

УДК 532:526.4+533.21

© 1995 г. В.А. Алексин, С.Н. Казейкин

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ НА ТЕЛАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ ПРИ ОБТЕКАНИИ ПОД УГЛАМИ АТАКИ

Исследуются вопросы течения и теплообмена в пространственном пограничном слое при обтекании модельного тела сложной формы потоком сжимаемого газа под углами атаки α вплоть до 30° и затупленного по сфере консуа при $\alpha = 10^\circ$ как на линии растекания в плоскости симметрии тела, так и на всей поверхности. Приводятся полная и упрощенная постановки с соответствующими системами уравнений. Используются аналитические и численные методы расчета уравнений пространственного ламинарного и турбулентного пограничного слоя, данные внешнего невязкого обтекания и геометрии тела. Основное внимание уделяется следующим вопросам: анализу системы уравнений в случаях, допускающих ее упрощение, замыканию осредненных уравнений пограничного слоя при турбулентном режиме, выбору криволинейных систем координат, анализу влияния определяющих параметров на появление областей "отрыва" и характерных зон, линий растекания и стекания на поверхности.

При обтекании тела сложной формы потоком сжимаемого газа под углом атаки в пограничном слое возникает пространственное перетекание потоков, которое в ряде областей течения в значительной степени определяет величины локального трения и теплового потока на поверхности. Интенсивность вторичных течений зависит от трехмерности конфигурации тела и значения угла атаки. Она может достигать больших величин даже при малых углах атаки, а образующиеся пограничные слои существенно трехмерные. Подробное изложение постановок ряда пространственных задач, методов их аналитического и численного решения для ламинарного и турбулентного режимов можно найти в [1, 2]¹.

1. Постановка задачи. При обычных предположениях теории пограничного слоя и в пренебрежении влиянием нормальных напряжений Рейнольдса система уравнений для осредненных характеристик пространственного пограничного слоя в сжимаемом потоке однородного совершенного газа относительно криволинейной системы координат ξ, η, ζ , связанной с поверхностью обтекаемого тела $\zeta = 0$, имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho u \sqrt{\frac{g}{g_{11}}} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho w \sqrt{\frac{g}{g_{22}}} \right) + \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\rho v) = 0 \\ & \frac{u}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{w}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} + v \frac{\partial u}{\partial \zeta} + A_1 u^2 + A_2 w^2 + A_3 u w = \frac{A_4}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \rho \langle u' v' \rangle \right) \\ & \frac{u}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{w}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial w}{\partial \eta} + v \frac{\partial w}{\partial \zeta} + B_1 u^2 + B_2 w^2 + B_3 u w = \frac{B_4}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial \zeta} - \rho \langle w' v' \rangle \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

¹ См. также: Алексин В.А., Шевелев Ю.Д. Численное исследование пространственных турбулентных пограничных слоев. Метод расчета: Препринт. № 147. М.: ИПМ АН СССР. 1980. 68 с.

$$\frac{u}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{w}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial h}{\partial \eta} + v \frac{\partial h}{\partial \zeta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial \zeta} - \rho \langle h' v' \rangle \right] +$$

$$+ \frac{u}{\rho \sqrt{g_{11}}} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{w}{\rho \sqrt{g_{22}}} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\mu}{\rho} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)^2 + 2 \cos \psi_0 \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial w}{\partial \zeta} + \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 \right] -$$

$$- \langle u' v' \rangle \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \cos \psi_0 \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) - \langle w' v' \rangle \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} + \cos \psi_0 \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)$$

$$p = \rho RT, \quad \partial p / \partial \zeta = 0$$

$$(g_{33} = 1, \quad g_{31} = g_{32} = 0, \quad \cos \psi_0 = g_{12} / \sqrt{g_{11} g_{22}}, \quad g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2)$$

Использовано предположение о малости членов, содержащих пульсации плотности, вязкости, теплопроводности, по сравнению с членами, содержащими их средние значения. Первое уравнение системы (1.1) – уравнение неразрывности, второе и третье – уравнения количества движения в проекции на криволинейные координаты ξ и η , четвертое – уравнение притока тепла. Здесь ξ и η направлены вдоль поверхности, а ζ – по нормали к ней, ξ отсчитывается вдоль образующих тела, η – от наветренной плоскости симметрии против часовой стрелки. Статическое давление p – функция ξ и η . В расчетах принимается $\mu = \mu_e (h/h_e)^\omega$, $\lambda = \lambda_e (h/h_e)^\omega$, $\omega = 0,75$; u , w , v – продольная, поперечная и нормальная компоненты скорости, в системе ξ , η , ζ ; g_{ij} – компоненты метрического тензора; h – энтальпия, ρ – плотность, T – температура, μ , λ – коэффициенты вязкости и теплопроводности, c_p – теплоемкость при постоянном давлении, R – газовая постоянная; индекс e относится к внешней границе пограничного слоя, w – к значениям на стенке, t – к турбулентному режиму. Коэффициенты A_i , B_i ($i = 1, \dots, 4$) определяются геометрией поверхности обтекаемого тела и параметрами внешнего невязкого потока.

На поверхности задаются следующие граничные условия:

$$\zeta = 0, \quad u = w = 0, \quad \rho v = (\rho v)_w = F(\xi, \eta)$$

(1.2)

$$F_1[\xi, \eta, h_w, (\partial h / \partial \zeta)_w] = 0: \quad h_0 / H_0 = t_w(\xi, \eta) \quad \text{или} \quad q_w = q_w(\xi, \eta)$$

На внешней границе пограничного слоя, где известны распределения компонент скорости $u_e(\xi, \eta)$, $w_e(\xi, \eta)$ и энтальпии $h_e(\xi, \eta)$, которые находятся из уравнений газовой динамики или определяются по данным эксперимента, выполняются условия:

$$\zeta \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow u_e, \quad w \rightarrow w_e, \quad h \rightarrow h_e$$

(1.3)

Начальные условия задаются таким образом, чтобы обеспечить существование и единственность решения поставленной задачи. Для этого в некоторой области D необходимо задавать начальные профили скорости и энтальпии. Эта область начальных данных должна удовлетворять условию, что все характеристические направления, вдоль которых развиваются возмущения, выходят из нее в расчетную область течения, которая является зоной влияния области начальных данных (принцип влияния Ретца [3]). Течение за пределами зоны влияния не поддается расчету, так как на него оказывают воздействия другие начальные данные и оно зависит от течения вне этой зоны [4]. При наличии передней точки торможения начальные условия определяются из решения в ее окрестности.

2. Моделирование турбулентности. Используем понятие турбулентной вязкости. Наиболее распространенными являются изотропные коэффициенты переноса, в основе которых лежит предположение о совпадении направлений векторов касательного напряжения $\tau(\tau_1, \tau_2)$ и $G(\partial u / \partial \zeta, \partial w / \partial \zeta)$ [5]. Известны варианты моделей анизотропных коэффициентов [6].

Ниже используется модель эффективных коэффициентов переноса (см. сноску 1), где полные напряжения трения τ_1, τ_2 по осям ξ и η , включающие в себя напряжения трения и Рейнольдса $-\rho\langle u'v' \rangle, -\rho\langle w'v' \rangle$, а также полный тепловой поток q , определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} - \rho\langle u'v' \rangle = \mu_{\Sigma,1} \frac{\partial u}{\partial \xi}, & \tau_2 &= \mu \frac{\partial w}{\partial \xi} - \rho\langle w'v' \rangle = \mu_{\Sigma,2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ q &= \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial \xi} - \rho\langle h'v' \rangle = \frac{\lambda_{\Sigma}}{c_p} \frac{\partial h}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

При введении эффективных коэффициентов турбулентного переноса делается предположение об изотропности коэффициента турбулентной вязкости. Из него следует, что продольный и поперечный эффективные коэффициенты равны: $\mu_{\Sigma,1} = \mu_{\Sigma,2} = \mu_{\Sigma}$, а направление суммарного касательного напряжения τ совпадает с направлением G ; также следует, что путь смещения Прандтля L является скалярной функцией и не зависит от преобразования координат: $L_1 = L_2 = L$.

Обобщение гипотезы Прандтля для пространственного пограничного дает обобщенную формулу Прандтля [5]:

$$\mu_t = \rho L^2 |G| \quad (2.2)$$

Для криволинейной неортогональной системы координат, нормально связанной с поверхностью тела, имеем

$$|G| = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \cos \psi_0 \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Коэффициент эффективной вязкости μ_{Σ} зависит от локальных чисел Рейнольдса Re_A ($Re_A = \mu_t/\mu$) и Re_* :

$$\mu_{\Sigma} = \phi_* \mu = 1/2 \mu Re_A^{-1} \{ Re_A^2 - Re_*^2 + [(Re_*^2 - Re_A^2)^2 + 4 Re_*^2 Re_A^2]^{1/2} \} \quad (2.3)$$

По аналогии с коэффициентом эффективной вязкости определяется коэффициент эффективной теплопроводности

$$\lambda_{\Sigma} = \lambda \phi_* F(Re_A, Re_*, Pr, Pr_t) \quad (2.4)$$

$$F = 1 + (Pr/Pr_t - 1) Re_A^2 \{ Re_*^2 (1 + \phi_* Re_A / Re_*^2) \}^{-1}$$

Ламинарные и турбулентные числа Прандтля определяются по коэффициентам ламинарного и турбулентного переноса: $Pr = C_p \mu / \lambda$, $Pr_t = C_p \mu_t / \lambda_t$. При численных расчетах значения Pr и Pr_t принимаются постоянными: $Pr = 0,7$, $Pr_t = 0,9$.

Длина пути смещения L определяется эмпирической функцией

$$L = \beta_* \delta \Phi(\beta_*, k, \zeta/\delta), \quad (2.5)$$

$$\Phi = \left[1 - \exp\left(-\frac{2k \zeta}{\beta_* \delta}\right) \right] / \left[1 + \exp\left(-0,75 \frac{2k \zeta}{\beta_* \delta}\right) \right]$$

где $k = 0,4$ – постоянная Кармана, $\beta_* = 0,1$, δ – толщина пограничного слоя, определенная по профилю скорости U .

Величина локального критического числа Рейнольдса Re_* зависит от ряда параметров, в частности, от параметров градиента давления P^+ , проницаемости поверхности v_w^+ , чисел Маха M_e и Рейнольдса Re_{θ} :

$$Re_* = Re_*(Re_{\theta}, P^+, v_w^+, M_e) \quad (2.6)$$

$$P^+ = \nu \rho^{-1} v_*^{-3} (U_e \cdot |U_e|^{-1} \cdot \nabla p_e), \quad v_w^+ = v_w / v_*, \quad v_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$$

В работе используется зависимость (2.6) в виде, ранее примененном при расчетах теплообмена двухмерных течений в случае значительных продольных градиентов давления и проницаемости поверхности

$$Re_* = Re_{*,0} \cdot \{1 + a[v_w^+ + bP^+ / (1 + cv_w^+)]\}$$

где a, b, c – постоянные, равные соответственно 5,15; 5,86; 5,00.

Число Re_θ определяется по U_e, v_e и толщине потери импульса θ_1

$$Re_\theta = \frac{U_e \theta_1}{v_e}, \quad \theta_1 = \int_0^\infty \frac{\rho U}{\rho_e U_e} \left(1 - \frac{U}{U_e}\right) d\zeta \quad (2.7)$$

Величина $Re_{*,0}$ определяет переход от ламинарного режима к турбулентному вдоль поверхности тела. Используется предложенная ранее (см. сноску¹) зависимость $Re_{*,0}$ от Re_θ .

В общем случае $Re_{*,0}$ – функция многих параметров, описывающая процессы перехода в пограничном слое. Среди них можно выделить такие, как степень турбулентности набегающего потока Tu_∞ , числа Маха и Рейнольдса, параметры продольного градиента давления и проницаемости поверхности, температурного фактора.

Для пространственных пристеночных течений усложненные модели турбулентности содержат различное количество дополнительных уравнений [5–7]. Двухпараметрическая $K - \epsilon$ модель для кинетической энергии турбулентности K и скорости ее диссипации ϵ имеет два уравнения, как и модель [7] с дополнительными уравнениями для напряжений Рейнольдса $-\rho \langle u'v' \rangle, -\rho \langle w'v' \rangle$. Трехпараметрическая модель состоит из уравнений для K и напряжений Рейнольдса τ_{11}, τ_{12} , при этом не предполагается наличие изотропных свойств характеристик турбулентности в продольном и поперечном направлениях и несовпадение направлений векторов τ и G . Для описания свойств течения вблизи стенок в коэффициенты уравнений некоторых членов вводятся пристеночные демпфирующие функции, подобные тем, которые используются в алгебраических моделях.

Для моделирования турбулентного переноса тепла используется аналогия процессов переноса тепла и импульса, что приводит к необходимости введения турбулентного числа Прандтля Pt_t . В ряде случаев существует сложная зависимость распределения Pt_t от свойств газа и граничных условий, которая может быть учтена с помощью еще одного дополнительного уравнения для турбулентного теплового потока $q_t = -\rho \langle h'v' \rangle$, подобного уравнению, введенному [8] для класса двумерных пристенных течений.

3. При решении задач ламинарного и турбулентного трехмерного пограничного слоя возникает вопрос о нахождении граничных условий на линиях растекания. Задача при этом сводится к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Первым шагом является раскрытие особенности в критической точке.

При обтекании затупленного тела, имеющего плоскость симметрии, с вектором скорости набегающего потока, лежащим в этой плоскости, вводится декартова система координат с осью Z , направленной вдоль тела, и плоскостью XOZ , лежащей в плоскости симметрии тела; (ξ, η, ζ) – система координат пограничного слоя, нормально связанная с поверхностью. Нормаль к поверхности тела имеет координаты $n(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$, связь между декартовой и погранслоевой системами координат можно записать в виде

$$x = r_w(\xi, \eta) \cos \eta + \psi_1 \zeta, \quad y = r_w(\xi, \eta) \sin \eta + \psi_2 \zeta, \quad z = \chi(\xi, \eta) + \psi_3 \zeta \quad (3.1)$$

Здесь $r_w(\xi, \eta)$ – расстояние от оси Z до поверхности тела. Если x^i – координаты декартовой системы, а ξ^i – погранслоевой, то из (3.1) получаются выражения для компонент метрического тензора в системе координат пограничного слоя g_{pq} через компоненты в декартовой системе g'_{ij} :

$$g_{pq} = g'_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^p} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^q} \quad (3.2)$$

В окрестности плоскости симметрии, являющейся линией растекания, функции, входящие в систему уравнений пространственного пограничного слоя, удовлетворяют условию $f(-\eta) = f(\eta)$. Следовательно, их можно записать в виде

$$f = f^0 + f^2\eta^2 + O(\eta^4) \quad (f = \rho, u, v, p, H, r_w, \chi) \quad (3.3)$$

Для проекции вектора скорости на ось η должно выполняться соотношение $w(-\eta) = -w(\eta)$. Поэтому

$$w = w^1\eta + w^3\eta^3 + O(\eta^5) \quad (3.4)$$

Метрику поверхности тела в окрестности плоскости симметрии, используя (3.2) и (3.3), можно представить в таком виде:

$$r_w(\xi, \eta) = r_w^0(\xi) + r_w^2(\xi)\eta^2 + O(\eta^4), \quad \chi(\xi, \eta) = \chi_0(\xi) + \chi_2(\xi)\eta^2 + O(\eta^4)$$

$$g_{11} = G + 2\left(\frac{dr_w^0}{d\xi} \frac{dr_w^2}{d\xi} + \frac{d\chi_0}{d\xi} \frac{d\chi_2}{d\xi}\right)\eta^2 + O(\eta^4) \quad (3.5)$$

$$g_{12} = 2\eta\left(\frac{d\chi_0}{d\xi} \chi_2 + \frac{dr_w^0}{d\xi} r_w^2\right) + O(\eta^3), \quad g_{22} = (r_w^0)^2 + O(\eta^2)$$

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = (r_w^0)^2 G + O(\eta^2), \quad G = \left(\frac{d\chi_0}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dr_w^0}{d\xi}\right)^2$$

Коэффициенты A_i, B_i ($i = 1, 2, 3, 4$), входящие в уравнения движения системы пограничного слоя (1.1), зависящие от метрики, таковы:

$$A_1 = O(\eta^2)$$

$$A_2 = 2\left(\frac{d\chi_0}{d\xi} \chi_2 + \frac{dr_w^0}{d\xi} r_w^2\right) \left((r_w^0)^2 \sqrt{G}\right)^{-1} + O(\eta) = A_2^0 + O(\eta), \quad A_3 = O(\eta)$$

$$B_1 = \frac{2\eta}{r_w^0 G} \left(\frac{dr_w^0}{d\xi} \chi_2 - \frac{d\chi_0}{d\xi} r_w^2\right) \left(\frac{dr_w^0}{d\xi} \frac{d^2\chi_0}{d\xi^2} - \frac{d\chi_0}{d\xi} \frac{d^2 r_w^0}{d\xi^2}\right) = B_1^1 \eta + O(\eta^2)$$

$$B_2 = O(\eta), \quad B_3 = \frac{dr_w^0}{d\xi} / (r_w^0 \sqrt{G}) + O(\eta) = B_3^0 + O(\eta)$$

$$A_4 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{dp_0}{d\xi} + O(\eta^2), \quad B_4 = \frac{2\eta}{r_w^0} \left[\frac{1}{G} \left(\frac{d\chi_0}{d\xi} \chi_2 + \frac{dr_w^0}{d\xi} r_w^2\right) \frac{dp_0}{d\xi} - p_2 \right] + O(\eta^2)$$

Следовательно, систему уравнений трехмерного пограничного слоя (1.1) в окрестности плоскости симметрии можно записать, отбрасывая малые члены по η , следующим образом:

$$\frac{\partial(\rho_0 u_0 r_w^0)}{\partial \xi} + \sqrt{G} \left[\rho_0 w_1 + r_w^0 \frac{\partial(\rho_0 v_0)}{\partial \xi} \right] = 0$$

$$\frac{u_0 \rho_0}{\sqrt{G}} \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + v_0 \rho_0 \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} = -A_4 + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\mu_\Sigma \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} \right) \quad (3.6)$$

$$\frac{u_0}{\sqrt{G}} \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + \frac{w_1^2}{r_w^0} + v_0 \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} + B_3^1 u_0^2 + B_1^0 u_0 w_1 = \frac{B_4}{\eta \rho_0} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\mu_\Sigma \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \right)$$

$$\frac{\rho_0 u_0}{\sqrt{G}} \frac{\partial H_0}{\partial \xi} + \rho_0 v_0 \frac{\partial H_0}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{\mu_\Sigma}{\sigma_\Sigma} \left[\frac{\partial H_0}{\partial \zeta} + (\sigma_\Sigma - 1) \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{u_0^2}{2} \right] \right\}$$

Зададим давление на поверхности тела по формуле Ньютона

$$p = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_\infty / |\mathbf{v}_\infty|)$$

Для компонентов нормали $\mathbf{n}(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ имеем

$$\psi_1 = \frac{1}{G_r} \left(\cos \eta + \frac{\partial r_w}{\partial \eta} \frac{\sin \eta}{r_w} \right), \quad \psi_2 = \frac{1}{G_r} \left(\sin \eta - \frac{\partial r_w}{\partial \eta} \frac{\cos \eta}{r_w} \right), \quad \psi_3 = -\frac{1}{G_r} \frac{\partial r_w}{\partial z}$$

$$G_r = 1 + \left(\frac{\partial r_w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{1}{r_w} \frac{\partial r_w}{\partial \eta} \right)^2$$

Единичный вектор по направлению вектора \mathbf{v}_∞ имеет компоненты $(-\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$, где угол α – угол атаки. Отсюда

$$p = \frac{1}{G_r} \left(-\frac{\partial r_w}{\partial z} \cos \alpha - \sin \alpha \cos \eta - \frac{\partial r_w}{\partial \eta} \frac{\sin \eta \sin \alpha}{r_w} \right)^2 \quad (3.7)$$

В окрестности плоскости симметрии

$$p = \left(\frac{\partial r_w^0}{\partial z} \cos \alpha + \sin \alpha \right)^2 \left[1 + \left(\frac{\partial r_w^0}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1} + p_2 \eta^2 + O(\eta^4)$$

На поверхности тела для введенных координат выполняется равенство

$$\xi = \int_0^z \sqrt{1 + (\partial r_w / \partial z)^2} dz, \quad \eta = \arctg(y/x)$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \left[1 + \left(\frac{\partial r_w}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

Следовательно

$$p_0 = \left(\frac{dr_w^0}{d\xi} \right)^2 \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sin \alpha \frac{dr_w^0}{d\xi} \frac{d\chi_0}{d\xi} + \left(\frac{d\chi_0}{d\xi} \right)^2 \sin^2 \alpha \quad (3.8)$$

Из уравнений движения системы (3.6) при $\zeta \rightarrow \infty$ на внешней границе пограничного слоя следует

$$u_0^e \frac{du_0^e}{d\xi} = -\frac{1}{\rho_0^e} \frac{dp_0}{d\xi} \quad (3.9)$$

$$\frac{u_0^e}{\sqrt{G}} \frac{dw_1^e}{d\xi} + \frac{(w_1^e)^2}{r_w^0} + B_1^1 (u_0^e)^2 + B_3^0 u_0^e w_1^e = \frac{2}{\rho_0^e r_w^0} \left[\frac{1}{G} \left(\frac{d\chi_0}{d\xi} \chi_2 + \frac{dr_w^0}{d\xi} r_w^2 \right) \frac{dp_0}{d\xi} - p_2 \right]$$

Решение системы (3.9) в окрестности критической точки $\xi = \xi_{cr}$ ищется в виде:

$u_0^e = a(\xi - \xi_{cr})$, $w_1^e = b(\xi - \xi_{cr})$. Тогда получаем

$$a^2 (\xi - \xi_{cr}) = -\frac{1}{\rho_0^e} \frac{dp_0}{d\xi} \quad (3.10)$$

$$\frac{ab(\xi - \xi_{cr})}{\sqrt{G}} + (\xi - \xi_{cr})^2 \left(\frac{b^2}{r_w^0} + B_1^1 a^2 + B_3^0 ab \right) = \frac{2}{\rho_0^e r_w^0} \left[\frac{1}{G} \left(\frac{d\chi_0}{d\xi} \chi_2 + \frac{dr_w^0}{d\xi} r_w^2 \right) \frac{dp_0}{d\xi} - p_2 \right]$$

Предположим, что головная часть тела образована сферой, центр которой лежит на оси Z , а критическая точка попадает на сферическую область. В этом случае $\chi = R[1 - \cos(\xi/R)]$, $r_w = R \sin(\xi/R)$, R – радиус сферы.

Из (3.7) получается для окрестности плоскости симметрии сферы

$$p = \cos^2(\xi/R - \alpha), p_2 = -\sin \alpha \sin(\xi/R) \cos(\xi/R - \alpha)$$

Система уравнений (3.10) для сферы принимает вид

$$a^2 = 2 / (\rho_0^e R^2)$$

(3.11)

$$ab(\xi - \xi_{cr}) + b^2 \frac{(\xi - \xi_{cr})^2}{r_w^0} + \frac{ab}{R \operatorname{tg} \alpha} (\xi - \xi_{cr})^2 = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\rho_0^e r_w^0}$$

Из второго уравнения видно, что при $\alpha \neq 0$ величина b имеет порядок $c/(\xi - \xi_{cr})$. Следовательно, неопределенность в окрестности особой критической точки раскрывается только в том случае, если начало координат совпадает с критической точкой, т.е. $\alpha = 0$. В этом случае система имеет решение $a = R^{-1} \sqrt{2 / \rho_0^e}$, $b = 0$.

Если тело обтекается совершенным газом, то

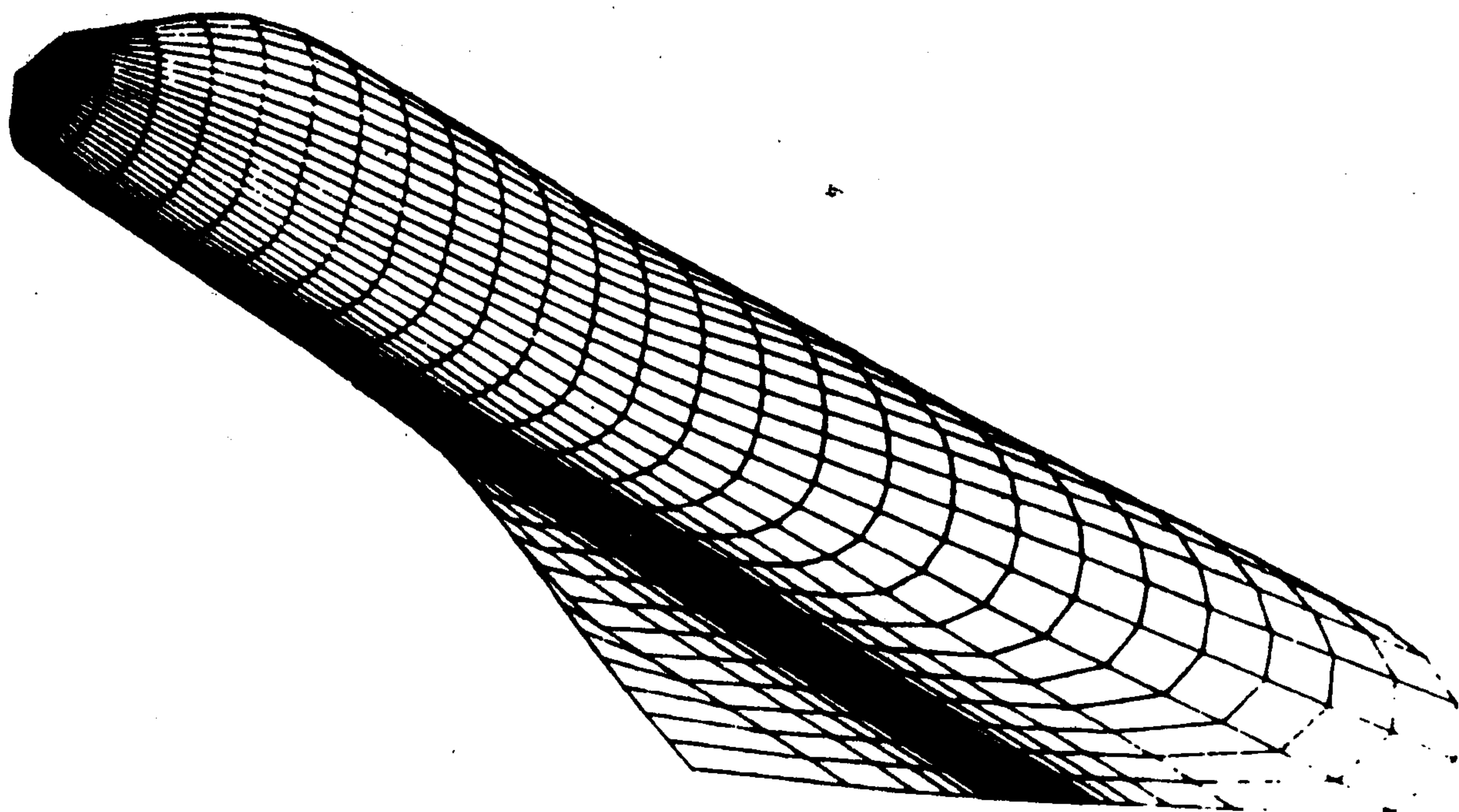
$$a = R^{-1} \sqrt{(2 + (\gamma - 1)M_\infty^2) / (\gamma M_\infty^2)}$$

4. Для оценки теплового состояния поверхности обтекаемого тела и нахождения участков наиболее интенсивного теплообмена применяется численный метод расчета уравнений пространственного пограничного слоя. В основе метода лежит схема [9], которая обеспечивает четвертый порядок точности по нормальной координате. При этом в зависимости от структуры турбулентного пограничного слоя сетка задается неравномерной. Используются граничные условия общего вида, без изменения порядка точности интегрирования и однородности вычислительного алгоритма. В направлениях, касательных к поверхности, задаются также неравномерные интервалы интегрирования в зависимости от интенсивности перестройки течения. Применяется метод слежения за направлением скорости потока. При этом используются направленные разности в зависимости от знака поперечной составляющей скорости w . Местоположение линий растекания, стекания, поверхностей раздела потока заранее неизвестно, они определяются в процессе счета. Методы, в алгоритмах которых заложены условия, учитывающие направление вектора скорости, предложены в [10].

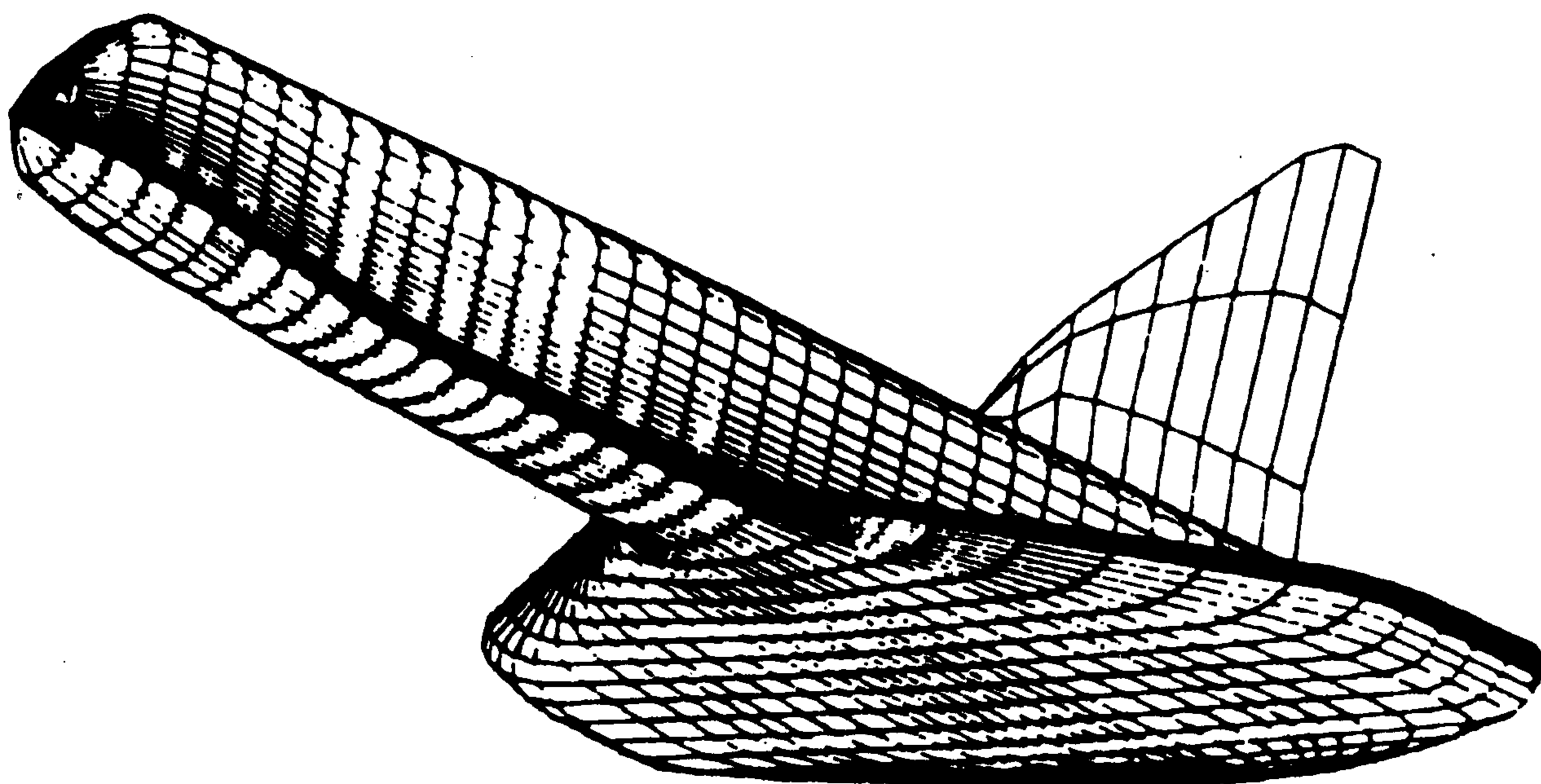
При изучении обтекания тел сложной формы возникает задача создания адекватной математической модели поверхности реального тела. При этом требования к описанию геометрии меняются в зависимости от конкретной задачи. В задачах внешней аэрогидродинамики геометрия тела имеет некоторые общие свойства: можно выделить главное направление – направление движения, тело имеет плоскость симметрии.

В данной работе используется аналитическое задание поверхностей обтекаемых тел. В этом случае исходные данные аппроксимируются набором элементарных поверхностей, описываемых алгебраическими функциями обычно не выше третьего порядка². Вид этих функций определяют конечное число параметров, имеющих физический смысл (угол стреловидности, ширина фюзеляжа и др.). Гладкое сращивание составляющих элементарных кусков поверхностей производится автоматически. При этом метрика поверхности, символы Кристоффеля, нормаль находятся с требуемой степенью гладкости. Преимущество такого подхода заключается в минимальности требуемого объема памяти ЭВМ и времени счета. Изменение параметров обтекаемого тела не представляет особых трудностей.

² Казейкин С.Н., Семушкина Е.В., Шевелев Ю.Д. О некоторых методах расчета и визуализации геометрии сложной формы. Препринт. № 286. М.: ИПМ АН СССР, 1987. 48 с.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 приведен внешний вид модельного тела, поверхность которого построена описанным способом. Геометрия более сложного тела, определяемая значениями 14 параметров, изображена на фиг. 2. Форма рассматриваемого семейства тел характеризуется наличием сферического затупления, переходящей в коническую поверхность, возможно наличие таких элементов, как кабина на подветренной стороне и крылья.

При решении уравнений пространственного пограничного слоя на телах сложной формы ключевым является выбор криволинейной системы координат, нормально связанной с поверхностью тела. От этого во многом зависит возможность расчетного метода достаточно точно описывать физическую картину течения. При исследовании обтеканий тел пространственных конфигураций под углами атаки задача такого адекватного описания свойств потока решениями уравнений в частных производных еще более усложняется ввиду необходимости сгущения узлов сетки в ряде областей течения с сильными изменениями функций.

Для расчета характеристик пограничного слоя на всей поверхности тела здесь используется несколько систем координат [2]. В окрестности передней критической точки применяется система координат, связанная со сферической системой координат (R, θ, φ) , начало которой совпадает с центром сферического затупления. На остальной

части поверхности вводится система координат, соответствующая цилиндрической системе координат.

Решения уравнений осесимметричного пограничного слоя служат начальными условиями для расчета уравнений пространственного пограничного слоя для остальной части поверхности затупления. При увеличении угла θ форма тела начинает отличаться от сферической и течение постепенно приобретает трехмерный характер. Для расчета параметров потока и теплообмена возникает необходимость в использовании пространственных уравнений пограничного слоя, для чего вводится погранслойная система координат $(\theta^*, \varphi^*, \zeta)$, где $\theta^* = \theta$, $\varphi^* = \varphi$, ζ — нормаль к поверхности, центр которой совпадает с центром сферического затупления, ось наклонена под переменным углом $\beta(\theta)$ к оси Z декартовой системы координат (X, Y, Z) . Эта система координат $(\theta^*, \varphi^*, \zeta)$ непосредственно связана со сферической поворачивающейся системой координат (R, θ, φ) ³. Для пересчета компонент вектора скорости невязкого течения из системы координат (R, θ, φ) в погранслойную систему координат $(\theta^*, \varphi^*, \zeta)$ с заданными функциями $\xi_0(\theta)$, $\beta(\theta)$ используются формулы преобразования координат

$$\begin{aligned} x &= R(\theta^*, \varphi^*) \sin \theta^* \cos \varphi^* \cos \beta - R(\theta^*, \varphi^*) \cos \theta^* \sin \beta + \zeta \psi_1 \\ y &= R(\theta^*, \varphi^*) \sin \theta^* \sin \varphi^* + \zeta \psi_2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$z = \xi_0(\theta) R(\theta^*, \varphi^*) \cos \theta^* \cos \beta + R(\theta^*, \varphi^*) \sin \theta^* \cos \varphi^* \sin \beta + \zeta \psi_3$$

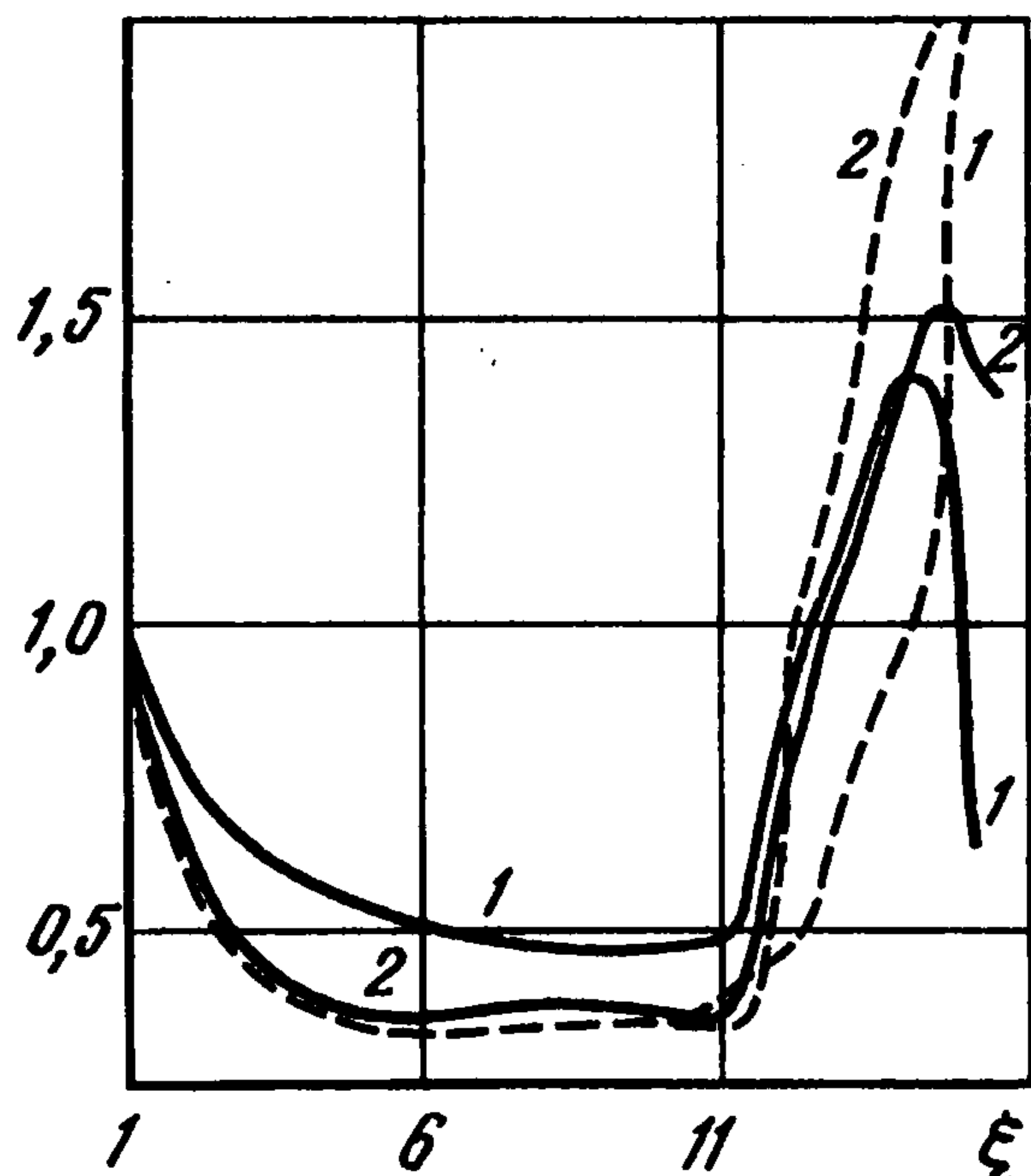
Здесь $R(\theta^*, \varphi^*)$ — расстояние от центра сферической системы координат до поверхности тела; ξ_0 — начало центра системы координат (R, θ, φ) .

5. Результаты расчетов. С помощью аналитического метода последовательных приближений [11] и численного метода проведено исследование трехмерного ламинарного пограничного слоя на теле, изображенном на фиг. 1, для $M_\infty = 6$ и $\alpha = 5^\circ$. Условия на внешней границе берутся из расчетов сверхзвукового обтекания тел невязким совершенным газом. Носовая часть тела представляет собой сферическое затупление. В поперечном сечении два полуэллипса сопрягаются с наветренной стороны с прямой, т.е. донная часть тела плоская. На подветренной стороне находится кабина, а при достаточном удалении от начала расположены крылья.

Проведенное исследование пограничного слоя позволяет сделать ряд выводов для тел подобного класса. Выделяются области с S -образным профилем скорости. В окрестности боковых кромок появляются линии растекания газа, а геометрические линии симметрии не обязательно будут линиями растекания. Газ от этой линии растекается на подветренную сторону и к плоскости симметрии по всей толщине пограничного слоя. Изменение кривизны тела в начале крыльев вызывает сильное возмущение течения. На подветренной стороне обращает внимание обтекание кабины. Линии тока, огибая выступающую часть кабины, сходятся в одной точке. Такое течение газа обусловлено распределением давления в окрестности кабины.

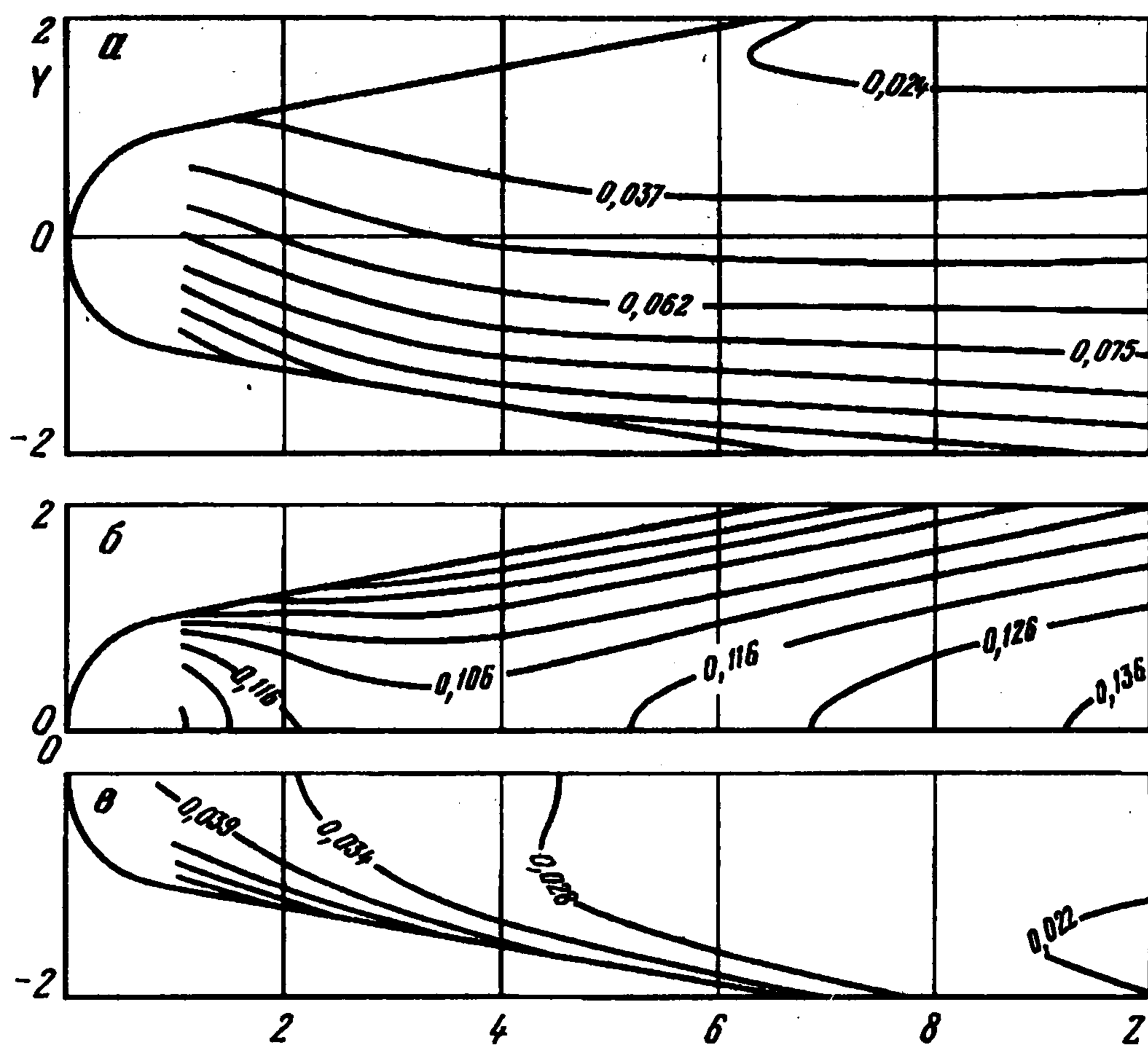
Локальный максимум значения коэффициента трения и теплового потока, лежащий поблизости от боковой кромки, соответствует линии растекания на наветренной стороне. Большой перепад давления, вызванный наличием зон сильного сжатия и сильного разряжения, разгоняет газ от кромки поперек крыла. Этим объясняется

$St_{\infty, rel}$



Фиг. 3

³ Погорелов Н.В., Шевелев Ю.Д. Численное исследование сверхзвукового обтекания передней части затупленных тел под большими углами атаки. Препринт. № 175. М.: ИПМ АН СССР. 1981. 52 с.



Фиг. 4

появление локального максимума в коэффициентах трения и тепловом потоке на стенку, причем этот максимум может превосходить локальный максимум вблизи кромки крыла.

На фиг. 3 приводится сравнение относительного значения коэффициента теплопередачи $(St_{\infty})_{rel} = St_{\infty}/St_{\infty}$ ($\xi = 1$), полученного аналитически (сплошные линии) и численным методом (штрихи) вдоль координатных линий $\eta = 80^{\circ}$ (1) и 100° (2), расположенных на боковой кромке. Хорошее совпадение результатов отмечается в окрестности линии растекания. В других частях тела аналитическое исследование носит качественный характер.

Представлены результаты численного исследования свойств течения и теплообмена при обтекании кругового конуса, затупленного по сфере, с углом полураствора $\theta_c = 10^{\circ}$ потоком сжимаемого газа под углом атаки $\alpha = 10^{\circ}$ при $M_{\infty} = 5,96$, $\gamma = 1,4$. На основе полученных расчетных результатов анализируется влияние ряда определяющих параметров на развитие пространственных течений.

Граничное условие на поверхности для уравнений притока тепла задавалось как

$$q_w + q_w^R = 0, \quad q_w^R = \epsilon \sigma T_w^4 \quad (5.1)$$

т.е. переизлучение энергии на поверхности происходит по закону Стефана–Больцмана. По параметрам газа в набегающем потоке и заданному ϵ определяется число Больцмана $B_{\infty} = \rho_{\infty} v_{\infty} c_p / (\epsilon \sigma T_{\infty}^3)$, которое входит в граничное условие (5.1).

В численных расчетах линеаризация граничного условия (5.1) осуществлялась по методу Ньютона.

Поле внешнего невязкого обтекания задано в соответствии с данными, представленными ранее (см. сноску³), распределение компонент скорости которого пересчитывалось к компонентам погранслойной системы координат. Поле изобар на поверхности тела в проекциях на вертикальную и горизонтальную плоскости представлено на фиг. 4, а, б, в только для сверхзвуковой части обтекания. Локальные максимумы давления реализуются на наветренной линии растекания в плоскости симметрии. На фиг. 4, а заметно сгущение изобар на наветренной стороне и уменьшение его значений при отходе от этой линии на подветренную сторону конуса, где располагаются области минимальных значений в плоскости симметрии.

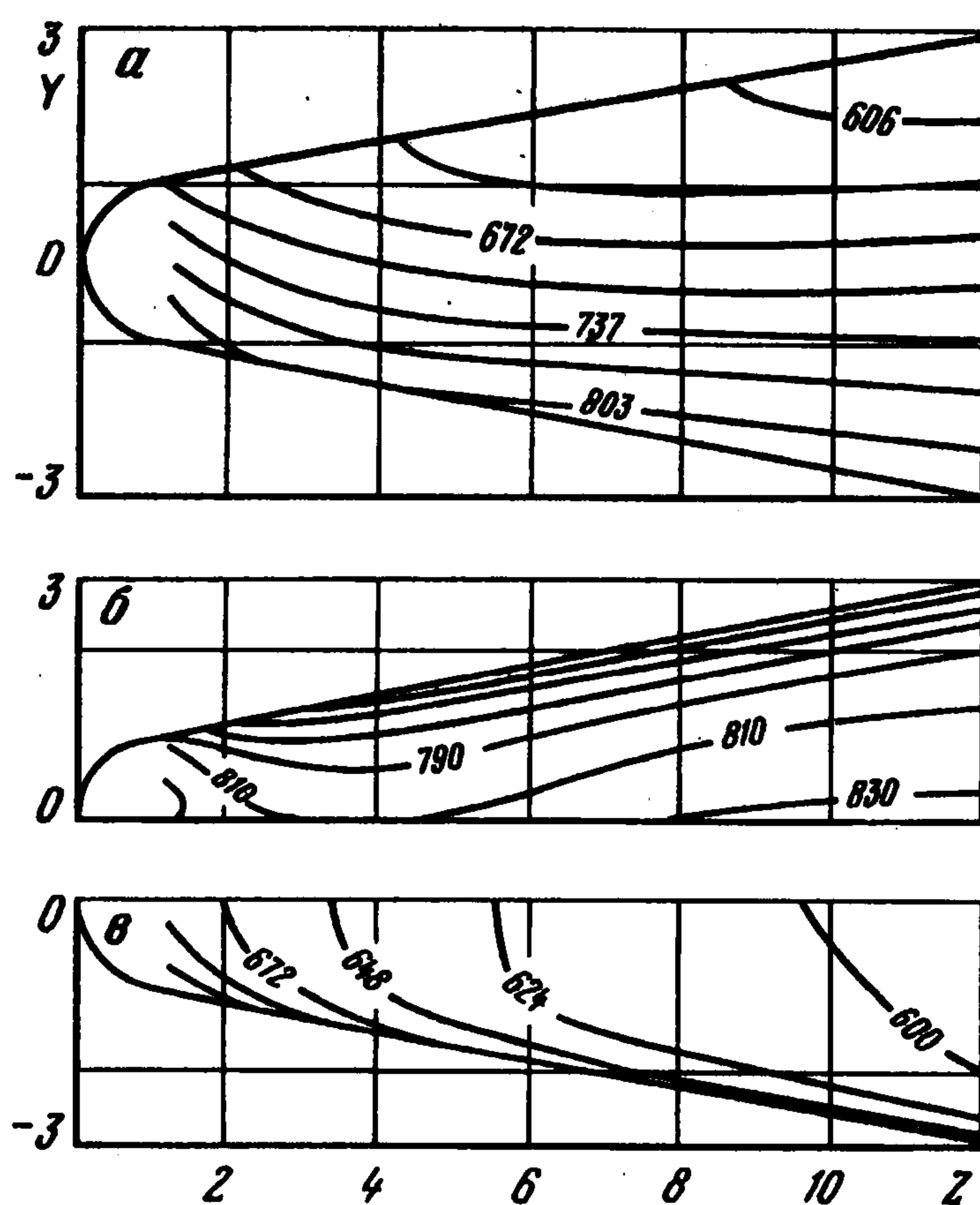
Для случая равновесной радиационной температуры поверхности T_{rw} – условие (5.1), проведены численные исследования для ламинарного и турбулентного режимов для высоты $H = 35$ км, $\epsilon = 0,8$. Для ламинарного режима распределения изолиний значений T_{rw} монотонны как на наветренной, так и подветренной сторонах. Температура убывает с возрастанием η от наветренной плоскости симметрии до подветренной, вниз по потоку значения T_{rw} также уменьшаются. В сечении $Z = 10$ разность значений температуры наветренной и подветренной сторон возрастает с увеличением z и превосходит 120°K .

Вариант расчета, соответствующий турбулентному режиму течения с числом Рейнольдса $Re_\infty = 2,5 \cdot 10^7$, приводится на фиг. 5, а, б, в: а – проекции изобар T_{rw} на вертикальную плоскость; б – проекции на горизонтальную плоскость наветренной стороны; в – проекции на горизонтальную плоскость подветренной стороны. Значения T_{rw} отличаются от соответствующих значений ламинарного режима более чем на 200°K , при этом отмечается немонотонность в распределениях T_{rw} и q_w на наветренной стороне начального участка течения. Максимальные значения T_{rw} реализуются на линии растекания, совпадающей с линией симметрии наветренной стороны; значения температуры стенки подветренной стороны более чем на 200°K меньше значений наветренной.

Величина толщины вытеснения пограничного слоя δ^* характеризует его обратное влияние слоя на внешнее невязкое течение. Для оценки значений δ^* в ряде случаев возможно определять величину δ_1^* . На наветренной стороне она сохраняет почти постоянное значение, при переходе через боковую кромку ее значения резко возрастают. Отмечается общий рост значений δ_1^* при движении вниз по потоку для фиксированных η .

Наибольшие значения δ_1^* имеет на подветренной стороне. Наибольшее утоньшение энтропийного слоя согласно невязким данным отмечается в тех же зонах, где наблюдается минимум толщин пограничного слоя. Так, для расчетных значений параметров при $\xi \geq 15,0$ в потоке имеются участки, где толщина вытеснения пограничного слоя заметно возрастает и возникает необходимость в учете вихревого эффекта. По расчетным данным пограничного слоя и невязкого поля течения определяется диапазон изменения параметров задачи, при котором имеет место поглощение энтропийного слоя пограничным [12, 13]. В рассматриваемом случае заданных параметров влияние переменной энтропии вдоль границы пограничного слоя начинает сказываться на больших расстояниях от затупления ($z \geq 15$), с возрастанием числа Рейнольдса Re_∞ влияние вихревого эффекта на теплообмен падает.

Распределения полного локального трения τ_w на поверхности характеризуется коэффициентом $C_{f,\infty} = 2\tau_w / (\rho_\infty v_\infty^2)$. Распределения значений $C_{f,\infty}$ вдоль линий $\gamma = \text{const}$ в зависимости от ξ имеют вид подобный распределениям T_{rw} . Наибольшие значения локального трения реализуются на наветренной линии растекания $\eta = 0$. Вдоль боковой кромки $\eta = 80-90^\circ$ изменения трения τ_w незначительны. На подветренной стороне конуса значения $C_{f,\infty}$ монотонно уменьшаются вниз по потоку для всех кривых. Причем их падение наиболее



Фиг. 5

интенсивное в плоскости симметрии $\eta = 180^\circ$. Здесь на линии стекания значения $C_{f,\infty}$ минимальны.

Представленные результаты показывают, что максимальные значения теплового потока q_w и локального трения τ_w реализуются в основном на линиях растекания, минимальные соответствуют линиям стекания на поверхности тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексин В.А., Шевелев Ю.Д. Пространственный турбулентный пограничный слой на теле сложной формы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 25–35.
2. Алексин В.А., Казейкин С.Н. Теплообмен в пространственном пограничном слое при обтекании тела сложной формы под большими углами атаки // Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации. 1987. М.: Наука, 1988. С. 121–133.
3. Hirshel E.H., Kordulla W. Shear Flow in Surface-Oriented Coordinates // Braunschweig, Wissbaden: Vieweg, 1981. 266 p. (Notes on Numerical Fluid Mechanics. V. 4) = Хиршель Э.Н., Кордулла В. Сдвиговое течение сжимаемой жидкости. М.: Мир, 1987. 248 с.
4. Wang K.C. On the determination of the zones of influence and dependence for three-dimensional boundary layer equations // J. Fluid Mech. 1971. V. 48. Pt. 2. P. 397–404.
5. Федяевский К.К., Гиневский А.С., Колесников А.В. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1973, 256 с.
6. Ротта Ю.Х. Семейство моделей турбулентности для трехмерных пограничных слоев // Турбулентные сдвиговые течения. М.: Машиностроение, 1982. Т. 1. С. 279–290.
7. Bradshaw P. Calculation of three-dimensional turbulent boundary layers // J. Fluid Mech. 1971. V. 46, Pt. 3. P. 417–445.
8. Максин П.Л., Петухов Б.С., Поляков А.Ф. Расчет турбулентного переноса тепла при стабилизированном течении в трубах // Теплообмен – V: Минск. Ин-т тепло- и массообмена, 1976. Т. 1. С. 14–24.
9. Петухов И.В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука. 1964. С. 304–325.
10. Three-Dimensional Turbulent Boundary-Layer // IUTAM Symposium, 1982 / Ed. by H.H. Fernholz, E. Krause. Berlin: Springer, 1982. 389 p.; = Трехмерные пограничные слои. М.: Мир, 1985. 384 с.
11. Турский Г.А., Ковач Э.А. Применение метода последовательных приближений к интегрированию уравнений пограничного слоя. Докл. АН СССР, 1969. Т. 190. № 1. С. 61–64.
12. Авдугевский В.С. Влияние кривизны ударной волны на теплообмен при трехмерном обтекании тел сверхзвуковым потоком // Исследование теплообмена в потоках жидкости и газа. М.: Машиностроение, 1965. С. 29–54.
13. Елькин Ю.Г., Ермак Ю.Н., Липатов И.И., Нейланд В.Я. Поглощение энтропийного слоя на затупленном конусе в гиперзвуковом потоке вязкого газа // Учен. зап. ЦАГИ. 1983. Т. 14. № 1. С. 18–25.