УДК 532.5

© 1995 г. А.В. Марченко

О ГАМИЛЬТОНОВОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Найдены канонические переменные для уравнений потенциального движения идеальной жидкости в произвольных криволинейных эйлеровых и лагранжевых системах координат. Граничные условия записываются в гамильтоновой форме с гамильтонианом, равным полной энергии жидкости. Главная цель работы – развитие гамильтонова подхода к исследованию нелинейных волновых процессов в объемах идеальной жидкости нетривиальной геометрической формы.

Эволюционные волновые задачи сводятся, как правило, к нахождению и анализу решений "укороченных" уравнений типа мелкой воды, Кортевега-де Вриза, нелинейного уравнения Шредингера и др. [1–4]. Методы решений этих уравнений хорошо разработаны [1–5]. Свойства получающихся решений существенно зависят от дисперсионного соотношения и коэффициентов при нелинейных членах.

Нахождение коэффициентов при нелинейных членах "укороченных" уравнений связано с проведением громоздких асимптотических разложений в исходной системе уравнений [2, 4, 6, 7]. Для упрощения разложений использовался вариационный принцип Льюка [7] или гамильтонов подход [3, 7–9]. При использовании этих методов асимптотические разложения проводятся только в одном функционале (лагранжиане или гамильтониане), а "укороченные" уравнения находятся из вариационного принципа автоматически, что значительно уменьшает объем алгебраических вычислений.

При исследовании потенциальных движений жидкости с деформируемой границей применяются уравнения Лагранжа [11, 12]. В качестве обобщенных координат могут быть выбраны нормальные смещения границы. Обобщенными силами при этом являются силы давления, действующие на границе жидкости. Этот подход эквивалентен рассматриваемому в данной работе гамильтонову формализму в лагранжевой системе координат.

Были найдены [8] канонические переменные для уравнений потенциальных движений бесконечно глубокого слоя идеальной жидкости со свободной поверхностью, записанных в декартовой эйлеровой системе координат. Получены [9] канонические переменные для потенциальных движений многослойной идеальной жидкости в декартовой системе координат и построен соответствующий гамильтониан.

1. Расчет безвихревого движения объема V идеальной несжимаемой жидкости сводится к решению уравнения Лапласа с граничными условиями, которые в инвариантной геометрической записи имеют вид:

$$g^{ij}\nabla_i \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} = 0, \quad x^i \in V, \quad i = 1,2,3 \tag{1.1}$$

$$d\Gamma^f/dt = 0, \quad F + p^f/\rho = 0, \quad x^i \in \partial V^f \tag{1.2}$$

$$d\Gamma^r/dt = 0, \quad x^i \in \partial V^r \tag{1.3}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + g^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}, \quad f = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}g^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j} + U$$

Здесь $\varphi(x^i, t)$ – потенциал скоростей в произвольной криволинейной эйлеровой системе координат x^i, g^{ij} – метрический тензор евклидова пространства, ∇_i – символ ковариантного дифференцирования, $U(x^i, t)$ – потенциал внешних массовых сил, $p^f(x^i \in \partial V^f, t)$ – внешнее давление, действующее на свободную поверхность жидкости ∂V^f, $\rho = \text{const}$ – плотность жидкости. Предполагается, что граница ∂V объема V состоит из двух частей: ∂V^f и ∂V^r. Поверхность ∂V^f свободна и описывается уравнением $\Gamma^f(x^i, t) = 0$, поверхность ∂V^r – твердая подвижная стенка, и ее движение определяется уравнением $\Gamma^r(x^i, t) = 0$.

Решение уравнения Лапласа в объеме V определяется единственным образом, если известны значения потенциала φ^f на границе ∂V^f, функция Γ^f и выполняется условие (1.3). Поэтому полная энергия жидкости E, потенциал φ и давление p-функционалы φ^f и Γ^f. Граничные условия (1.2) определяют эволюцию граничного значения потенциала φ^f и формы свободной границы. Давление во всем объеме жидкости определяется после нахождения φ формулой

$$p = -\rho E \tag{1.4}$$

Предполагается, что эйлерова система координат может быть выбрана так, что в течение конечного времени выполняется равенство $\Gamma^{f,r} = h^{f,r}(x^1, x^2, t) - x^3$, координатные линии x^3 не имеют касаний с поверхностью ∂V и область изменения x^1, x^2 не зависит от времени. Далее для нахождения канонических переменных будут использованы координатные преобразования не изменяющие направление базисного вектора e_3, касательного к координатной линии x^3.

2. Полная энергия E равна сумме кинетической и потенциальной энергии жидкости и определяется формулой

$$E = T + \Pi, \quad T = \frac{1}{2}\int\limits_V g^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}dV, \quad \Pi = \int\limits_V U dV$$

Изменение E в процессе движения равно работе сил давления на поверхностях ∂V^f и ∂V^r

$$\delta E = -\int\limits_{\partial V^f} p^f \frac{\delta h^f ds}{\rho|\nabla\Gamma^f|} - \int\limits_{\partial V^r} p^r \frac{\delta h^r ds}{\rho|\nabla\Gamma^r|} \tag{2.1}$$

$$|\nabla\Gamma^{f,r}|^2 = g^{ij}\frac{\partial\Gamma^{f,r}}{\partial x^i}\frac{\partial\Gamma^{f,r}}{\partial x^j}, \quad \partial\Gamma^{f,r} = \delta h^{f,r}$$

(p^r – давление жидкости на твердую стенку). Заметим, что в (1.5) величина p^f задана, а p^r определяется по формуле (1.4).

Вычислим δE, полагая, что $\delta h^f = \delta h^r$ на граничной линии между ∂V^f и ∂V^r. Вариация значений $\Phi^{f,r}(x^1, x^2, t)$ произвольной функции $\Phi(x^i, t)$ на ∂V связана с ее вариацией в фиксированной точке пространства следующим образом:

$$\delta\Phi^{f,r} = (\delta\Phi + \nabla_3\Phi\delta h)^{f,r}, \quad \Phi^{f,r} = \Phi(x^i \in \partial V^{f,r})$$

Используя теорему Гаусса–Остроградского и формулу интегрирования по частям, находим

$$\delta E = -\frac{1}{2}(I_\Gamma^f + I_\varphi^f + I_\Gamma^r + I_\varphi^r) + \int\limits_{S^f}[U\delta h\sqrt{g}]^f dx^1dx^2 + \int\limits_{S^r}[U\delta h\sqrt{g}]^r dx^1dx^2 \tag{2.2}$$

$$I_\Gamma^{f,r} = \int\limits_{S^{f,r}}\left[\nabla_3\left(\frac{\partial\Gamma^{f,r}}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\varphi\right)g^{ij}\sqrt{g} - (1-\delta_{i3})\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}g^{ij}\sqrt{g}\right) + \right.\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}g^{ij}\sqrt{g}\right)\frac{\partial\Gamma^{f,r}}{\partial x^i}\Bigg]\Bigg]^{f,r}\delta h^{f,r}dx^1dx^2$$

$$I_\varphi^{f,r}=\int_{S^{f,r}}\left[g^{ij}\delta\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right)\frac{\partial\Gamma^{f,r}}{\partial x^j}\sqrt{g}\right]^{f,r}dx^1dx^2$$

Области $S^{f,r}$ – проекции поверхностей $\partial V^{f,r}$ на плоскость (x^1, x^2).

Преобразуем сумму $I_\varphi^f+I_\varphi^r$, учитывая, что $\delta\varphi$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$I_\varphi^f+I_\varphi^r=\int_V\nabla^i\left(\delta\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}+\varphi\frac{\partial\delta\varphi}{\partial x^i}\right)dV=2\int_V\nabla^i\left(\delta\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right)dV=$$

$$=2\int_{S^f}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\Gamma^f}{\partial x^j}g^{ij}\sqrt{g}\delta\varphi\right]^f dx^1dx^2+2\int_{S^r}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\Gamma^r}{\partial x^j}g^{ij}\sqrt{g}\delta\varphi\right]^r dx^1dx^2$$

Выполняя дифференцирование под знаком интегралов $I_\Gamma^{f,r}$, находим

$$I_\Gamma^{f,r}=\int_{S^{f,r}}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\sqrt{g}+\varphi\frac{\partial\Gamma^{f,r}}{\partial x^i}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^3}\right)g^{ij}\right]^{f,r}\delta h^{f,r}dx^1dx^2$$

Сделаем замену координат

$$y^1=x^1,\quad y^2=x^2,\quad y^3=\int_h^{x^3}\sqrt{g}dx^3,\quad h=h(x^1,x^2),\quad (x^1,x^2)\in S^{f,r}$$

(h – произвольная функция от x^1, x^2), не изменяющую направление векторов базиса ϵ_3. Якобиан этой замены равен $\sqrt{g}$. Поэтому значение $\sqrt{g}$ в новой системе координат равно единице и можно написать

$$\frac{\delta E}{\delta\varphi^f}=-\frac{\partial\varphi}{\partial y^i}\frac{\partial\Gamma^f}{\partial y^j}g^{ij},\quad \frac{\delta E}{\delta\eta}=\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial y^i}\frac{\partial\varphi}{\partial y^j}g^{ij}-\frac{\partial\varphi}{\partial y^i}\frac{\partial\Gamma^f}{\partial y^j}\frac{\partial\varphi}{\partial y^3}g^{ij}$$

$$y^i\in\partial V^f,\quad \eta=\int_h^{h^f}\sqrt{g}dx^3$$

Вариация $(\delta\varphi)^r=(\partial\varphi/\partial t)^r\delta t$ функционально зависит от $\delta\varphi^f$, δh^f. Поэтому из (1.4) следует, что сумма интегралов по поверхности S^r в (2.3) равна

$$-\int_{\partial V^r}p^r\frac{\delta h^r ds}{\rho|\nabla\Gamma^r|}$$

Отсюда вытекает

Утверждение. Эволюция свободной границы объема идеальной жидкости, определяемой уравнением $x^3=h^f(x^1, x^2, t)$, и значение потенциала скоростей φ^f на ней определяются в произвольной криволинейной эйлеровой системе координат с метрикой g^{ij} каноническими уравнениями Гамильтона

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{\delta H}{\delta(\varphi^f)},\quad \frac{\partial\varphi^f}{dt}=-\frac{\delta H}{\delta\eta}\qquad(2.3)$$

причем гамильтониан определяется формулой

$$H=E+\int_{\partial V^f}p^f\frac{h^f ds}{\rho|\nabla\Gamma^f|}-\int_{\partial V^r}\frac{\partial h^r}{\partial t}\varphi^r\frac{ds}{|\nabla\Gamma^r|}\qquad(2.4)$$

При вычислении гамильтониана полагается, что значение φ во всем объеме движения V связано с канонической переменной φ^f также, как решение уравнения Лапласа (1.1) с граничным условием (1.3) связано с граничным значением потенциала φ на ∂V^f.

Каноническая переменная η имеет наглядный геометрический смысл. Полагая $h = h^f(x^1, x^2, t = 0)$, находим, что величина $\eta(x^1, x^2, t)dx^1dx^2$ равна элементарному объему δV, проходимому элементарной площадкой, лежащей на свободной поверхности жидкости, в направлении оси x^3 за время t.

Для примера рассмотрим канонические переменные для движений, которые удобно изучать в цилиндрической или сферической системах координат. В первом случае имеем

$$x^1 = r, \quad x^2 = \phi, \quad x^3 = z, \quad g_{11} = 1, \quad g_{22} = r, \quad g_{33} = 1$$

$$g_{ij} \neq 0 \quad \text{при} \quad i = j, \quad \sqrt{g} = r$$

Предположим, что свободная поверхность жидкости ∂V^f описывается уравнением $r = h^f(\phi, z, t)$. В этом случае каноническими переменными являются значения потенциала φ^f на ∂V^f и

$$\eta = \int_0^{h^f} r dr = \frac{1}{2}(h^f)^2$$

Для сферической системы координат находим

$$x^1 = r, \quad x^2 = \theta \text{ (полярный угол)}, \quad x^3 = \lambda \text{ (долгота)}$$

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r, \quad g_{33} = r^2\sin^2\theta, \quad g_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \qquad \sqrt{g} = r^2$$

Если свободная поверхность ∂V^f жидкости описывается уравнением $r = h^f(\theta, \lambda, t)$, то каноническими переменными служат φ^f и

$$\eta = \int_0^{h^f} r^2 dr = \frac{1}{3}(h^f)^3$$

Рассматриваемый подход можно распространить на исследование движения жидких объемов с учетом безынерционных и недиссипативных поверхностных явлений на границе ∂V^f, для которых связь поверхностной энергии W с формой поверхности ∂V^f находится из уравнения $-p^f + p_d^f = \delta W/\delta\eta$, где p_d^f – давление в жидкости вблизи ее неизвестной поверхности. В этом случае гамильтониан равен сумме выражения (2.5) и W. Простейшим примером является гамильтонов формализм для потенциальных движений в слое жидкости под упругой пластиной [13].

3. Рассмотрим лагранжев подход к исследованию потенциальных движений идеальной жидкости. Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ координатные оси лагранжевой системы ξ^i, $i = 1, 2, 3$ совпадают с осями x^i эйлеровой системы. Каждой жидкой частице при этом соответствуют ее лагранжевы координаты ξ^i и вектор смещения $u^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$. При безвихревых движениях компоненты скорости частиц жидкости $v^j = \overset{\circ}{g}{}^{ij}\partial\varphi/\partial\xi^i$, где $\overset{\circ}{g}{}^{ij}$ – метрический тензор лагранжевой системы при $t = 0$ [14].

Выберем эйлерову систему координат x^i таким образом, чтобы ее базисные векторы в точках, проходимых свободной поверхностью жидкости, совпадали с базисными векторами лагранжевой системы ξ^i в тех же точках. В этом случае для канонической переменной η имеем

$$\eta = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g} v^3 dt \tag{3.1}$$

Здесь g – определитель метрического тензора $g^{ij}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ лагранжевой системы на свободной поверхности жидкости. Величина $\eta d\xi^1 d\xi^2$ – элементарный объем, проходимый частицей жидкости, лежащей на ее свободной поверхности, за время t.

Уравнения Гамильтона имеют в лагранжевых переменных вид (2.4), причем η определяется формулой (3.1). Гамильтониан определяется выражением

$$H = E + \int_{S^f} p^f u^3 \sqrt{\overset{\circ}{g}} d\xi^1 d\xi^2 - \int_{S^r} \frac{\partial u^3}{\partial t} \varphi^r \sqrt{\overset{\circ}{g}} d\xi^1 d\xi^2$$

$$E = T + \Pi, \quad T = \frac{1}{2} \int_V \overset{\circ}{g}{}^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^i} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^j} \sqrt{\overset{\circ}{g}} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3, \quad \Pi = \int_V U \sqrt{\overset{\circ}{g}} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$$

Лагранжев подход удобно использовать, когда области $S^{f,r}$ в эйлеровой системе координат изменяется в процессе движения.

Было показано [11, 12], что для исследования потенциальных движений идеальной жидкости в потенциальном поле внешних сил можно использовать уравнения Лагранжа, где в качестве обобщенных координат выбираются нормальные смещения границы жидкости δx_n, и функция Лагранжа L равна разности кинетической и потенциальной энергии жидкости. Видно, что выполняется равенство $\delta\eta = \delta x_n$. Поэтому рассматриваемый здесь гамильтонов подход эквивалентен лагранжевому и функция $\varphi^f = \delta L/\delta\eta$ является обобщенным импульсом.

4. Для исследования системы уравнений (2.4) при изучении большого класса частных движений, когда одна из эйлеровых пространственных переменных изменяется на ограниченном интервале (a, b) и функции $(\eta, \varphi^f) \in L_2(a, b)$, удобно применять ортогональные преобразования по этой переменной с весом $\sqrt{g}$. Например,

$$\eta(x^1, x^2, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \eta_m(x^1, t) f_m(x^2), \quad \varphi^f(x^1, x^2, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(x^1, t) f_m(x^2) \tag{4.1}$$

$$\int_a^b f_m f_n \sqrt{g} dx^2 = \delta_{mn}$$

В формулах (4.1) интервал (a, b) – область изменения переменной x^2 в процессе движения.

Подставляя (4.1) в выражение для вариации гамильтониана и выполняя интегрирование, находим

$$\frac{\partial \eta_m}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \varphi_m}, \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \eta_m} \tag{4.2}$$

Далее везде будет использована система координат, где $\sqrt{g} = 1$. При выборе в качестве ортогональной системы функций тригонометрического ряда в комплексной форме имеем

$$\frac{\partial \eta_m}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \varphi_m^*}, \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \eta_m^*} \tag{4.3}$$

Звездочка означает комплексное сопряжение, m – номер гармоники.

При исследовании локализованных движений в неограниченных областях при $x^2 \in (-\infty, \infty)$ удобно применять интегральное преобразование Фурье по x^2. В этом случае для Фурье-образов F_η и F_φ функций η и φ^f аналогично (4.4) находим

$$\frac{\partial F_\eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta F_m^*}, \quad \frac{\partial F_\varphi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta F_\eta^*} \tag{4.4}$$

Уравнения типа (4.3) использовались [15, 16] при исследовании процессов резонансного возбуждения периодических внутренних и поверхностных волн в жидком слое переменным давлением на его поверхности. В этом случае стационарные вынужденные решения соответствуют экстремальным точкам гамильтониана. Построение этих решений сводится к анализу решений бесконечномерной алгебраической системы уравнений, вытекающей из (4.3) при $\partial\eta/\partial t = 0$, $\partial\varphi^f/\partial t = 0$. Было показано, что решения этой системы для волн малой амплитуды могут быть получены в виде асимптотических рядов. Зная значение гамильтониана на начальных данных и в экстремальных точках можно делать выводы о возможности выхода решения на стационарный режим из начального состояния.

Уравнения (4.4) использовались [3, 6] для изучения нелинейного взаимодействия волновых пакетов на свободной поверхности однородного слоя жидкости.

Рассмотрим усредненное гамильтоново описание слабомодулированных волновых пакетов, распространяющихся на однородном фоне, для которых

$$\eta = \sum_m \eta_m(t,\mu\mathbf{x})\exp(i\mathbf{k}_m\mathbf{x}), \quad \varphi^f = \sum_m \varphi_m(t,\mu\mathbf{x})\exp(i\mathbf{k}_m\mathbf{x}) \tag{4.5}$$

$$\nu = (Lk_{\min})^{-1} \ll 1, \quad \mathbf{k}_m = (k_m^1, k_m^2), \quad \mathbf{x} = (x^1, x^2)$$

где μ – параметр дисперсии, L – характерный масштаб пространственной модуляции. Предполагается, что $\mathbf{k}_m$ – всевозможные линейные комбинации нескольких заданных волновых векторов $\mathbf{k}_1^0, \mathbf{k}_2^0, \ldots, \mathbf{k}_N^0$ и $k_{\min} = \min(|\mathbf{k}_1^0|, |\mathbf{k}_2^0|, \ldots, |\mathbf{k}_N^0|)$. Переменные η_m – медленно меняющиеся амплитуды волн с волновыми векторами $\mathbf{k}_m$.

Подставляя выражения (4.5) в (2.5), находим

$$H = H_0 + H_1 \tag{4.6}$$

$$H_0 = \int_{F^f} \Omega(\mu\mathbf{x},t)dx^1dx^2, \quad H_1 = \sum_m \int_{S^f} \Omega_m(\mu\mathbf{x},t)\exp(i\mathbf{k}_m\mathbf{x})dx^1dx^2$$

Введем следующее обозначение для среднего значения произвольной функции $\Phi(\mathbf{x})$:

$$\Phi^l(\mathbf{x}) = \underbrace{\int \int_{x^1}^{x^1+\Delta} \ldots \int}_{l} \underbrace{\int \int_{x^2}^{x^2+\Delta} \ldots \int}_{l} \Phi(\mathbf{x}) \underbrace{dx^1 \ldots dx^1}_{l} \underbrace{dx^2 \ldots dx^2}_{l} / \Delta^{2l}$$

$$\Delta = k_{\min}^{-1}, \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Подставляя выражения (4.5) в (2.4), умножая полученные уравнения на $\exp(-ikx)$ и вычисляя затем средние значения от обеих частей получаемых уравнений, находим

$$\frac{\partial\eta_m^l}{\partial t} = \frac{\delta H_0}{\delta(\varphi_m^l)^*} + O(\mu^l), \quad \frac{\partial\varphi_m^l}{\partial t} = -\frac{\delta H_0}{\delta(\eta_m^l)^*} + O(\mu^l) \tag{4.7}$$

Дальнейшее упрощение системы уравнений (4.7), как правило, связано с разложениями функций по степеням малого параметра ε, характеризующего нелинейность задачи и пропорционального амплитудам волновых пакетов. Коэффициенты при различных степенях нелинейных членов в асимптотических разложениях зависят от метрики используемой системы координат и формы известной границы жидкого объема.

Автор благодарит А.Г. Куликовского и Г.А. Алексеева за замечания по результатам работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-17355).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 480 с.
2. *Овсянников Л.В., Макаренко Н.И., Налимов В.И. и др.* Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. 318 с.
3. *Захаров В.Е.* Гамильтоновский формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. № 4. С. 431–453.
4. *Сибгатуллин Н.Р.* К теории узкополосных волновых пакетов на свободной поверхности // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, Механика. 1991. № 6. С. 70–75.
5. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.
6. *Юнг Г., Лэйк Б.* Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде. М.: Мир, 1987.
7. *Уизем Дж.Б.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
8. *Захаров В.Е.* Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // ПМТФ. 1968. № 2. С. 86–94.
9. *Гатиньоль Р., Сибгатуллин Н.* Канонические переменные и принцип Гамильтона для стратифицированной жидкости // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, Механика. 1993. № 3. С. 72–76.
10. *Гончаров В.П., Павлов В.И.* Проблемы гидродинамики в гамильтоновом описании. М.: Изд-во МГУ. 1993. 197 с.
11. *Биркгоф Г.* Гидродинамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. 184 с.
12. *Петров А.Г.* Вариационные методы в динамике несжимаемой жидкости. М.: Изд-во МГУ, 1985. 103 с.
13. *Марченко А.В., Шрира В.И.* К теории двумерных нелинейных волн в жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 4. С. 125–133.
14. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
15. *Марченко А.В., Сибгатуллин Н.Р.* О резонансном возбуждении длинных волн в двухслойной жидкости переменным давлением на свободной поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 2. С. 90–98.
16. *Марченко А.В.* О резонансном возбуждении волн в тяжелой жидкости под вязкоупругой пластиной // ПМТФ. 1991. № 3. С. 101–108.

Москва

Поступила в редакцию
23.XI.1993