = (s_1^{(k)})^2$$

Функции $w^{(k)}$ локализованы в окрестности образующей $\varphi = 0$ и быстро осциллируют при изменении φ . В нерезонансном случае $w^{(2)} \ll w^{(1)}$, и следовательно, форма потери устойчивости локализована в окрестности образующей $\varphi = 0$ более длинной первой оболочки.

Собственное значение (5.7) является асимптотически двукратным [3], так как ему соответствуют две вещественные формы колебаний $\operatorname{Re} w$ и $\operatorname{Im} w$. Это означает, что в малой окрестности приближенного значения (5.6) лежат два собственных значения краевой задачи (1.1)–(1.5), разность между которыми составляет $O(\varepsilon^N)$ для любого N .

Аналогичные результаты могут быть получены и при других однородных граничных условиях на прямых краях $x^{(k)} = x_0^{(k)}$ сопряженных оболочек.

Таблица 1

R/h	100	300	500
(0)	1,378	1,378	1,378
(1)	1,654	1,587	1,562
(2)	1,670	1,597	1,570
z^{-1}	106	171	215

Таблица 2

$l_0^{(2)}$	3	4	5
$\beta = 25^\circ$	1,554	1,541	1,221
$\beta = 35^\circ$	1,611	1,602	1,267
$\beta = 45^\circ$	1,670	1,662	1,314
$\beta = 55^\circ$	1,741	1,732	1,371

6. В табл. 1 и 2 приведены результаты расчетов параметра верхнего критического давления λ для сопряженных цилиндрических оболочек с шарнирно опертыми краями.

Табл. 1 иллюстрирует точность различных асимптотических приближений в зависимости от величины R/h для оболочек со следующими значениями параметров: $l_0^{(1)} = 4$, $l_0^{(1)} = 3$, $\beta = 45^\circ$, $\nu = 0,3$. В первой строке приведено нулевое приближение для величины λ , полученное по формуле (3.10). Во второй строке содержатся результаты расчетов по формуле (4.9) при учете первого приближения, а в третьей – результаты расчетов по формуле (5.6) при учете второго приближения. В четвертой строке приведены значения величины $z^{-1} = D^{(1)}/D^{(2)}$.

В табл. 2 при $R/h = 100$, $l_0^{(1)} = 4$ и $\nu = 0,3$ исследуется зависимость λ от длины второй оболочки $l_0^{(2)}$ и угла сопряжения β . С увеличением β критическое давление увеличивается. Более сложный характер имеет зависимость λ от $l_0^{(2)}$. Пока $l_0^{(2)} < l_0^{(1)}$, параметр критической нагрузки практически не меняется, так как он близок к параметру критической нагрузки для первой оболочки с шарнирно опертыми краями. При $l_0^{(2)} < l_0^{(1)}$ параметр λ уменьшается с увеличением $l_0^{(2)}$.

Для умеренно тонких оболочек ($R/h < 200$) расчет на устойчивость следует дополнить расчетом напряженно-деформированного состояния, так как максимальное напряжение в окрестности линии сопряжения оболочек может достигнуть предельного значения раньше, чем произойдет потеря устойчивости. Напряжения можно определить с помощью метода разделения напряженно-деформированного состояния на безмоментное и простой краевой эффект [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Товстик П.Е. Влияние граничных условий на устойчивость цилиндрических оболочек // Вестник ЛГУ. Сер. матем., механ., астрон. 1989. Вып. 3. С. 66–71.
2. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 360
3. Товстик П.Е. Некоторые задачи устойчивости цилиндрических и конических оболочек // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 815–822.
4. Мальков В.М. Изгиб из плоскости симметрии и кручение пересекающихся цилиндрических оболочек // Расчет пространственных конструкций. М.: Стройиздат, 1969. Вып. 12. С. 112–118.