

УДК 532.5

© 1995 г. Н.Н. Бобков, Ю.П. Гупало

МОДЕЛЬ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В ПСЕВДООЖИЖЕННОМ СЛОЕ

Рассматривается стационарная плоская задача о возмущенном движении фаз псевдоожигенного слоя, порождаемом всплывающим или погружающимся образованием из "слипшихся" пузыря и сгустка частиц круглой формы. Агломерат подобного типа может служить моделью взаимодействия локальных неоднородностей слоя с различной средней плотностью дисперсной фазы, а также моделью переноса твердых частиц в кильватерной зоне пузырей в псевдоожигенном слое. Построены поля скоростей и давлений жидкой и твердой фаз во всей области течения. Исследованы условия возникновения циркуляционных режимов течения жидкой фазы вне агломерата и внутри пузыря. Приведены оценки скорости движения агломерата в слое методом Дэвиса–Тейлора.

Из опыта известно, что взаимодействия неоднородностей распределения твердой фазы с разной концентрацией частиц могут значительно искажать картину относительного движения газа (жидкости) и частиц в неоднородных псевдоожигенных системах. Например, наблюдалось [1] нисходящее движение пузырей, увлекаемых к основанию слоя прилипшим снизу плотным сгустком, так называемой "бородой" из частиц. В промышленных аппаратах с псевдоожигенным слоем перенос частиц большими пузырями может приводить к макроциркуляциям дисперсной фазы и значительным динамическим воздействиям на внутренние элементы конструкции установок [2–4].

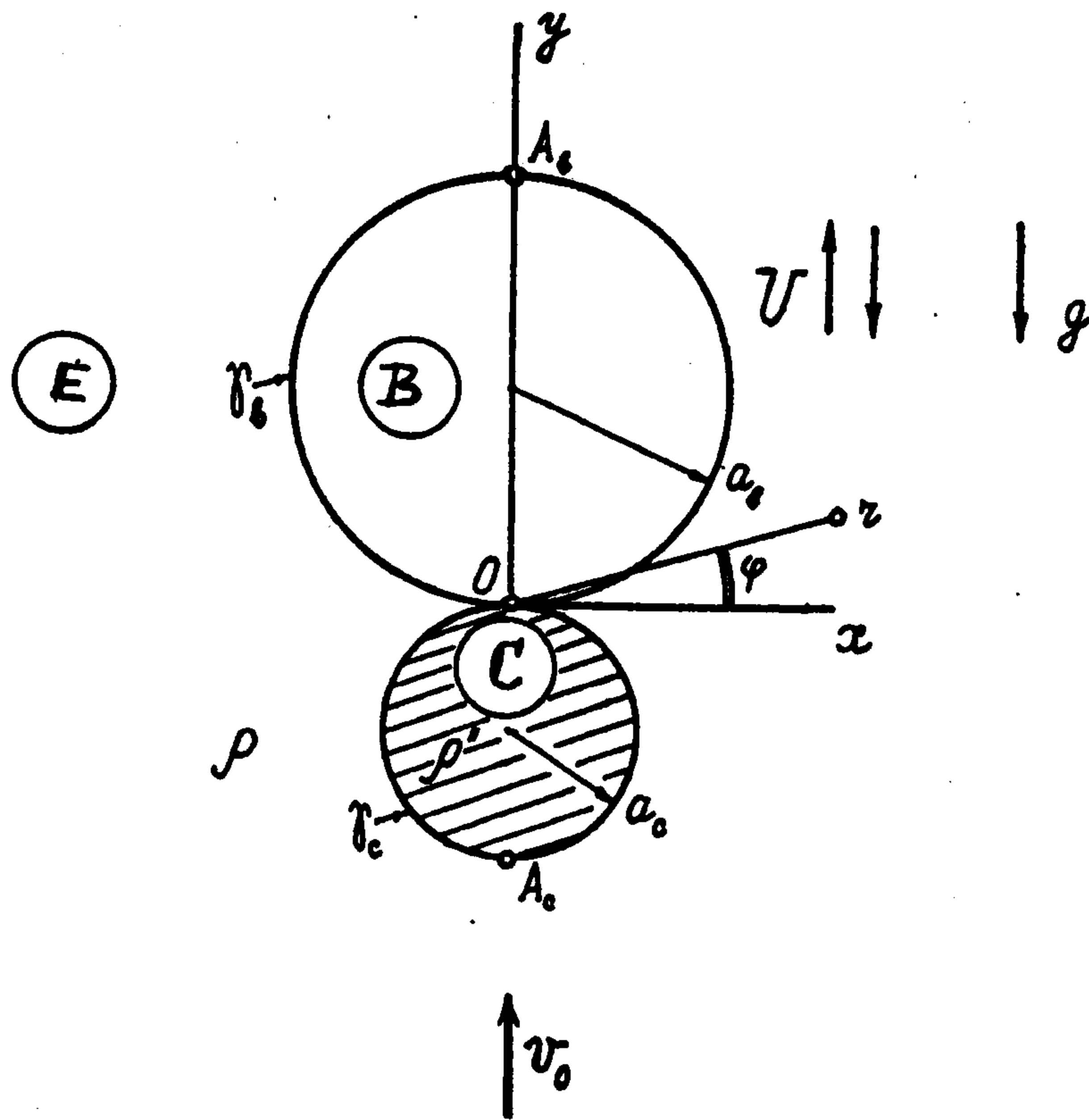
Описанные гидродинамические эффекты порождают в свою очередь возмущения концентрационных и тепловых полей, анализ которых является важным элементом проблемы повышения эффективности процессов в аппаратах с псевдоожигенным слоем.

Известен ряд работ ([5–11] и др.), посвященных вопросам гидродинамического взаимодействия пузырей в псевдоожигенном слое. Рассматриваются как парные взаимодействия [8–11], так и более сложные системы пузырей – их горизонтальные или вертикальные цепочки [5–7]. При этом анализ ограничен построением внешних по отношению к пузырям полей течения и давлений фаз.

В предлагаемой работе модель парного взаимодействия неоднородностей обобщается на случай ненулевой концентрации частиц в одной из них.

1. Постановка задачи. Исходные уравнения и граничные условия. В рамках механики сплошных сред псевдоожигенный слой отождествляется с двойным континуумом, а ожигающий агент и твердые частицы – с взаимопроникающими взаимодействующими сплошными средами – фазами слоя, которые моделируются как идеальные жидкости. При этом вязкое взаимодействие газа и частиц на микроуровне описывается в осредненных уравнениях движения фаз как массовая сила межфазного трения. Ограничимся случаем, когда плотность ожигающего агента d_f мала по сравнению с плотностью дисперсных частиц d_s : $d_f / d_s \ll 1$.

Форма агломерата изображена на фиг. 1, где a_b и a_c – радиусы пузыря и сгустка частиц, соответственно. Агломерат движется с установившейся скоростью U (в лабораторной системе) в однородном неограниченном псевдоожигенном слое, находящемся в поле силы тяжести с ускорением g . Основная инерционная система координат



Фиг. 1

$S_1: \{O, r, \varphi\}$ имеет начало в точке "слипания" пузыря и пакета. Помимо нее при анализе картины течений внутри агломерата используются системы S_2 и S_3 , получающиеся параллельным переносом S_1 в центр сгустка и пузыря соответственно.

Предположим, что распределение дисперсной фазы внутри пакета пространственно однородно и ограничимся случаем, когда относительное движение частиц в нем отсутствует.

Разобьем всю область течения на три подобласти: внешность агломерата (E), внутренность пузыря (B) и внутренность сгустка частиц (C). Запишем уравнения движения и неразрывности для фаз псевдооживленного слоя в указанных областях в приближении безынерционной жидкой фазы

($d_z = 0$) и в предположении линейности силы межфазного трения по скорости относительного движения фаз:

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = -k(\varepsilon)\nabla p_f, \quad d_s \rho (\mathbf{w} \nabla) \mathbf{w} = -\nabla(p_f + p_s) + d_s \rho \mathbf{g} \quad (1.1)$$

$$\nabla \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \mathbf{w} = 0$$

$$\nabla p'_f = 0 \rightarrow p'_f = p'_{fb}(t), \quad \nabla \mathbf{v}' = 0 \quad (1.2)$$

$$\mathbf{v}'' - \mathbf{w}'' = -k''(\varepsilon'')\nabla p''_f$$

$$\nabla(p''_f + p''_s) = d_s \rho'' \mathbf{g} \quad (\mathbf{w}'' = 0), \quad \nabla \mathbf{v}'' = 0 \quad (1.3)$$

Здесь \mathbf{v} , \mathbf{w} ; p_f , p_s ; ε , ρ – скорости, давления и объемные концентрации жидкой и твердой фаз соответственно, $\varepsilon + \rho = 1$; $k(\varepsilon)$ – коэффициент проницаемости слоя; $p'_{fb}(t)$ – давление жидкой фазы внутри пузыря, постоянное в области B в каждый момент времени t ; штрихом (двумя штрихами) отмечены параметры течения внутри пузыря (сгустка).

Из второго уравнения (1.1) следует, что движение твердой фазы вне агломерата представляет собой течение идеальной жидкости с давлением $p_\Sigma = p_f + p_s$, предполагаемое потенциальным.

Обозначим границы пузыря и сгустка γ_b , γ_c и сформулируем краевые условия, которым должны удовлетворять на них поля \mathbf{v} , \mathbf{w} , p_f , p_s :

$$\gamma_b: \quad \varepsilon v_n = v'_n, \quad w_n = 0, \quad p_f = p'_{fb}(t), \quad p_s = 0 \quad (1.4)$$

$$\gamma_c: \quad \varepsilon v_n = \varepsilon'' v''_n, \quad w_n = 0, \quad p_f + p_s = p''_f + p''_s \quad (1.5)$$

где индексом n отмечены компоненты скоростей фаз, нормальные к соответствующим границам (нормаль внешняя).

Как обычно, к этим условиям добавляется условие квазиоднородности слоя вдали от агломерата

$$\left. \frac{\partial p_f}{\partial y} \right|_\infty = -J = -\frac{v_0}{k(\varepsilon)} = -d_1 \rho g \quad (1.6)$$

где $y = r \sin \varphi$ – вертикальная декартова координата, v_0 – скорость псевдооживления,

$g = |g|$, а также требование ограниченности скоростей фаз во всей области течения и однородности их потоков на бесконечном удалении от агломерата

$$w|_{\infty} = \pm U i_g, \quad v|_{\infty} = (\pm U - v_0) i_g, \quad i_g = \frac{g}{g} \quad (1.7)$$

Здесь и далее при отсутствии оговорок верхний (нижний) знак соответствует всплыванию (погружению) агломерата.

Приведем исходные уравнения, граничные условия и условия на бесконечности к безразмерному виду, приняв в качестве масштабов: длины – произвольный параметр l , характеризующий размер агломерата; давления жидкой фазы – величину Jl ; давления твердой фазы – величину $p_{s\infty}$ постоянного давления в ней в квазиоднородном слое вдали от агломерата; скорости – скорость U его установившегося движения в слое.

Безразмерные уравнения (1.1)–(1.3) имеют вид:

$$v - w = -\delta^{-1} \nabla p_f, \quad \text{Fr}(w \nabla) w = -\nabla(p_f + \sigma p_s) + i_g \quad (1.8)$$

$$\nabla v = 0, \quad \nabla w = 0$$

$$\nabla p'_f = 0 \rightarrow p'_f = 0, \quad \nabla v' = 0 \quad (1.9)$$

$$v'' = -\frac{k''(\varepsilon'')}{k(\varepsilon)} \delta^{-1} \nabla p''_f, \quad \nabla(p''_f + \sigma p''_s) = \frac{\rho''}{\rho} i_g \quad (1.10)$$

$$\nabla v'' = 0$$

$$\left(\delta = \frac{U}{v_0}, \quad \sigma = \frac{p_{s\infty}}{Jl}, \quad \text{Fr} = \frac{U^2}{gl} \right)$$

Давление жидкой фазы отсчитывается от величины $p'_{fb}(t)$, так что третье краевое условие (1.4) заменяется условием $p_f = 0$.

Далее, третье граничное условие (1.5) и условия на бесконечности (1.6), (1.7) приобретают безразмерную форму $p_f + \sigma p_s = p''_f + \sigma p''_s$ и соответственно

$$\frac{\partial p_f}{\partial y}|_{\infty} = -1 \quad (1.11)$$

$$w|_{\infty} = \pm i_g, \quad v|_{\infty} = (\pm 1 - \delta^{-1}) i_g \quad (1.12)$$

а остальные условия (1.4), (1.5) сохраняют прежний вид.

2. Поле течения твердой фазы и распределение давления ожижающего агента. Построим потенциальное скоростное поле w в области E вне агломерата. Комплексный потенциал обтекания идеальной жидкостью плоского контура рассматриваемой формы отыскивается методом конформного отображения на единичный круг [12].

Искомое отображение, сохраняющее ориентацию осей координат, таково:

$$z_1(z) = -iz_{10} \frac{z_{10} z_{11}(z) - z_{10}^{-1}}{z_{10} z_{11}(z) - z_{10}}, \quad z_1(\infty) = \infty \quad (2.1)$$

$$z_{10} = \exp \frac{ia}{a_b}, \quad z_{11}(z) = \exp \frac{2a}{z}, \quad a = \frac{\pi a_b a_c}{a_b + a_c}, \quad z = re^{i\varphi}$$

В качестве аналога комплексного потенциала течения в плоскости z_1 рассмотрим характеристическую функцию обтекания единичного круга однородным в бесконечности потоком идеальной жидкости с единичной скоростью в отрицательном (положительном) направлении вертикальной оси. Имеем

$$W(z_1) = \pm i \left(z_1 - \frac{1}{z_1} \right) \quad (2.2)$$

Комплексный потенциал $W_s(z)$ обтекания границы $\gamma_b \cup \gamma_c$ неоднородности отличается от функции $W(z_1(z))$ лишь множителем, обеспечивающим удовлетворение первого условия на бесконечности (1.12). Комбинируя соотношения (2.1), (2.2) с учетом сказанного, получаем

$$W_s(z) = \pm a \left(\sin \frac{a}{a_b} \right)^{-1} \left[\zeta(z) + \frac{1}{\zeta(z)} \right], \quad \zeta(z) = \operatorname{sh} \left(\frac{a}{z} + i \frac{a}{a_b} \right) \left(\operatorname{sh} \frac{a}{z} \right)^{-1} \quad (2.3)$$

Отделяя в формуле (2.3) мнимую часть, находим функцию тока твердой фазы в области E

$$\operatorname{Im} W_s(z) = \psi_s(r, \varphi) = \pm \frac{a \operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u - \cos v} \frac{\cos v - \cos(2a/a_b - v)}{\operatorname{ch} u - \cos(2a/a_b - v)} \quad (2.4)$$

$$u = \frac{2a \cos \varphi}{r}, \quad v = \frac{2a \sin \varphi}{r}$$

В предельных случаях $a_c \rightarrow 0$ или $a_b \rightarrow 0$ выражения (2.3), (2.4) описывают комплексный потенциал и функцию тока обтекания одиночных кругов радиусов a_b и a_c с центрами в точках $ia_b, -ia_c$ соответственно.

Распределение давления жидкой фазы в области E строится методом, аналогичным использованному ранее [13]. Как это следует из уравнений (1.8)–(1.10), функция p_f – гармоническая во всей области течения. В силу единственности решения внешней задачи Дирихле $\Delta p_f = 0$, $p_f|_{\gamma_b} = 0$ распределение давления жидкой фазы вне агломерата – в точности то же, что и в задаче о движении в слое одиночного круглого пузыря радиуса a_b .

Рассмотрим аналитическую функцию $\Phi(z) = p_f^* + ip_f$, где p_f^* – функция, гармонически сопряженная с p_f . отождествим $\Phi(z)$ с комплексным потенциалом обтекания контура пузыря (на этом контуре, являющемся "линией тока", $\operatorname{Im} \Phi(z) = p_f = 0$ в соответствии с третьим краевым условием (1.4) на γ_b) потоком идеальной жидкости, антипараллельным действительной оси, поскольку, как это следует из условия (1.4), на удалении от агломерата должно удовлетворяться соотношение

$$d\Phi / dz|_{\infty} = \partial p_f / \partial y|_{\infty} = -1$$

Отображая полость пузыря на единичный круг аналогично тому, как это сделано выше, получаем

$$\Phi(z) = - \left(z - ia_b + \frac{a_b^2}{z - ia_b} \right) \quad (2.5)$$

откуда следует, что искомое распределение давления жидкой фазы в области E имеет вид

$$p_f(r, \varphi) = -(r \sin \varphi - a_b) \left(1 - \frac{a_b^2}{r^2 - 2a_b r \sin \varphi + a_b^2} \right) \quad (2.6)$$

Гармонически сопряженная с p_f функция определяется выражением

$$p_f^*(r, \varphi) = \operatorname{Re} \Phi(z) = -r \cos \varphi \left(1 + \frac{a_b^2}{r^2 - 2a_b r \sin \varphi + a_b^2} \right) \quad (2.7)$$

Отметим, что среди краевых условий (1.5) отсутствует условие баланса нормальных напряжений в жидкой фазе на границе пакета, которое в безынерционном приближении сводится к непрерывности давления p_f на γ_c . Это условие рассматривалось ранее [14, 15] при анализе движения одиночных неоднородностей (пакетов

частиц с различной их концентрацией) в псевдооживленном слое. Будучи непротиворечивым в простых случаях, оно уже несовместно с допущениями относительно свойств и движений фаз, приведшими к системе уравнений движения и неразрывности (1.8)–(1.10) в рассматриваемой здесь более сложной модели взаимодействия неоднородностей.

Действительно, с привлечением соотношений (2.4) и (2.6), дающих поле скорости твердой фазы и давления жидкости вне агломерата, поле скорости жидкой фазы в области E строится однозначно (первое уравнение (1.8)). Если принять допущение $p_f = p_f''$ на γ_c , получим, что и внутри пакета поле давления жидкой фазы описывается выражением (2.6). Тогда из первого уравнения (1.10) скорость жидкости в области S также находится однозначно, и невозможно удовлетворить естественному условию сохранения потока жидкой фазы через разрыв γ_c (первое граничное условие (1.5)).

Дело в том, что система краевых условий (1.4), (1.5) с включением упомянутого выше условия непрерывности p_f на γ_c , записанная в приближении $d_f = 0$, не учитывает инерционных эффектов на разрывах концентрации твердой фазы. Между тем известно [16, 17], что подобные эффекты даже в разреженных системах значительно влияют на структуру потоков.

Чтобы косвенно учесть указанные эффекты, допустим, что на границе сгустка γ_c формируется переходный слой (толщина его пренебрежимо мала в сравнении с размером агломерата), в котором инерционные члены в уравнениях движения жидкой фазы доминируют. При этом решение в переходном слое, которое может быть получено методами, предложенными в [18], "сшивает" распределения давления p_f и p_f'' , так что без учета переходного слоя поле p_f разрывно на границе сгустка.

Гармоническая функция p_f'' , не связанная теперь условием непрерывности на γ_c , отыскивается в результате решения задачи Неймана с граничным условием

$$\gamma_c: \frac{\partial p_f''}{\partial n} = -\frac{k\delta}{k''} v_n'' = -\frac{k\epsilon\delta}{k''\epsilon''} v_n = \frac{\epsilon k}{\epsilon'' k''} \frac{\partial p_f}{\partial n}$$

так как на границе пакета $v_n = -\delta^{-1}(\partial p_f / \partial n)$ в силу ее непроницаемости для дисперсной фазы: $w_n|_{\gamma_c} = 0$. При этом критерий разрешимости задачи Неймана [19], имеющий вид

$$\oint_{\gamma_c} v_n'' dl = \oint_{\gamma_a} v_n dl = 0$$

выполнен, так как он имеет простой физический смысл отсутствия источников и стоков жидкой фазы в области E .

Распределение p_f'' удобно получить сначала в системе S_2 , поскольку в ней уравнение границы пакета имеет наиболее простой вид $\gamma_c: r = a_c$, так что $\partial/\partial n = \partial/\partial r$. Сдвигая начало координат в центр сгустка и используя выражение (2.6), получаем

$$\left. \frac{\partial p_f''}{\partial n} \right|_{\gamma_c} = -\chi(\varphi), \quad \chi(\varphi) = \sin \varphi + \lambda^2 \frac{[(\lambda+1)^2 + 1] \sin \varphi - 2(\lambda+1)}{[(\lambda+1)^2 - 2(\lambda+1) \sin \varphi + 1]^2}, \quad \lambda = \frac{a_b}{a_c} \quad (2.8)$$

Гармоническая функция p_f'' восстанавливается теперь с точностью до постоянной при помощи интеграла Дини [20]

$$\begin{aligned} p_f''(r, \varphi) &= -\frac{a_c}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left. \frac{\partial p_f''}{\partial n} \right|_{\gamma_c} \ln|z_1 - z| dt = \\ &= \frac{a_c}{2\pi} \frac{\epsilon k}{\epsilon'' k''} \int_{-\pi}^{\pi} \chi(t) \ln[r^2 + a_c^2 - 2ra_c \cos(\varphi - t)] dt \end{aligned} \quad (2.9)$$

($z_1 = a_c e^{it}$, причем для новых переменных сохранены прежние обозначения).

Возвращаясь к исходной системе отсчета S_1 , запишем распределение давления жидкой фазы внутри сгустка в виде

$$p_f''(r, \varphi) = \frac{a_c}{2\pi} \frac{\varepsilon k}{\varepsilon'' k''} \int_{-\pi}^{\pi} \chi(t) \ln[r^2 + 2ra_c \sin \varphi + 2a_c^2 - 2ra_c \cos(\varphi - t) - 2a_c^2 \sin t] dt \quad (2.10)$$

3. Поле течения жидкой фазы. На основании полученных в разд. 2 результатов и исходных уравнений (1.8)–(1.10), построим поля v, v', v'' . Именно они определяют структуру возмущенного газового потока в окрестности агломерата и локальные характеристики процессов тепло- и массообмена в жидкой фазе.

Течение ожигающего агента вне агломерата. Из первого и двух последних уравнений (1.8) следует, что функции тока фаз связаны в области E соотношением $\Psi_f = \Psi_s + \delta^{-1} p_f^*$. Поэтому на основании выражений (2.4), (2.5) получаем

$$\Psi_f(r, \varphi) = \pm \frac{a \operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u - \cos v} \frac{\cos v - \cos(2a/a_b - v)}{\operatorname{ch} u - \cos(2a/a_b - v)} - \delta^{-1} r \cos \varphi \left(1 + \frac{a_b^2}{r^2 - 2ra_b \sin \varphi + a_b^2} \right) \quad (3.1)$$

Анализ этого соотношения показывает, что, как и в более простых моделях [13, 14], в окрестности взаимодействующих пузыря и сгустка возможно образование так называемого "облака" – области замкнутой циркуляции ожигающего агента, граница которой непроницаема для жидкой фазы и представляет собой зону повышенного сопротивления массопереносу в слое. Облако образуется вокруг достаточно быстро всплывающих агломератов, т.е. когда выполнено неравенство $v_0 < U < +\infty$ ($1 < \delta < +\infty$). Если скорость всплывания неоднородности меньше скорости псевдоожигания: $U < v_0$, или в случае, когда она погружается, область замкнутой циркуляции, охватывающая агломерат, не образуется.

Граница облака задается уравнением

$$\frac{a \operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u - \cos v} \frac{\cos v - \cos(2a/a_b - v)}{\operatorname{ch} u - \cos(2a/a_b - v)} - \delta^{-1} r \cos \varphi \left(1 + \frac{a_b^2}{r^2 - 2ra_b \sin \varphi + a_b^2} \right) = 0 \quad (3.2)$$

При $U = v_0$ ($\delta = 1$) облако занимает всю область E , при бóльших скоростях всплывания его граница расположена ближе к поверхности $\gamma_b \cup \gamma_c$ агломерата, с которой она совпадает при $U \gg v_0$ ($\delta \rightarrow +\infty$).

В другом предельном случае $a_c \rightarrow 0$ из формулы (3.2) следует (после перехода в систему отсчета S_3)

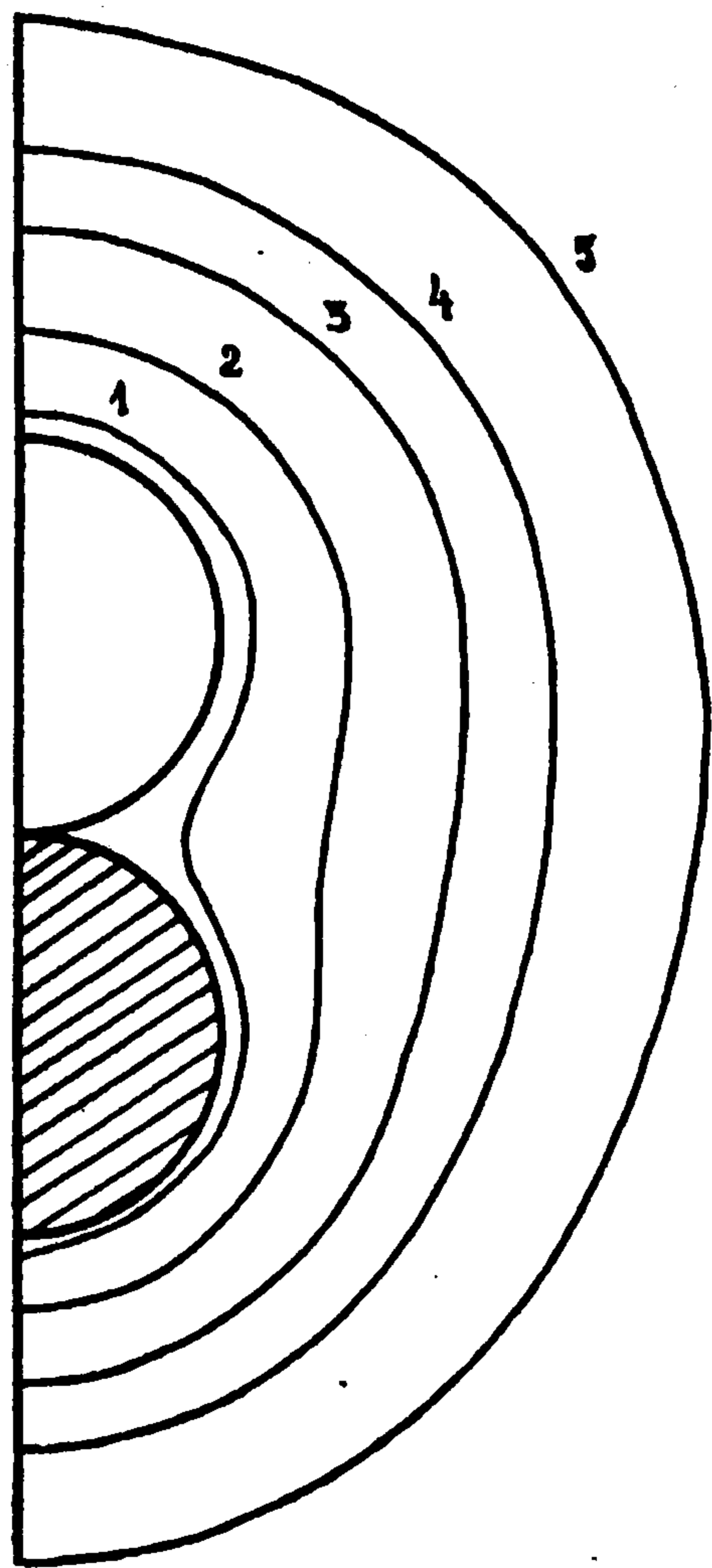
$$r(\delta) = a_b \left(\frac{\delta + 1}{\delta - 1} \right)^{1/2}$$

что представляет собой известный результат Дэвидсона [21] для радиуса облака вокруг одиночного круглого пузыря радиуса a_b .

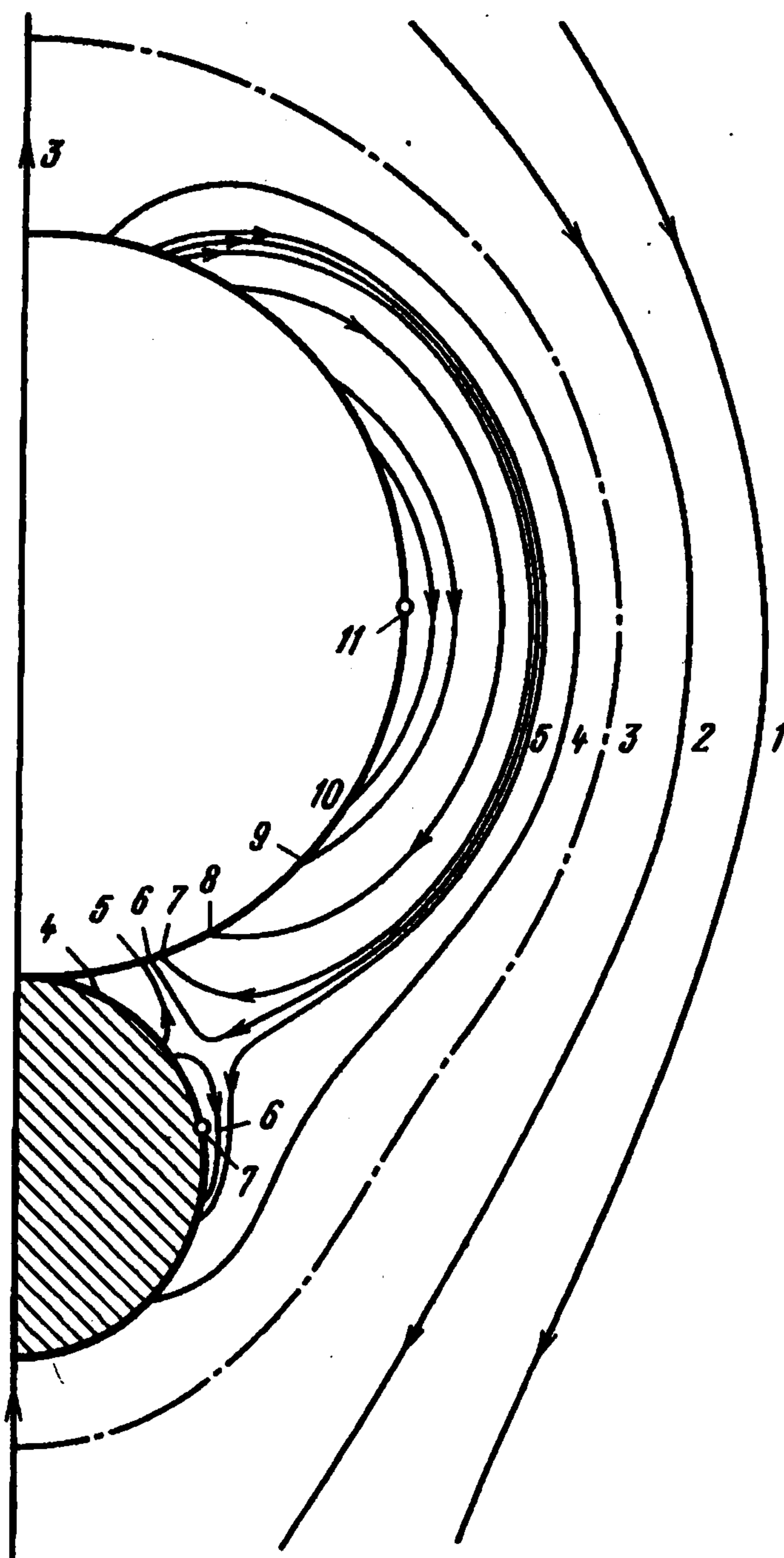
На фиг. 2 представлено изменение конфигурации облака в зависимости от скорости всплывания агломерата для случая $a_b = a_c = 1$ (кривым 1–5 соответствуют значения $\delta^{-1} = 0,1; 0,4; 0,6; 0,7; 0,8$).

Картина линий тока жидкой фазы в области E , описываемая функцией тока (3.1), изображена на фиг. 3–5 для сгустка радиусом $a_c = 1$ при радиусе пузыря $a_b = 2$ (фиг. 3), $a_b = 1$ (фиг. 4), $a_b = 1/3$ (фиг. 5) в трех режимах течения: быстрое всплывание ($\delta^{-1} = 0,4$), медленное всплывание ($\delta^{-1} = 1,1$) и погружение ($\delta^{-1} = 0,5$).

Значение функции тока в соответствии с ростом номера кривой на фиг. 3–5 таковы: $\Psi_f = 0,8; 0,4; 0$ (граница облака); $-0,3; -0,5; -0,53; -0,57; -0,8; -1,2; -1,4; -1,6$ (фиг. 3);



Фиг. 2



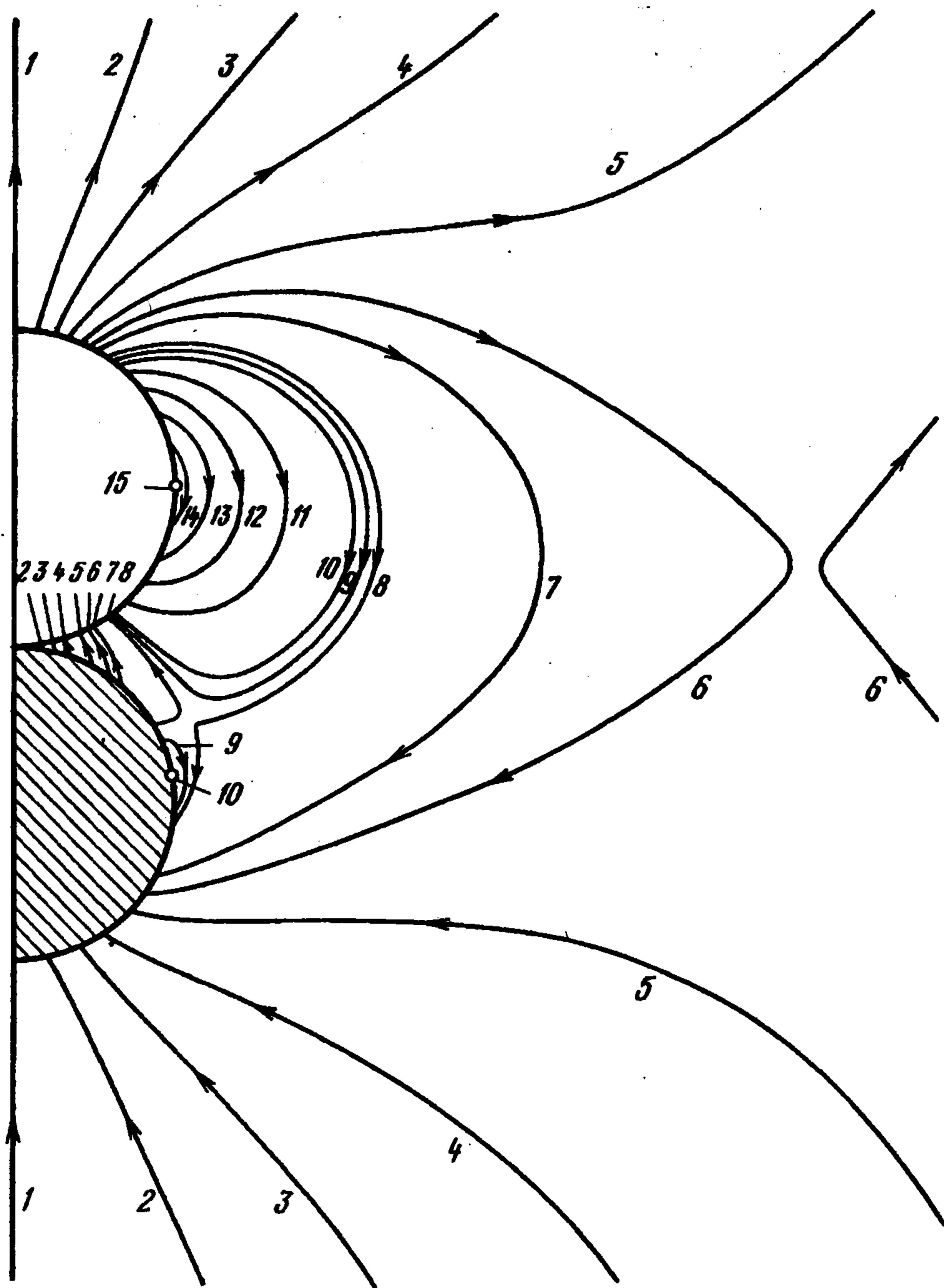
Фиг. 3

$\psi_f = 0; -0,3; -0,5; -0,7; -0,9; -1,03; -1,1; -1,28; -1,3; -1,33; -1,5; -1,7; -1,9; -2,1; -2,2$ (фиг. 4);

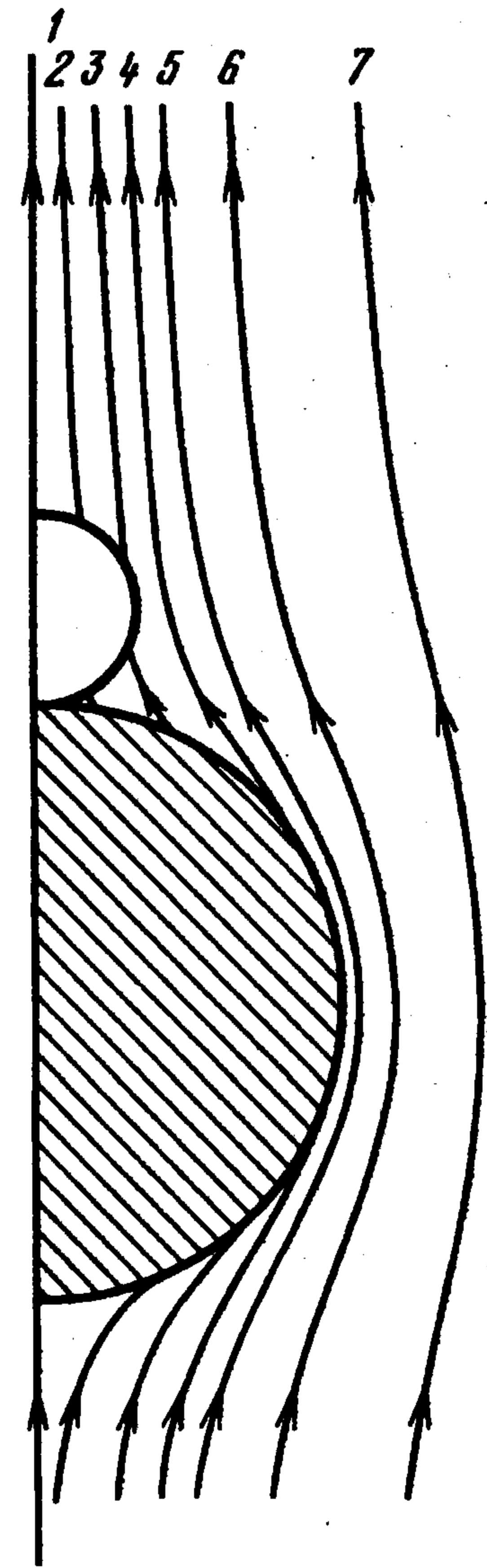
$\psi_f = 0; -0,15; -0,3; -0,45; -0,6; -0,9; -1,5$ (фиг. 5).

Как видно, характерной особенностью режимов всплывания является наличие замыканий потока жидкой фазы на поверхности пузыря и пакета. Однако в случае быстрого всплывания ($0 < \delta^{-1} < 1$) возмущения указанного вида локализованы внутри границы области замкнутой циркуляции, вне пределов которой геометрия линий тока соответствует обтеканию облака, как ядра с твердой границей, задаваемой выражением (3.2). В предельном случае $U \gg v_0$, когда границы облака и агломерата совпадают, описанные замыкания не оказывают влияния на перенос реагентов от неоднородности к прилегающим участкам слоя. Медленно всплывающие агломераты значительно возмущают однородный поток жидкой фазы, и в газообмен с неоднородностью вовлечены большие области слоя, примыкающие к ее границе.

Отметим, что, как и в случае взаимодействующих пузырей [8], в рассматриваемой модели имеется поток оживающего агента, связывающий взаимодействующие пузырь и ступок. Он сосредоточен отчасти в окрестности точки смыкания их границ, а также (в режимах всплывания) в окрестностях верхней и нижней конечностей агломерата.



Фиг. 4



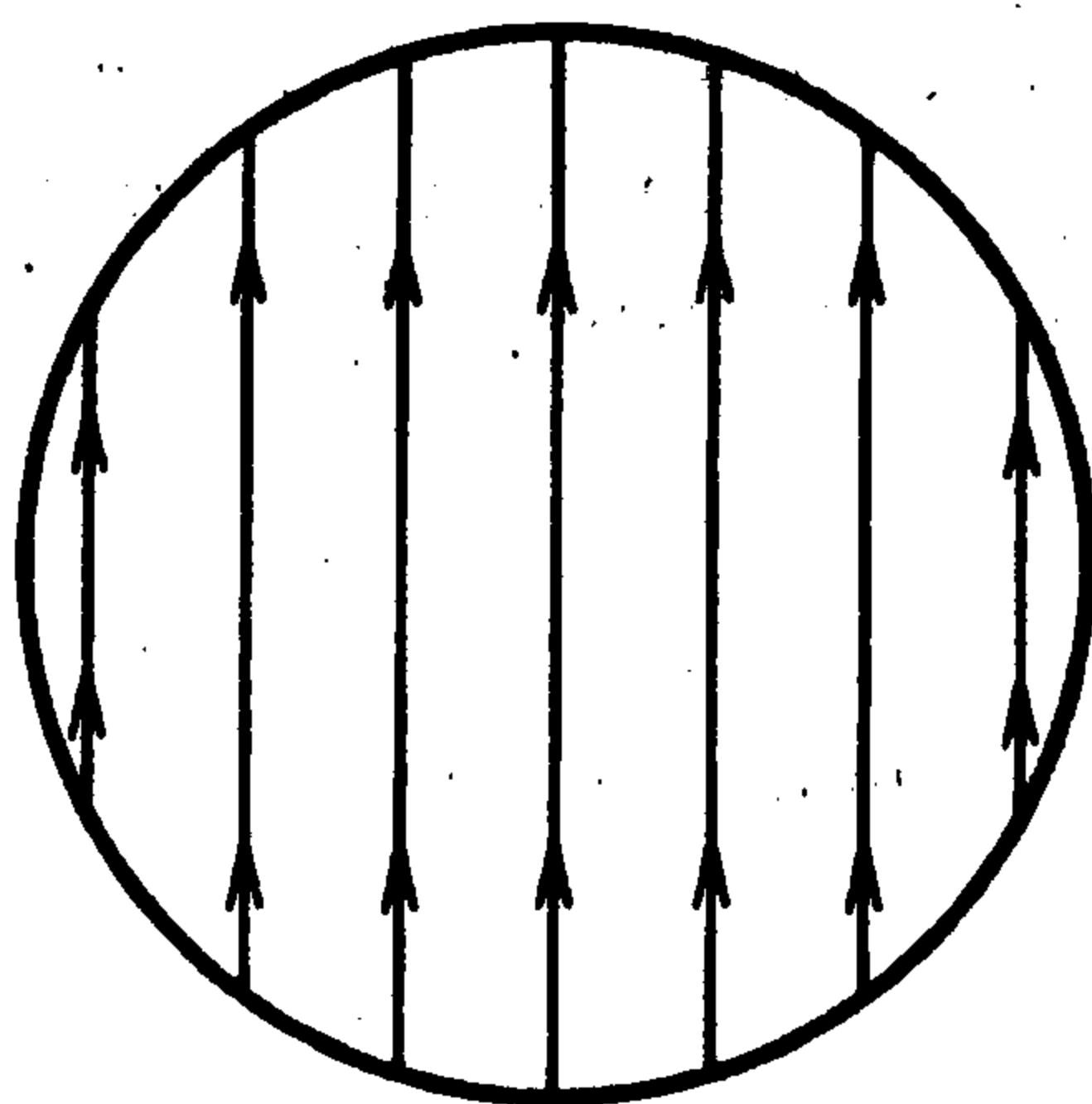
Фиг. 5

Погружающиеся неоднородности, как это явствует из представленных на фиг. 5 результатов, слабо возмущают однородный газовый поток, поддерживающий слой в псевдооживленном состоянии.

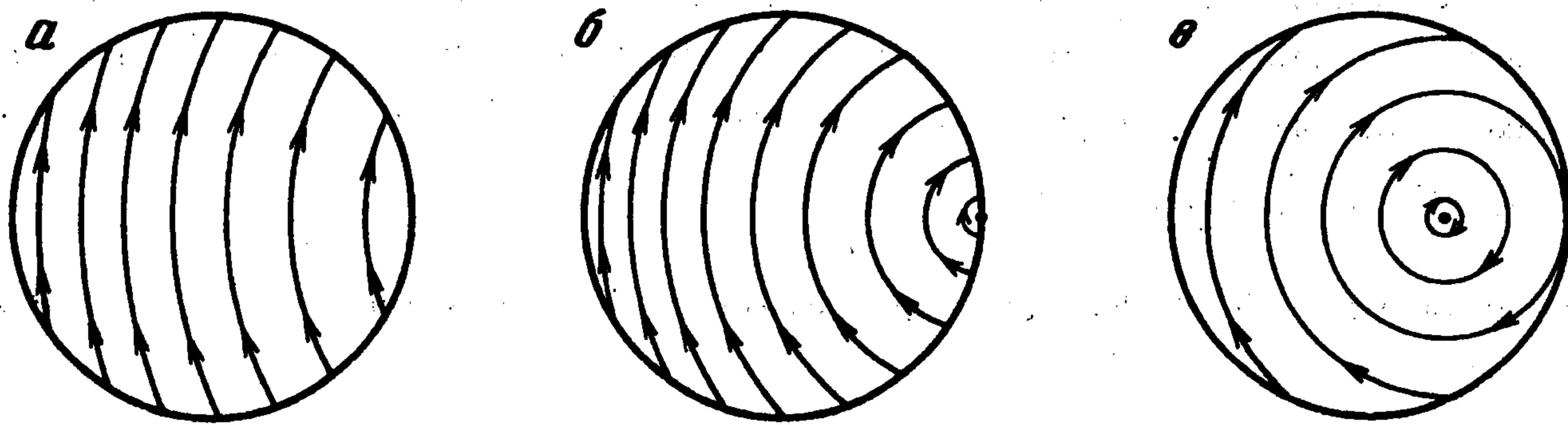
Течение жидкой фазы внутри пузыря. Основным уравнением, описывающим течение газа внутри пузыря, является второе уравнение (1.9). Это уравнение определяет искомое поле течения неоднозначно, что связано с потерей информации о завихренности потока в области B в безынерционном приближении $d_f = 0$. Чтобы и здесь косвенно учесть инерционность жидкой фазы, зададим внутри пузыря $\text{rot } \mathbf{v}' = \mathbf{a}$, где \mathbf{a} – произвольный соленоидальный вектор. После этого, как известно [22], можно однозначно восстановить и сам вектор \mathbf{v}' по его нормальной компоненте $v'_n|_{\gamma_b} = \epsilon v_n|_{\gamma_b}$, отыскиваемой из первого граничного условия (1.4) на основании результата (3.1). Дополнительное условие разрешимости этой задачи $\oint_{\gamma_b} v'_n dl = \iint_B \nabla v'_n ds$ выполнено

ввиду соленоидальности и отсутствия особенностей поля \mathbf{v}' внутри пузыря.

Простейшие соленоидальные векторы, рассматриваемые ниже в качестве \mathbf{a} , суть $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{a} = \text{const}$. Первый случай отвечает безвихревому течению жидкой фазы внутри пузыря, а второй – ее течению с постоянной завихренностью [23] (в обоих случаях скорость жидкой фазы \mathbf{v}' всюду внутри пузыря конечна).



Фиг. 6



Фиг. 7

1°. $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. В этом случае $\mathbf{v}' = \nabla\varphi'_f$, где φ'_f – потенциал течения газа в области B . С учетом того, что поля \mathbf{v} , \mathbf{w} , p_f вне агломерата связаны первым уравнением (1.8) и поле \mathbf{w} удовлетворяет на поверхности пузыря граничному условию $w_n = 0$, для отыскания потенциала φ'_f получаем следующую задачу Неймана:

$$\Delta\varphi'_f = 0, \quad z \in B; \quad \gamma_b: \frac{\partial\varphi'_f}{\partial n} = -\varepsilon\delta^{-1} \frac{\partial p_f}{\partial n} \quad (3.3)$$

Решение задачи (3.3), отыскиваемое при помощи интеграла Дини на основании соотношений (2.5), (2.6) в системе отсчета S_3 с началом в центре пузыря, имеет простой вид

$$\varphi'_f(r, \varphi) = 2\varepsilon\delta^{-1} r \sin \varphi \quad (3.4)$$

Для функции тока жидкой фазы внутри пузыря вследствие (3.4) получаем

$$\psi'_f(r, \varphi) = \varphi'^*_f(r, \varphi) = -2\varepsilon\delta^{-1} r \cos \varphi = -2\varepsilon x \quad (3.5)$$

где $x = r \cos \varphi$ – декартова координата в S_3 .

Таким образом, безвихревое течение жидкой фазы внутри пузыря есть однородный поток со скоростью $2\varepsilon v_0$, пронизывающий пузырь в направлении снизу вверх во всех режимах движения агломерата (см. фиг. 6).

Отметим, что, как и следовало ожидать, вследствие удовлетворения граничному условию сохранения потока жидкой фазы на разрыве γ_b полученное течение топологически совместно с течением газа вне агломерата (при этом функция тока ψ_f разрывна на границе пузыря). Действительно, из соотношения (3.1) явствует, что линии тока внешнего течения, пересекающиеся с γ_b , "протыкают" пузырь в точках, лежащих на вертикальных прямых.

2°. Рассмотрим более сложную модель течения жидкой фазы внутри пузыря, а именно, предположим, что $\text{rot } \mathbf{v}' = \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{a} = -k\Gamma$, где k – единичный вектор, нормаль-

ный к плоскости течения, а Γ – параметр, характеризующий интенсивность вихря в области B . Из основного уравнения $\nabla v' = 0$ теперь следует, что функция тока жидкой фазы внутри пузыря удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta \psi'_f = \Gamma \quad (3.6)$$

Оставаясь в системе отсчета S_3 , введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\Psi(r, \varphi) = \psi'_f(r, \varphi) - \Gamma r^2 / 4$$

Тогда, вследствие того, что $\Delta_{r, \varphi} r^2 = 4$, из уравнения (3.6) получаем

$$\Delta \Psi = 0 \quad (3.7)$$

т.е. Ψ – гармоническая в области B -функция. Далее, записывая условие сохранения потока жидкой фазы на границе пузыря в терминах функции тока ψ'_f , приходим к следующему краевому условию для функции Ψ

$$\gamma_b: \Psi = -2a_b \varepsilon \delta^{-1} \cos \varphi - \Gamma a_b^2 / 4 \quad (3.8)$$

Решение задачи (3.7), (3.8) с соответствующим условием на бесконечности имеет вид

$$\Psi(r, \varphi) = -2\varepsilon \delta^{-1} r \cos \varphi - \Gamma a_b^2 / 4$$

откуда следует соотношение для функции тока

$$\psi'_f(r, \varphi) = \Gamma(r^2 - a_b^2) / 4 - 2\varepsilon \delta^{-1} r \cos \varphi \quad (3.9)$$

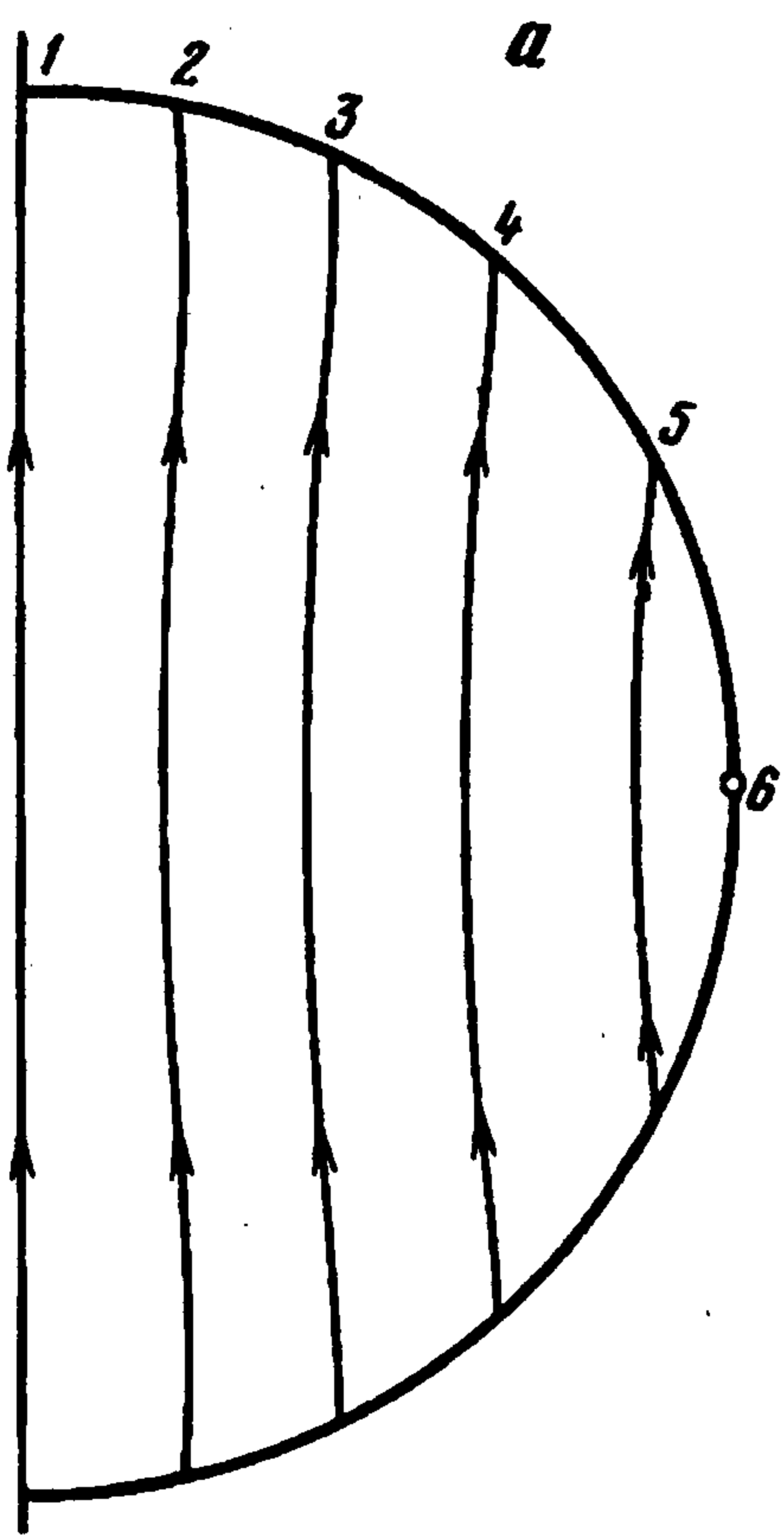
Поскольку в рассматриваемой модели постоянной завихренности поля v' внутри пузыря имеется выделенное направление, определяемое знаком числа Γ , линии тока перестают быть симметричными относительно оси ординат (симметрия относительно оси абсцисс имеется). Они представляют собой дуги концентрических окружностей с центром в точке $(4\varepsilon \delta^{-1} / \Gamma, 0)$ на оси абсцисс.

На фиг. 7 представлена картина течения газа внутри пузыря в случае $\Gamma > 0$ (при $\Gamma < 0$ она зеркально отражается относительно оси ординат) при $a_b = 1$. Если $4\varepsilon \delta^{-1} / \Gamma \geq a_b = 1$ (малая положительная завихренность Γ), линии тока – слабо изогнутые незамкнутые дуги (фиг. 7, а, б). В пределе $\Gamma \rightarrow 0$ получаем картину линий тока безвихревого течения (фиг. 6). Если же масштаб вихря Γ превосходит граничное значение $\Gamma_* = 4\varepsilon \delta^{-1}$, внутри пузыря имеется круговая зона с замкнутыми линиями тока тем большего размера, чем больше Γ (фиг. 7, в). В предельном случае $\Gamma \rightarrow +\infty$ область замкнутой циркуляции заполняет изнутри весь пузырь. Ее радиус задается выражением $a_{cl} = 1 - 4\varepsilon \delta^{-1} / \Gamma$.

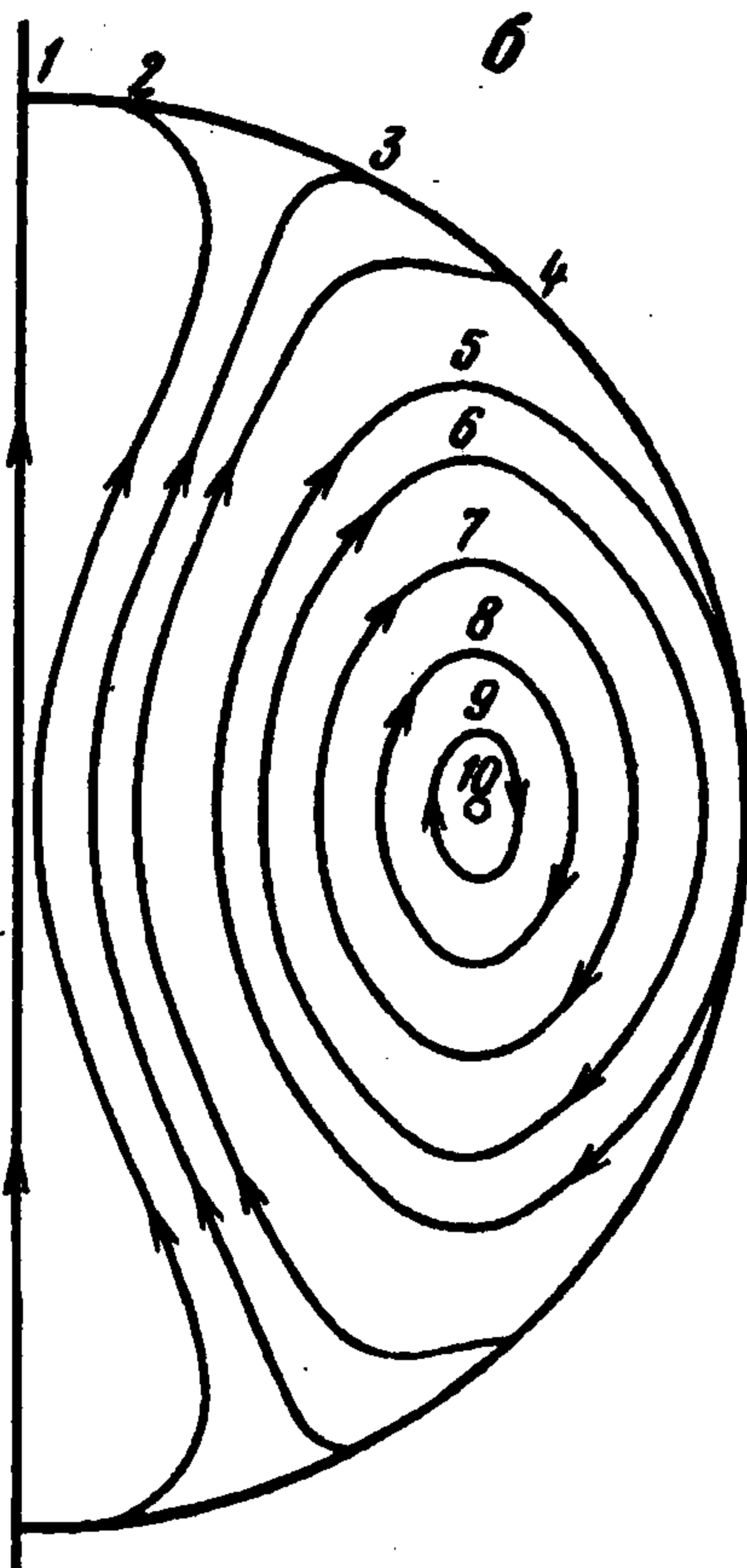
Если параметр Γ фиксирован, то для агломератов со скоростями всплывания $U > 4\varepsilon \nu_0 / \Gamma$ режим течения жидкой фазы в области B проточный, а при $U < 4\varepsilon \nu_0 / \Gamma$ – циркуляционный.

3°. В заключение рассмотрим разрывное распределение в области B завихренности скорости жидкой фазы следующего вида: $\text{rot } v' = -\text{sign}(x)k\Gamma$, причем $\Gamma > 0$, как и в случае 2°. Вспомогательная функция Ψ вводится теперь равенством $\Psi = \psi'_f \pm \Gamma r^2 / 4$, поскольку $\Delta \psi'_f = \pm \Gamma$ (чередование знаков соответствует переходу из правой в левую половину пузыря). Граничные условия для функции Ψ на поверхности пузыря принимают вид

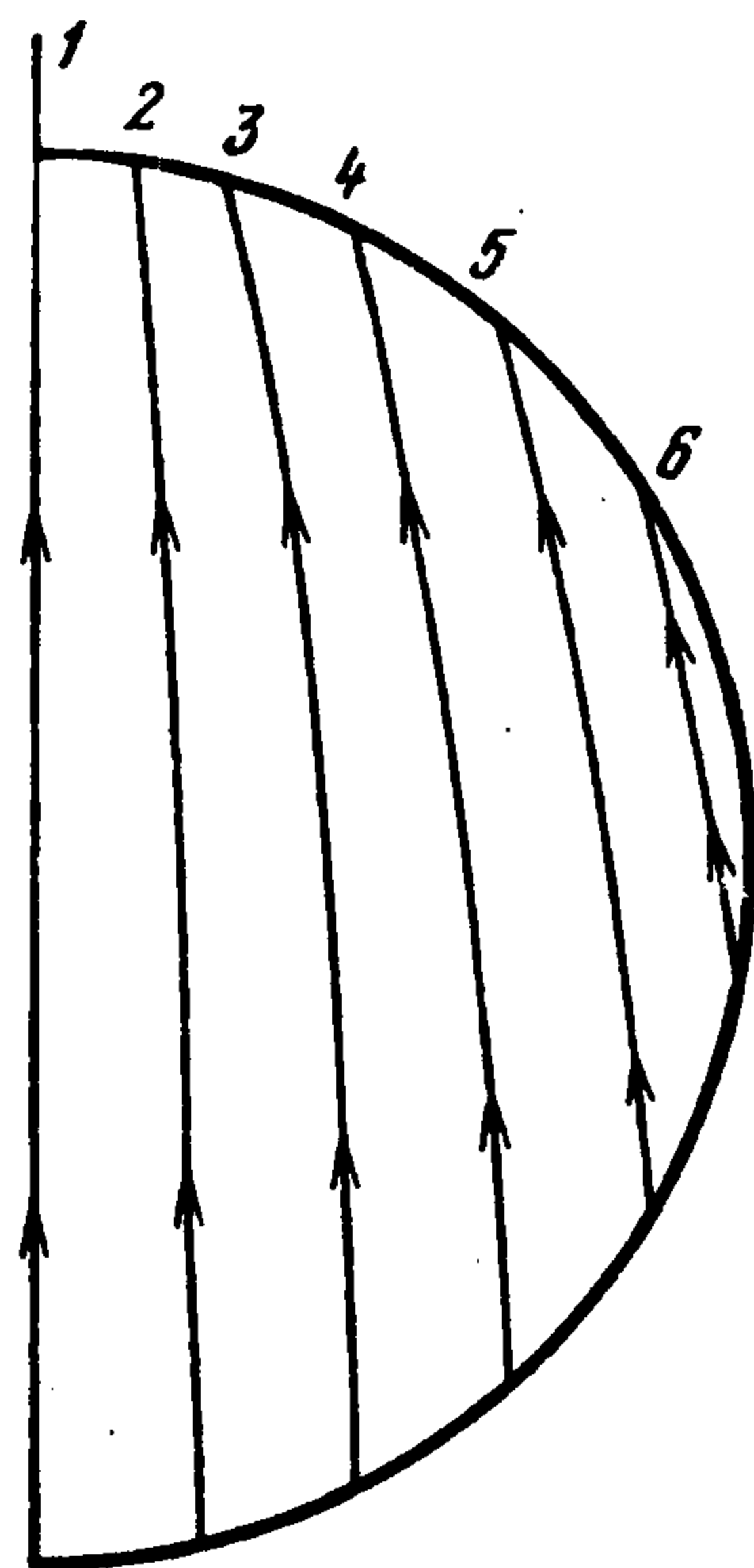
$$\gamma_b: \Psi = -2a_b \varepsilon \delta^{-1} \cos \varphi \mp \Gamma a_b^2 / 4 \quad (3.10)$$



Фиг. 8



Фиг. 9



Решение краевой задачи (3.7), (3.10) с соответствующим условием на бесконечности приводит к следующему выражению для функции тока жидкой фазы:

$$\psi'_f(r, \varphi) = \begin{cases} -2\epsilon\delta^{-1}r \cos \varphi - \frac{\Gamma a_b^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a_b}\right)^{2n+1} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos(2n+1)\varphi \pm \frac{\Gamma}{4} r^2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

причем сходимость ряда здесь может быть ускорена известными методами [20].

Из соотношения (3.11) следует, что картина линий тока ожигающего агента при рассматриваемом распределении завихренности внутри пузыря симметрична относительно осей декартовых координат. Характер зависимости структуры потока от величины параметра Γ аналогичен рассмотренному выше в случае 2°. Критическое значение Γ_* завихренности, разделяющее проточный ($0 < \Gamma \leq \Gamma_*$) и циркуляционный ($\Gamma_* < \Gamma < +\infty$) режим течения газа через пузырь, определяется равенством $\Gamma_* = 4\pi\epsilon\delta^{-1}/(\pi - 1)$.

На фиг. 8, а, б изображены линии тока жидкой фазы в пузыре в этих двух режимах для значения $\epsilon\delta^{-1} = 0,45$. При этом $\Gamma_* \cong 2,64$, величины масштаба завихренности в указанных случаях взяты равными $\Gamma = 0,5$ и 10 соответственно и $a_b = 1$. Значения функции тока на кривых в порядке возрастания таковы: $\psi'_f = 0; -0,2; -0,4; -0,6; -0,8; -0,9$ (фиг. 8, а) и $\psi'_f = 0; -0,1; -0,4; -0,6; -0,9; -1,05; -1,2; -1,3; -1,35; -1,36$ (фиг. 8, б).

Граница области замкнутой циркуляции определяется соотношением (3.11) при $\psi'_f = \mp 2\epsilon\delta^{-1}a_b$. В предельном случае $\Gamma \rightarrow \infty$ симметричные вихри заполняют соответствующие половины пузыря, он становится непроницаемым для внешнего течения и дополнительное сопротивление переносу реагентов в жидкой фазе сосредоточивается на его границе. Предельное положение линии тока, вырождающейся в точку на оси абсцисс, задается уравнением $r^2 + r - 2/\pi = 0$, которое имеет единственный положительный корень $r_{**} \cong 0,51$.

Аналогично тому, как это было сделано в случаях 1°–3°, могут быть рассмотрены и более сложные модели распределения завихренности внутри пузыря, например, конкуренция вихрей Γ_1, Γ_2 при их различной интенсивности и направлении. Значения свободных параметров в моделях такого типа могут быть определены из каких-либо дополнительных условий на границе агломерата (например, некоторых условий непрерывности [23]), связывающих внешнее и внутреннее течения жидкой фазы.

Газовый поток внутри сгустка. Из первого уравнения (1.10) следует, что связь функции тока и давления жидкой фазы в области S выражается соотношением $\psi'_f = -k''k^{-1}\delta^{-1}p''_f^*$. Используя выражение (2.9), находим, что в системе S_2

$$\psi'_f(r, \varphi) = \frac{a_c}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon''} \delta^{-1} I(r, \varphi) \quad (3.12)$$

$$I(r, \varphi) = - \int_{-\pi}^{\pi} \chi(t) \arg(z_1 - z) dt$$

Линии уровня интеграла $I(r, \varphi)$ изображены на фиг. 9 и дают исчерпывающее представление о картине потенциального течения оживающего агента внутри сгустка частиц. Соответствующие значения функции $I(r, \varphi)$ на кривых 1–6 равны 0; –0,78; –1,56; –2,32; –3,06; –3,59.

Безвихревой поток газа в области S , где твердые частицы неподвижны друг относительно друга, характеризуется отсутствием замкнутых линий тока во всех режимах движения агломерата. Могут быть рассмотрены более сложные (и при малых концентрациях ρ'' более реалистичные) модели движения частиц внутри сгустка, в частности подобная рассмотренной выше для пузыря модель движения твердой фазы внутри пакета с постоянной завихренностью. В этих моделях вопрос о возможности замыкания линий тока оживающего агента внутри сгустка требует дополнительного исследования.

4. Распределение давления твердой фазы. Оценка скорости движения агломерата в слое. Исходя из аналогии между псевдооживленным слоем и обычными жидкостями [1–3], будем считать, что направление движения агломерата в слое определяется соотношением архимедовой силы и силы тяжести, действующей на частицы, образующие сгусток и сосредоточенные в области S . Пусть S_b и S_c – площади областей B и C соответственно. Тогда агломерат всплывает (погружается) в слое при выполнении условия

$$(S_b + S_c)\rho \leq \rho'' S_c \quad (4.1)$$

или, что то же, $\rho''/\rho \leq 1 + \lambda^2$. В частных случаях движения пузыря или сгустка соотношение (4.1) остается в силе; равенству правой и левой частей в нем соответствует ситуация равновесия агломерата в псевдооживленной системе.

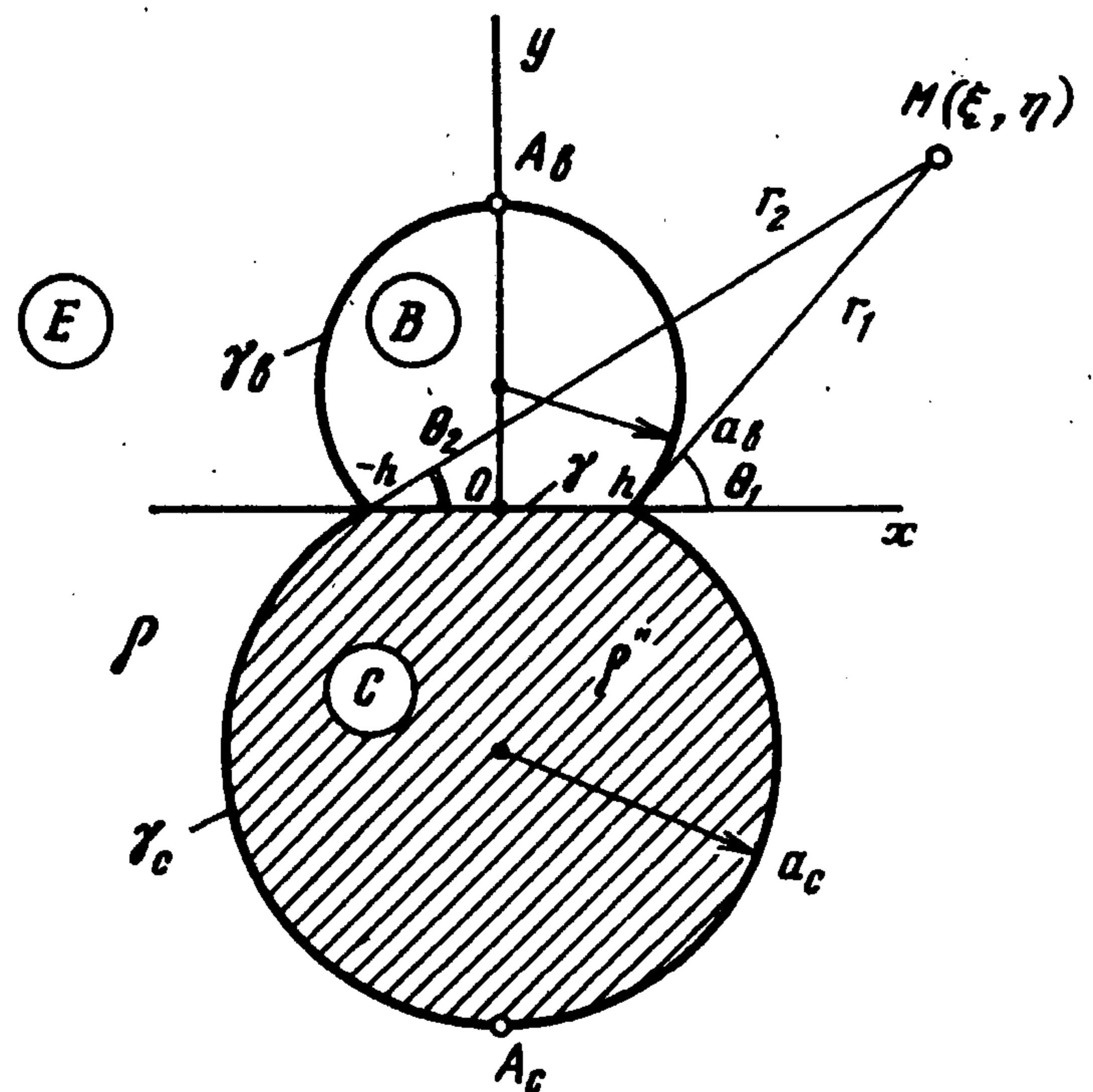
Уравнения движения твердой фазы вне агломерата и внутри сгустка допускают простые интегралы

$$p_\Sigma = p_f + \sigma p_s = p_{\Sigma 0} + (\mathbf{i}_g, \mathbf{r}) - \frac{Fr}{2} w^2 \quad (4.2)$$

$$p_\Sigma = p'_f + \sigma p'_s = p'_{\Sigma 0} + -\frac{\rho''}{\rho} (\mathbf{i}_g, \mathbf{r}) \quad (4.3)$$

где $p_{\Sigma 0}, p'_{\Sigma 0}$ – некоторые постоянные.

В рассматриваемой модели, как и в более простых задачах о движении неоднородностей в псевдооживленном слое (и даже в однофазных жидкостях) [13, 15], не удается удовлетворить посредством выражений (4.2), (4.3) условиям баланса нормальных напряжений в твердой фазе всюду на границе $\gamma_b \cup \gamma_c$. Прибегнем здесь к обычной в подобных случаях процедуре Дэвиса – Тейлора [24], т.е. построим решение, удовлетворяющее указанным условиям локально в окрестностях лобовых критических точек (точки A_b и A_c для всплывающего и погружающегося агломерата соответственно) в результате подходящего выбора числа Фруда, характеризующего скорость движения агломерата в системе.



Фиг. 10

Распределения скорости твердой фазы на поверхности пузыря и сгустка отыскиваются из соотношения (2.4) и имеют вид (система S_1)

$$w^2|_{\gamma_b} = \left(\frac{a}{a_b}\right)^4 \frac{1}{\sin^4 \varphi} \sin^2 \frac{a}{a_b} \operatorname{sh}^2 \left(\frac{a}{a_b} \operatorname{ctg} \varphi\right) \left[\operatorname{ch} \left(\frac{a}{a_b} \operatorname{ctg} \varphi\right) - \cos \frac{a}{a_b} \right]^{-4} \quad (4.4)$$

$$w^2|_{\gamma_c} = \left(\frac{a}{a_c}\right)^4 \frac{1}{\sin^4 \varphi} \sin^2 \frac{a}{a_b} \operatorname{sh}^2 \left(\frac{a}{a_c} \operatorname{ctg} \varphi\right) \left[\operatorname{ch} \left(\frac{a}{a_c} \operatorname{ctg} \varphi\right) + \cos \frac{a}{a_b} \right]^{-4}$$

Определяя постоянные в формулах (4.2), (4.3) из условий непрерывности $p_{\Sigma}|_{\gamma_b}(A_b) = 0$, $p_{\Sigma}|_{\gamma_c}(A_c) = p_{\Sigma}''|_{\gamma_c}(A_c)$ и разлагая затем скачки суммарного давления p_{Σ} на границах пузыря и сгустка вблизи соответствующих критических точек при помощи выражений (4.4), приходим к следующим оценкам скоростей всплывания (4.5) и погружения (4.6) агломерата:

$$U = 2\sqrt{ga_b} \left(\frac{a_b}{a}\right)^3 \left(1 - \cos \frac{a}{a_b}\right)^2 \left(\sin \frac{a}{a_b}\right)^{-1} \quad (4.5)$$

$$U = 2\sqrt{ga_c} \left(\frac{a_c}{a}\right)^3 \left(1 + \cos \frac{a}{a_b}\right)^2 \left(\sin \frac{a}{a_b}\right)^{-1} \sqrt{\frac{\rho''}{\rho} - 1} \quad (4.6)$$

Предельная форма равенства (4.5) при $a_c \rightarrow 0$ имеет вид $U = \frac{1}{2}\sqrt{ga_b}$ и совпадает с известным результатом Дэвидсона для одиночного круглого пузыря [21]. В другом предельном случае $a_b \rightarrow 0$ из формулы (4.6) следует оценка скорости погружения одиночного круглого сгустка с концентрацией твердой фазы $\rho'' > \rho$: $U_c = \frac{1}{2}\sqrt{ga_c(\rho''/\rho - 1)}$. Предельно плотный сгусток ($\rho'' = 1$) погружается с конечной скоростью $U_c(\rho'' = 1) = \frac{1}{2}\sqrt{ga_c(1 - \rho)/\rho}$.

5. Случай невырожденной границы между пузырем и сгустком. Предложенная в разд. 1 постановка задачи о взаимодействующих пузыре и сгустке допускает обобщение на случай, когда они деформированы так, что форма агломерата представляет собой совокупность двух круговых сегментов радиусов a_b , a_c , опирающихся на общий отрезок длины $2h$ (фиг. 10). В качестве координатной системы возьмем систему

биполярных координат (ξ, η) : $\xi = \theta_1 - \theta_2$, $\eta = \ln(r_2/r_1)$ с полюсами в точках $(\pm h, 0)$ на оси абсцисс декартовой системы xOy .

Степень деформации пузыря и сгустка характеризуется параметрами $n_b \in [0, 1]$, $n_c \in [1, 2]$: $h = a_b \sin \pi n_b = -a_c \sin \pi n_c$.

Система уравнений движения и неразрывности фаз в областях E, B, C , а также условия на бесконечности сохраняются в прежнем виде (1.8)–(1.12). К системе краевых условий добавляются условия сохранения потока жидкой фазы и баланса нормальных напряжений на участке границы γ между пузырем и сгустком

$$\gamma: v'_n = \varepsilon'' v''_n, \quad p''_f = 0, \quad p'_f = 0 \quad (5.1)$$

Конформное отображение внутренности двуугольника, задающего форму агломерата, на единичный круг, аналогичное отображению (2.1), имеет вид [25]

$$z_1(\zeta) = ie^{ib} \frac{e^{i\beta} - e^{-ib}}{e^{i\beta} - e^{ib}}, \quad z_1(\infty) = \infty \quad (5.2)$$

где

$$b = \pi \frac{2 - n_c}{2 - n}, \quad \beta = \frac{\zeta + \pi(2 - n_c)}{2 - n}, \quad \zeta = \xi + i\eta$$

$$n = n_c - n_b, \quad z = ih \operatorname{ctg} \frac{\zeta}{2}$$

Предельная форма этого выражения при $h \rightarrow 0$ (a_b, a_c – фиксированы) совпадает с (2.1).

Далее, аналог комплексного потенциала (2.3) течения твердой фазы в области I вне агломерата записывается с привлечением (5.2) в форме

$$W_s(\zeta) = \mp \frac{h}{(2 - n) \sin b} \left[\frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{sh}(\alpha - ib)} + \frac{\operatorname{sh}(\alpha - ib)}{\operatorname{sh} \alpha} \right] \quad (5.3)$$

$$\alpha = i \left(\frac{\zeta}{4 - 2n} + b \right)$$

а соответствующее выражение для функции тока получается отделением мнимой части в (5.3):

$$\Psi_s(\xi, \eta) = \pm \frac{h}{2 - n} \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u - \cos v} \frac{\cos v - \cos(2b + v)}{\operatorname{ch} u - \cos(2b + v)} \quad (5.4)$$

$$u = \frac{\eta}{2 - n}, \quad v = \frac{\xi}{2 - n}$$

Отображая сегмент пузыря на единичный круг, строим аналог потенциала (2.5):

$$\Phi(\zeta) = \frac{ih}{(1 + n_b) \sin \alpha_0} \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha_1}{\operatorname{sh} \alpha_2} - \frac{\operatorname{sh} \alpha_2}{\operatorname{sh} \alpha_1} \right)$$

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{1 + n_b}, \quad \alpha_1 = \frac{i\zeta}{2(1 + n_b)}, \quad \alpha_2 = \frac{i(\zeta + 2\pi)}{2(1 + n_b)}$$

Отсюда следует, что распределение давления жидкой фазы вне агломерата и соответствующая сопряженная функция имеют вид

$$p_f(\xi, \eta) = -\frac{h}{1 + n_b} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{1 + n_b} + \frac{\sin v_1}{\operatorname{ch} u_1 - \cos v_1} \right) \frac{\cos v_1 - \cos(\alpha_0 + v_1)}{\operatorname{ch} u_1 - \cos(\alpha_0 + v_1)} \quad (5.5)$$

$$u_1 = \frac{\eta}{1+n_b}, \quad v_1 = \frac{\xi}{1+n_b}$$

$$p_f^*(\xi, \eta) = -\frac{h}{1+n_b} \frac{\operatorname{sh} u_1}{\operatorname{ch} u_1 - \cos v_1} \frac{2 \operatorname{ch} u_1 - \cos v_1 - \cos(\alpha_0 + v_1)}{\operatorname{ch} u_1 - \cos(\alpha_0 + v_1)} \quad (5.6)$$

Комбинируя соотношения (5.4), (5.6), можно получить выражение для функции тока оживающего агента, аналогичное (3.1) и переходящее в него в пределе $h \rightarrow 0$. Как и прежде, облако с замкнутыми линиями тока существует в области E лишь при условии $0 \leq \delta^{-1} < 1$, т.е. для достаточно быстро всплывающих неоднородностей.

Рассмотрим ниже частный случай $n_c = 1 + n_b$ ($n = 1$), когда форма агломерата представляет собой круг радиуса $a_b = a_c$, верхняя часть которого занята пузырем, а нижняя – сгустком частиц. Подобная модель пузыря с его кильватерной зоной использовалась, например [26] при анализе реологических свойств псевдооживленных систем. Полагая $a_b = a_c = 1$, находим

$$\Psi_f(r, \varphi) = \pm r \cos \varphi \frac{r^2 - 2r \sin \varphi \cos \pi n_b - \sin^2 \pi n_b}{r^2 - 2r \sin \varphi \cos \pi n_b + \cos^2 \pi n_b} -$$

$$-\delta^{-1} \frac{\sin \pi n_b}{1+n_b} \operatorname{sh} u_1 \left[\frac{1}{\operatorname{ch} u_1 - \cos v_1} + \frac{1}{\operatorname{ch} u_1 - \cos \left(\frac{2\pi}{1+n_b} + v_1 \right)} \right] \quad (5.7)$$

где в соответствии с (5.5) и определением биполярных координат

$$\operatorname{th}[u_1(1+n_b)] = \operatorname{th} \eta = \frac{2rh \cos \varphi}{r^2 + h^2}$$

$$\operatorname{tg}[v_1(1+n_b)] = \operatorname{tg} \xi = \frac{2rh \sin \varphi}{r^2 - h^2}$$

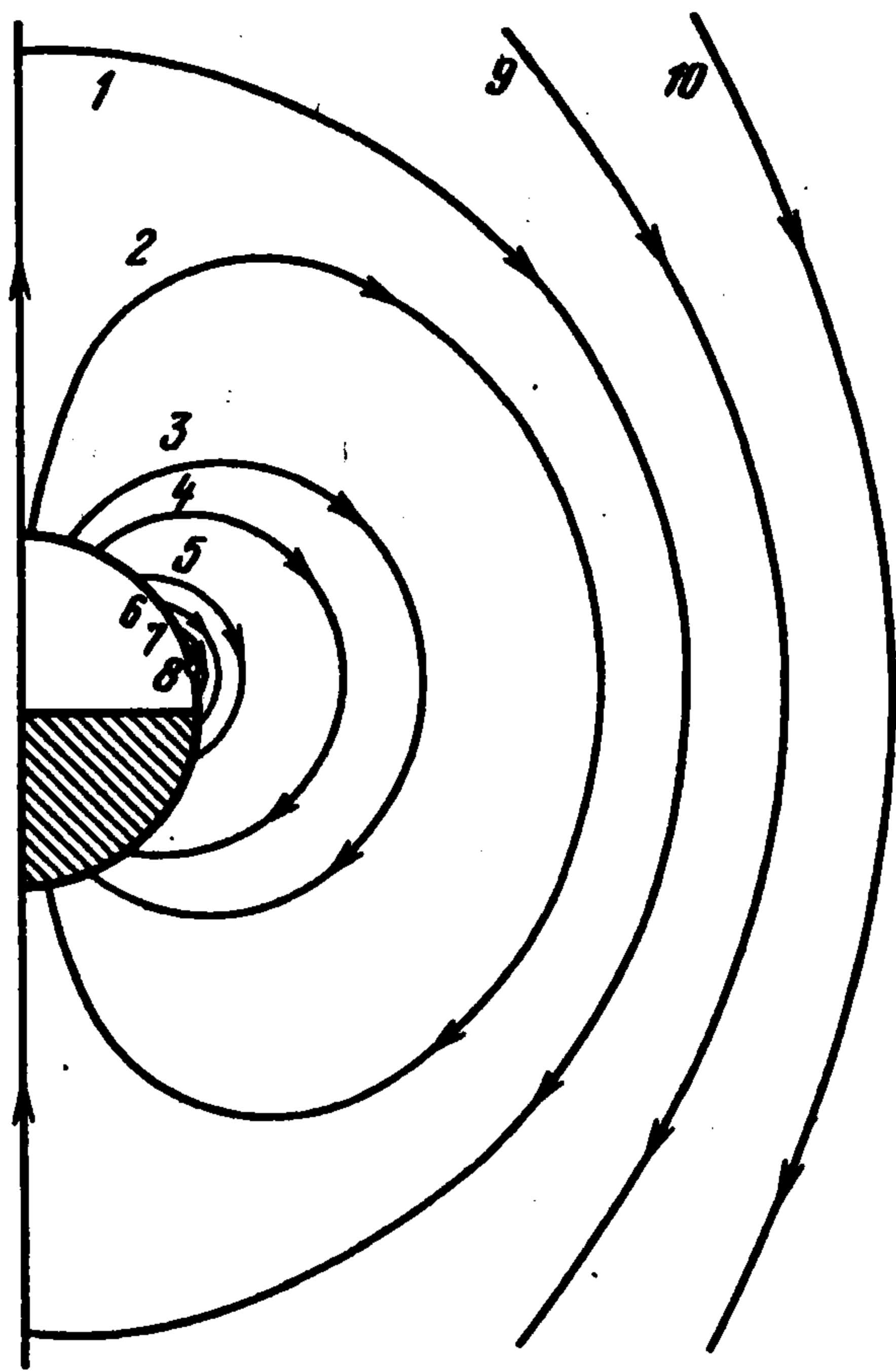
r, φ – полярные координаты (фиг. 10).

В качестве примера на фиг. 11 представлена картина течения жидкой фазы вне агломерата в циркуляционном режиме при $\delta^{-1} = 0,9$ для значения $n_b = 0,5$; соответствующие значения Ψ_f на кривых 1 – 10 таковы: 0; -0,1; -0,4; -0,7; -1,0; -1,2; -1,3; -1,39; 0,1; 0,2.

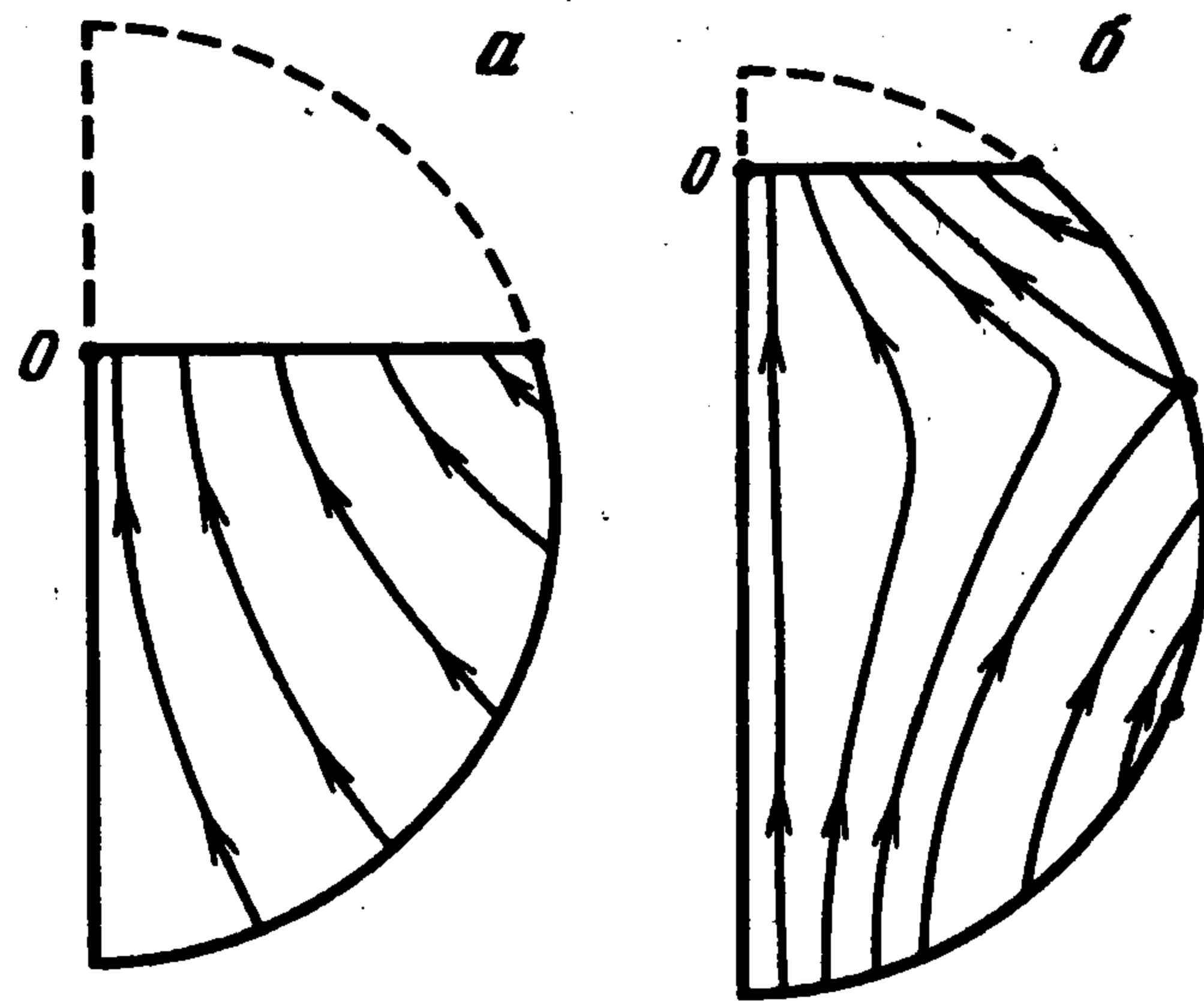
Отметим, что в рассматриваемой модели взаимодействующих пузыря и сгустка поле w не имеет особенностей на границе $\gamma_b \cup \gamma_c$, лишь если $n \in (1, 2]$, т.е. для "яблокообразных" форм агломерата. На "чечевицеобразных" контурах ($n \in [0, 1)$) это поле неограничено в окрестности полюсов биполярной системы. Что касается скоростного поля v жидкой фазы, то оно всегда имеет особенности в указанных точках границы агломерата. Дело в том, что сегмент пузыря при всех $n \in [0, 2]$ имеет две острых кромки (внутренний угол $< \pi$). Упомянутая особенность поля v является при этом следствием общей теории отображений контуров с угловыми точками [12, 27].

Внутренние граничные задачи в областях B и C по-прежнему корректны. Так, для давления p_f'' жидкой фазы внутри сгустка на основании условий (1.5), (5.1) получаем смешанную задачу

$$\Delta p_f'' = 0, \quad p_f''|_{\gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial p_f''}{\partial n} \right|_{\gamma_c} = \frac{k\varepsilon}{k''\varepsilon''} \left. \frac{\partial p_f}{\partial n} \right|_{\gamma_c}$$



Фиг. 11



Фиг. 12

которая имеет единственное решение [28]. Поле скорости v'' определится теперь первым уравнением (1.10), причем $\oint_{\gamma_c \cup \gamma} v''_n dl = 0$, так как источники и стоки жидкой фазы отсутствуют внутри сгустка. Удовлетворяя условиям сохранения ее потока на границах γ_c, γ , находим отсюда (интегралы сходятся)

$$0 = \int_{\gamma_c} v''_n dl + \int_{\gamma} v''_n dl = \frac{\varepsilon}{\varepsilon''} \int_{\gamma_c} v_n dl + \frac{1}{\varepsilon''} \int_{\gamma} v'_n dl = \frac{1}{\varepsilon''} \left(\varepsilon \int_{\gamma_c} v_n dl + \int_{\gamma} v'_n dl \right) \quad (5.8)$$

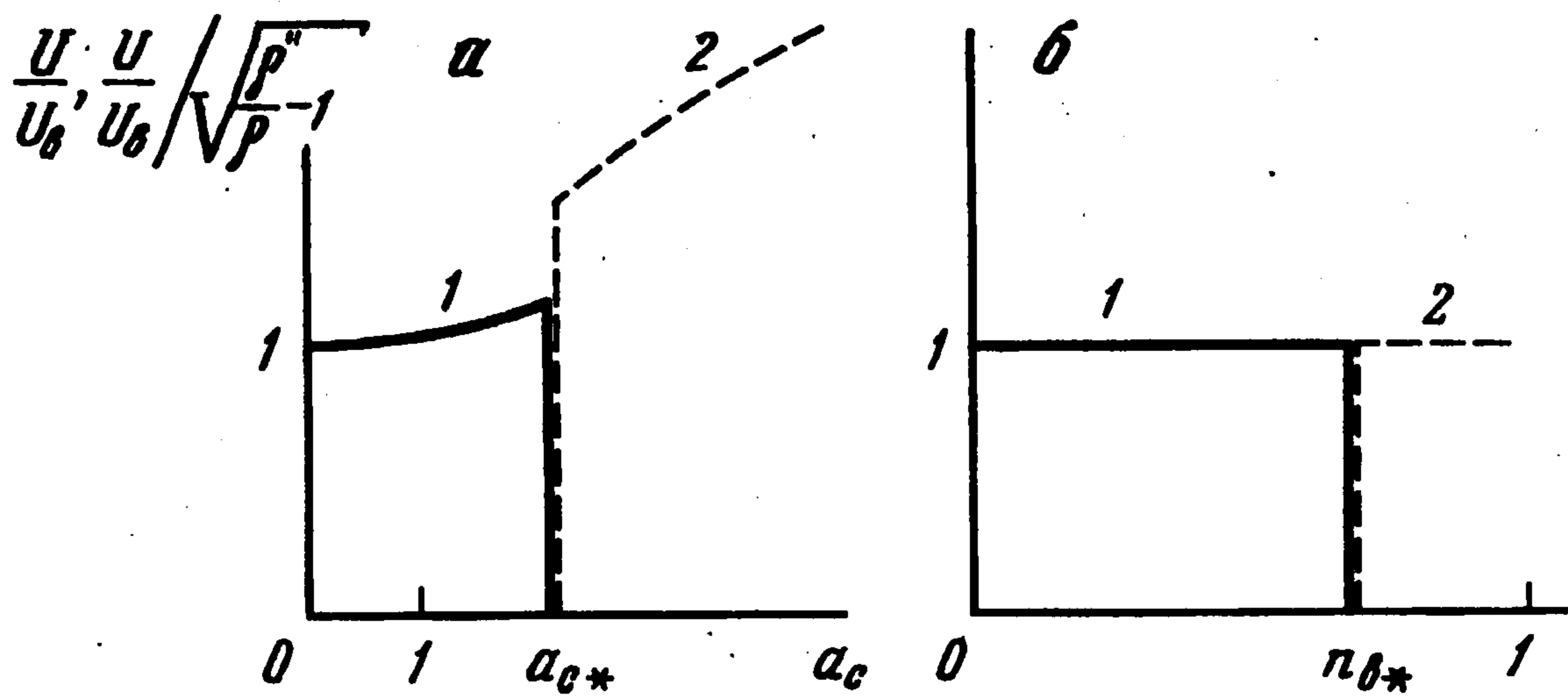
Учитывая теперь, что для внешнего поля течения жидкой фазы $\oint_{\gamma_b \cup \gamma_c} v_n dl = 0$, а также то, что внешние нормали к замкнутым контурам $\gamma_b \cup \gamma$ и $\gamma_c \cup \gamma$ на контуре γ противоположны, получаем

$$\oint_{\gamma_b \cup \gamma} v'_n dl = \int_{\gamma_b} v'_n dl + \int_{\gamma} v'_{-n} dl = \varepsilon \int_{\gamma_b} v_n dl - \int_{\gamma} v'_n dl = -(\varepsilon \int_{\gamma_c} v_n dl + \int_{\gamma} v'_n dl) = 0$$

так что поле v' внутри пузыря может быть восстановлено по прежней схеме (разд. 3).

На фиг. 12 представлены результаты качественного анализа безвихревого поля v'' внутри сгустка ($n = 1$). Как это следует из соотношений (5.4), (5.6), линии тока жидкой фазы со стороны сгустка нормальны к границе γ между ним и пузырем. Далее, исследование функции тока (5.7) на границе агломерата показывает, что с уменьшением доли пузыря в агломерате характер потока претерпевает качественное изменение при $n_b = n_{b*} = [\pi - \arccos \frac{3}{4}] / [\pi + \arccos \frac{3}{4}]$. Сквозное течение газа через пакет для $0 < n_b < n_{b*}$ (фиг. 12, а) сменяется при $n_{b*} < n_b < 1$ более сложным: часть потока выходит из сгустка во внешний слой, а другая часть попадает извне через верхнюю границу γ_c назад в сгусток и, затем, в пузырь (фиг. 12, б).

Распределение давления твердой фазы в области E по-прежнему описывается выражениями (4.2), (4.3). При этом в силу второго граничного условия (5.1) и того, что $(i_g, r)|_{\gamma} = 0$, граничное условие $p'_s = 0$ выполнено точно на общем участке границы между пузырем и сгустком.



Фиг. 13

Распределение скорости дисперсной фазы на границе агломерата имеет вид

$$w^2|_{\gamma_b} = \frac{4(\operatorname{ch} \eta - \cos \pi n_b)^2}{(2-n)^4} \frac{\sin^2 b \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2-n}}{\left(\operatorname{ch} \frac{\eta}{2-n} + \cos b\right)^4}$$

$$w^2|_{\gamma_c} = \frac{4(\operatorname{ch} \eta - \cos \pi n_c)^2}{(2-n)^4} \frac{\sin^2 b \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2-n}}{\left(\operatorname{ch} \frac{\eta}{2-n} - \cos b\right)^4}$$

Удовлетворяя третьему условию (1.5) для p_s'' в окрестностях критических точек A_b , A_c , получаем методом Дэвиса – Тейлора следующие оценки скоростей всплывания (5.9) и погружения (5.10) агломерата (размерная форма):

$$U = \frac{(2-n)^3 (1 + \cos b)^2 (\cos \pi n_b + 1)}{2 \sin b \sin \pi n_b (1 - \cos \pi n_b)} \sqrt{g a_b} \quad (5.9)$$

$$U = - \frac{(2-n)^3 (1 + \cos b)^2 (\cos \pi n_b + 1)}{2 \sin b \sin \pi n_c (1 - \cos \pi n_c)} \sqrt{g a_c \left(\frac{\rho''}{\rho} - 1\right)} \quad (5.10)$$

переходящие в пределе $h \rightarrow 0$ в (4.4).

Условие (4.1) всплывания (погружения) агломерата в рассматриваемой модели имеет вид

$$\frac{\rho''}{\rho} \leq 1 - \lambda^2 \frac{\pi(1-n_b) + \sin \pi n_b \cos \pi n_b}{\pi(1-n_c) + \sin \pi n_c \cos \pi n_c} \quad (5.11)$$

Оценки (4.5), (4.6), (5.9), (5.10) проиллюстрированы на фиг. 13 при $\rho'' > \rho$, когда в зависимости от выполнения условий (4.1), (5.11) агломерат может как всплывать, так и погружаться в слое. В первом случае устойчивость лобовой части пузыря обеспечивается при скорости всплывания, определяемой посредством соотношений (4.5), (5.9) лишь конфигурацией неоднородности и не зависящей от концентрации частиц в сгустке. Во втором случае зависимость скорости стационарного погружения агломерата от его плотности сводится к фактору $\sqrt{\rho''/\rho - 1}$ в формулах (4.6), (5.10).

На фиг. 13, а изображены зависимости отношений U/U_b (кривая 1) и $U/(U_b \sqrt{\rho''/\rho - 1})$ (кривая 2) скоростей агломерата и одиночного пузыря радиуса a_b от размера сгустка a_c для значений $\rho = 0,5$; $\rho'' = 0,6$; $a_b = 1$.

Граничное значение a_{c*} , отделяющее всплывающие неоднородности ($a_c < a_{c*}$) от погружающихся ($a_c > a_{c*}$), определяется уравнением $\lambda^2 + 1 = \rho'' / \rho$. Характерной чертой кривых на фиг. 13, а является пороговое влияние концентрации частиц в сгустке на скорость движения агломерата. Отсутствие иной зависимости между скоростью его всплывания и ρ'' помимо балансового соотношения (4.1) оправдано в рамках теории идеальных жидкостей и принятой модели отсутствия внутреннего движения частиц в сгустке, когда допускается проскальзывание твердой фазы на его поверхности и внешнее поле давления p_s , зависит лишь от геометрических характеристик неоднородности.

В случае невырожденной границы между пузырем и сгустком в рассмотренном выше частном случае $n = 1$ единственным фактором формы, определяющим конфигурацию неоднородности, является n_b . В соответствии с условием (5.11) его пороговое значение, отделяющее всплывающие агломераты от погружающихся, определяется уравнением $2\pi n_b - \sin 2\pi n_b - 2\pi\rho'' / \rho = 0$, имеющим при $\rho'' > \rho$ корень $n_{b*} \in (0, 1)$ (для $\rho = 0,5$; $\rho'' = 0,6$ имеем $n_{b*} \cong 0,69$). При этом скорость всплывания (погружения) агломерата по оценкам (5.9), (5.10) совпадает со скоростью подъема пузыря (погружения одиночного круглого пакета) равного размера (фиг. 13, б, кривые 1 и 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Тодес О.М., Цитович О.Б. Аппараты с кипящим зернистым слоем. Л.: Химия, 1982. 296 с.
2. Гельперин Н.И., Айнштейн В.Г., Кваша В.Б. Основы техники псевдооживления. М.: Химия, 1967. 664 с.
3. Псевдооживление / Под ред. И.Ф. Дэвидсона и Д. Харрисона. М.: Химия, 1974. 725 с.
4. Куни Д., Левеншпиль О. Промышленное псевдооживление // М.: Химия, 1976. 446 с.
5. Collins R. An extension of Davidson's theory of bubbles in fluidized beds // Chem. Eng. Sci. 1965. V. 20. № 8. P. 747-755.
6. Gabor J.D. Interaction effects on the fluid dynamics of bubbles in a fluidized bed: Chain of rising bubbles in an infinite two-dimensional medium // Ind. Eng. Chem. Fundam. 1969. V. 8. № 1. P. 84-91.
7. Gabor J.D., Koppel L.B. Interaction effects on the fluid dynamics of bubbles in a fluidized bed: Chain of rising bubbles in an infinite three-dimensional medium // Chem. Eng. Progr. Symp. Ser. 1970. V. 66. № 105. P. 28-36.
8. Clift R., Grace J.R., Cheung L., Do T.H. Gas and solids motion around deformed and interacting bubbles in fluidized beds // J. Fluid Mech. 1972. V. 51. Pt. 1. P. 187-205.
9. Lin S.P. Bubble coalescence in fluidized beds // AIChE Journal. 1970. V. 16. № 1. P. 130-133.
10. Clift R., Grace J.R. Bubble interaction in fluidized beds // Chem. Eng. Progr. Symp. Ser. 1970. Vol. 66. № 105. P. 14-27.
11. Clift R., Grace J.R. Bubble coalescence in fluidized beds // AIChE Journal. 1971. V. 17. № 1. P. 252-255.
12. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.
13. Бобков Н.Н., Гупало Ю.П. О влиянии процессов дробления и слияния пузырей на массообмен в псевдооживленном слое // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 782-792.
14. Бобков Н.Н., Гупало Ю.П. О пакетном механизме перемешивания в кипящем слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 5. С. 73-84.
15. Бобков Н.Н., Гупало Ю.П. О нестационарных движениях локальных неоднородностей в псевдооживленном слое // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 431-443.
16. Вайсман А.М., Гольдштик М.А. Динамическая модель движения жидкости в пористой среде // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 6. С. 89-95.
17. Yamamoto K., Yoshida Z. Flow through a porous wall with convective acceleration // J. Phys. Soc. Jap. 1974. V. 37. № 3. P. 774-779.

18. Бобков Н.Н., Гупало Ю.П. Об инерционных эффектах на разрывах концентрации твердой фазы в дисперсной среде // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 758–771.
19. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 443 с.
20. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
21. Дэвидсон И.Ф., Харрисон Д. Псевдооживление твердых частиц. М.: Химия, 1965. 184 с.
22. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
23. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977. 407 с.
24. Davies R.M., Taylor G. The mechanics of large bubbles rising through extended liquids and through liquids in tubes // Proc. Roy. Soc. 1950. V. A200. № 1062. P. 375–390.
25. Конпенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 406 с.
26. Davidson J.F., Harrison D., Guedes de Carvalho J.R.F. On the liquidlike behavior of fluidized beds // Annual Review of Fluid Mechanics. Palo Alto, Ca: Ann. Revs Inc., 1977. V. 9. P. 55–86.
27. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.
28. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1984. 560 с.

Нижний Новгород, Москва

Поступила в редакцию
I. VI. 1994