УДК 531.36

© 1995 г. **И.И. Косенко**

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА В ДИНАМИКЕ ЛАГРАНЖА

Рассматривается процедура аппроксимации решения задачи Коши в лагранжевой механике. Применяется методика, основанная на одном из вариантов метода Галеркина. При этом динамическую систему следует преобразовать к каноническому виду. Установлена эквивалентность упомянутого алгоритма аппроксимации и процедур, основанных на вариационных формулировках задачи Коши в динамике Лагранжа. В качестве примера рассмотрена процедура приближенного построения решения уравнения Матье.

1. Редукция к системе Гамильтона. Предложенная автором [1] методика является эквивалентом широко распространенных алгоритмов решения задачи Коши в голономной механике при помощи вариационных принципов. Пусть на отрезке времени $[t_0, t_1]$ необходимо найти аппроксимацию движения голономной механической системы с обобщенными координатами $q_1, q_2,..., q_n$ и кинетической энергией

$$T(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = T_2(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + T_1(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + T_0(t,\mathbf{q})$$

где T_i $(i = 0, 1, 2)$ – однородные по скоростям функции, а T_2 положительно определена. Пусть, кроме того, функция $\mathbf{Q}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbf{R}^n$ представляет собой вектор обобщенных сил.

К уравнениям движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} \tag{1.1}$$

в задаче Коши следует добавить начальные условия

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}^0, \quad \dot{\mathbf{q}}(t_0) = \dot{\mathbf{q}}^0 \tag{1.2}$$

Считая, что функции $T(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$, $\mathbf{Q}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ достаточно гладкие, можем утверждать, что решение $\mathbf{q}(t)$ принадлежит пространству Соболева $H^2([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ (далее просто H_n^2) векторнозначных функций, интегрируемых с квадратом вместе со всеми производными до второго порядка включительно. В соответствии с условиями (1.2) пространство H_n^2 можно сузить до аффинного подпространства H_{n0}^2 функций, удовлетворяющих этим условиям. Соответствующее касательное пространство (пространство вариаций) $T_\mathbf{q}H_{n0}^2 = \mathring{H}_n^2$ состоит из функций $\delta\mathbf{q} \in H_n^2$, удовлетворяющих начальным условиям

$$\delta\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{0}, \quad \delta\dot{\mathbf{q}}(t_0) = \mathbf{0}$$

Теперь задачу Коши для системы уравнений (1.1) можно сформулировать следующим образом. Пусть на отрезке $[t_0, t_1]$ не нарушаются условия теоремы единственности для (1.1). Тогда решением $\mathbf{q}\in H_n^2$, удовлетворяющим условиям (1.2), будет функция $\mathbf{q}\in H_{n0}^2$. Элементы H_{n0}^2 можно представить в виде $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^0 + \mathbf{q}^1(t)$, где $\mathbf{q}^1 \in \overset{\circ}{H}{}_n^2$. Если $\mathbf{q}(t)$ – решение задачи Коши, то $\mathbf{q}(t) + \delta\mathbf{q}(t)$ $(\delta\mathbf{q}\in \overset{\circ}{H}{}_n^2)$ также вследствие единственности является решением в точности тогда, когда $\delta\mathbf{q}(t) \equiv \mathbf{0}$. Это условие можно заменить интегральной формой принципа Даламбера в виде уравнения работ на отрезке $[t_0, t_1]$

$$\int_{t_0}^{t_1}(\langle T_{\dot{\mathbf{q}}},\delta\dot{\mathbf{q}}\rangle+\langle T_{\mathbf{q}}+\mathbf{Q},\delta\mathbf{q}\rangle)dt-\langle T_{\dot{\mathbf{q}}},\delta\mathbf{q}\rangle\big|_{t_1}=0\ \ (\forall\delta\mathbf{q}\in \overset{\circ}{H}{}_n^2) \tag{1.3}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$.

Уравнение (1.3) трактуется [2–4] как принцип Гамильтона. Чтобы применить предлагаемую здесь методику, перейдем к гамильтоновой динамике, задаваемой переменными $\mathbf{q},\mathbf{p}=T_{\dot{\mathbf{q}}}$. Если $\mathbf{q}\in H_n^2$, то $\dot{\mathbf{q}}\in H_n^1 = H^1([t_0,t_1],\ \mathbf{R}^n)$. Поэтому при переходе к вектору канонических переменных $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})^{\mathrm{T}}$ в качестве функционального пространства траекторий следует взять $H_{2n}^1 = H^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^{2n})$. Задача Коши

$$\mathbf{q}(t_0)=\mathbf{q}^0,\ \ \dot{\mathbf{p}}(t_0)=\dot{\mathbf{p}}^0=T_{\dot{\mathbf{q}}}(t,\mathbf{q}^0,\dot{\mathbf{q}}^0)$$

сужает H_{2n}^1 до аффинного подпространства H_{2n0}^1, состоящего из функций $\mathbf{z}(t)$ таких, что $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}^0 = (\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0)^{\mathrm{T}}$. Касательным к H_{2n0}^1 в точке $\mathbf{z}\in H_{2n0}^1$ является линейное подпространство $\overset{\circ}{H}{}_{2n}^1$ функций $\delta\mathbf{z}(t)$ таких, что $\delta\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{0}$.

Так как

$$T(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})=\langle\mathbf{p}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}),\dot{\mathbf{q}}\rangle-K(t,\mathbf{q},\mathbf{p}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}))$$

то для вариации имеем

$$\delta T=\langle T_{\dot{\mathbf{q}}},\delta\dot{\mathbf{q}}\rangle+\langle T_{\mathbf{q}},\delta\mathbf{q}\rangle=\delta\langle\mathbf{p}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}),\dot{\mathbf{q}}\rangle-\langle K_{\mathbf{q}},\delta\mathbf{q}\rangle-\langle K_{\mathbf{p}},\delta p\rangle$$

Так что

$$\int_{t_0}^{t_1}(\langle\dot{\mathbf{q}}-K_{\mathbf{p}},\delta\mathbf{p}\rangle+\langle\dot{\mathbf{p}}-K_{\mathbf{q}}+\mathbf{Q},\delta\mathbf{q}\rangle)dt=0\ \ (\forall\delta\mathbf{z}=(\delta\mathbf{q},\delta\mathbf{p})^{\mathrm{T}}\in\overset{\circ}{H}{}_{2n}^1)$$

Оставим обозначение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ для скалярного произведения в $\mathbf{R}^{2n}$. Тогда уравнение (1.3) можно представить в эквивалентном виде

$$\int_{t_0}^{t_1}\langle -J\dot{\mathbf{z}}-K_{\mathbf{z}}+\mathbf{F},\delta\mathbf{z}\rangle dt=0\ \ (\forall\delta\mathbf{z}\in\overset{\circ}{H}{}_{2n}^1) \tag{1.4}$$

где J – симплектическая матрица в $\mathbf{R}^{2n}$, $K_{\mathbf{z}} = (K_{\mathbf{q}}, K_{\mathbf{p}})^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{F} = (\mathbf{P}, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}$.

Поскольку $\mathbf{z}\in H_{2n}^1$, то $\dot{\mathbf{z}}\in L_2 = L_2([t_0,t_1],\ \mathbf{R}^{2n})$. Значит первый сомножитель в (1.4) $-J\dot{\mathbf{z}}-K_{\mathbf{z}}+\mathbf{F}\in L_2$. Далее, известно, что пространство H_{2n}^1 непрерывно вложено в L_2 и плотно в нем. Поскольку $\overset{\circ}{H}{}_{2n}^1$ плотно в метрике L_2 в H_{2n}^1, то оно плотно и в L_2. Скалярное произведение пространства L_2 непрерывно в нем по каждому из своих аргументов. Уравнение (1.4) имеет место при любых $\delta\mathbf{z}\in L_2$, и значит, почти всюду на $[t_0, t_1]$ справедлива система уравнений Гамильтона

$$J\dot{\mathbf{z}}=-K_{\mathbf{z}}+\mathbf{F} \tag{1.5}$$

Более того, из (1.5) видно, что в правой части стоит функция, непрерывная по $t \in [t_0, t_1]$ (так как T и $\mathbf{P}$ считаются достаточно гладкими по своим аргументам). Поэтому на решении задачи Коши для системы Гамильтона (1.5) это равенство выполняется всюду на $[t_0, t_1]$. Умножая обе стороны (1.5) на симплектическую матрицу $-J$, получим систему уравнений в форме Коши

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Z}(t, \mathbf{z}) \quad (\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}) = JK_{\mathbf{z}}(t, \mathbf{z}) + (\mathbf{0}, \mathbf{P}(t, \mathbf{z}))^{\mathrm{T}}) \tag{1.6}$$

2. Проблема выбора базиса. Теперь можем применить результаты работ [1,5]. Фиксируем натуральное m и будем искать решение системы (1.6) в виде

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{z}_k \left[\cos k\pi \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} - 1 \right]$$

после чего можно применить подходы, описанные в [5]. Однако редукция, произведенная в [1], позволяет использовать метрику L_2 в пространстве производных $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{z}}$.

Как и в [1], рассмотрим пространство CA абсолютно непрерывных на $[t_0, t_1]$ со значениями $\mathbf{R}^{2n}$ функций. Пусть теперь

$$D\colon \mathrm{CA} \to L_1 = L_1([t_0, t_1], \mathbf{R}^{2n})$$

– оператор дифференцирования по переменной t: $(D\mathbf{z})(t) = \dot{\mathbf{z}}(t)$. Известно [1], что D сюръективен, так как первообразная любой суммируемой функции абсолютно непрерывна. Пространство CA может быть разложено в прямую сумму: $\mathrm{CA} \simeq \mathbf{R}^{2n} + \mathrm{CA}^0$, где CA^0 состоит из абсолютно непрерывных функций $\mathbf{z}(t)$ таких, что $\mathbf{z}(t_0) = 0$.

Известно также [1], что сужения

$$D\colon \mathrm{CA}^0 \to L_1, \quad D\colon \mathbf{z}^0 + \mathrm{CA}^0 \to L_1 \ (\mathbf{z}^0 \in \mathbf{R}^n)$$

являются гомеоморфизмами. В итоге задачу Коши для дифференциального уравнения (1.6) можно свести к функциональному $\mathbf{y} = T(\mathbf{y})$ в пространстве L_1 (или в L_2), где нелинейный оператор T задается формулой

$$(T(\mathbf{y}))(t) = \mathbf{Z}(t, (D^{-1}\mathbf{y})(t)), \quad (D^{-1}\mathbf{y})(t) = \mathbf{z}^0 + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}(\tau)d\tau$$

Тогда искомая аппроксимация допускает представление с неопределенными коэффициентами

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{y}_k \sin k\pi \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \tag{2.1}$$

Обозначая соответствующий проектор символом P_m можно получить систему уравнений Галеркина вида

$$\mathbf{y} = P_m T(\mathbf{y}) \quad (\mathbf{y} \in P_m L_2, \ m \in \mathbf{N})$$

причем группу из $2n$ уравнений, соответствующую k-й гармонике из (2.1), можно получить при помощи подстановки в (1.4) функции

$$\delta\mathbf{z} = \mathbf{e}_j \sin k\pi \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \quad (j = 1, 2, \ldots, 2n)$$

Таким образом, рассматриваемая в [2–4] процедура корректным образом трансформируется к форме Гамильтона, и лишь затем применяется метод Галеркина.

В самом деле, примеры динамических систем, рассмотренные в [2–4, 6, 7] таковы, что кинетическая энергия имеет постоянные, не зависящие от $\mathbf{q}$, коэффициенты. В этом случае преобразование Лежандра становится тривиальной операцией, что снимает многие проблемы при реализации проекционных алгоритмов. В работах [6, 7] в качестве функций базиса использовались полиномы Лежандра.

Итак, будем считать, что

$$T_2(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \tfrac{1}{2}\langle A\dot{\mathbf{q}},\dot{\mathbf{q}}\rangle,\quad T_1(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \langle \mathbf{a},\dot{\mathbf{q}}\rangle,\quad T_0(t,\mathbf{q}) \equiv 0$$

Постоянная величина T_0 может быть отброшена. Положительно определенная симметричная матрица A и вектор $\mathbf{a}$ состоят из постоянных элементов.

Покажем, что применение проекционного метода для уравнения (1.1) с условием (1.2) эквивалентно применению проекционного метода для уравнения

$$\mathbf{y} = JK_{\mathbf{z}}(\mathbf{y}) + (\mathbf{0},\mathbf{P}(\mathbf{y}))^{\mathrm{T}},\quad \mathbf{y} = (\dot{\mathbf{q}},\dot{\mathbf{p}})^{\mathrm{T}} \tag{2.2}$$

$$JK_{\mathbf{z}}(\mathbf{y}) = (B\mathbf{p}(\mathbf{y}) + \mathbf{b},0)^{\mathrm{T}},\quad B = A^{-1},\quad \mathbf{b} = -A^{-1}\mathbf{a}$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{y})(t) = \mathbf{P}(t,\mathbf{q}(\mathbf{y})(t),\ \mathbf{p}(\mathbf{y})(t))$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{y})(t) = \mathbf{q}^0 + \int_{t_0}^{t} \dot{\mathbf{q}}(\tau)d\tau,\quad \mathbf{p}(\mathbf{y})(t) = \mathbf{p}^0 + \int_{t_0}^{t} \dot{\mathbf{p}}(\tau)d\tau$$

Выписанные соотношения получены при помощи преобразования Лежандра $\mathbf{p} = A\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{a}$, откуда имеем $\dot{\mathbf{q}} = A^{-1}(\mathbf{p}-\mathbf{a})$. Кинетическая энергия в системе Гамильтона выражается по формуле

$$K(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p},\dot{\mathbf{q}}\rangle - T(\dot{\mathbf{q}}) = \tfrac{1}{2}\langle B\mathbf{p},\mathbf{p}\rangle + \langle \mathbf{b},\mathbf{p}\rangle$$

Применение метода Галеркина к уравнению работ (1.3) в силу начальных условий эквивалентного его применению к системе уравнений Лагранжа.

Рассмотрим проблему выбора функционального базиса. Оказывается, от этого зависит эквивалентность уравнений Галеркина для системы Гамильтона с одной стороны и системы Лагранжа – с другой.

В самом деле, рассмотрим сначала тригонометрические функции. Производная фазовая переменной $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})^{\mathrm{T}}$ может быть разложена по базису пространства L_2, состоящему из функций

$$\left\{\mathbf{e}_j \sin k\pi\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right\}\ (j = 1,2,\ldots,2n;\ k = 1,2,\ldots) \tag{2.3}$$

Тогда первообразная однозначно представляется в виде разложения по базису

$$\left\{\mathbf{e}_j \cos k\pi\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right\}\ (j = 1,2,\ldots,2n;\ k = 0,1,\ldots) \tag{2.4}$$

Пусть решение системы уравнений Галеркина вида (2.2), соответствующей задаче Коши для канонических уравнений, представляется в форме

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \sum_{j=1}^{2n}\sum_{k=1}^{m} z_{jk}\sin k\pi\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\mathbf{e}_j$$

В этом случае равномерная аппроксимация решения системы (1.6) может быть получена в виде

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{j=1}^{2n}\sum_{k=0}^{m} Z_{jk}\cos k\pi\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\mathbf{e}_j,$$

$$Z_{jk} = \frac{t_1-t_0}{\pi k}z_{jk}\quad (k = 1,2,\ldots,m)$$

$$Z_{j0} = z_j(t_0) - \frac{t_1-t_0}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{z_{jk}}{k}$$

Если аппроксимации координат и импульсов рассматривать отдельно, то будем иметь

$$\mathbf{q}(t)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{m}Q_{jk}\cos k\pi\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\mathbf{e}_j,$$

$$\mathbf{p}(t)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{m}P_{jk}\cos k\pi\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\mathbf{e}_j$$

$$Q_{jk}=Z_{jk},\quad P_{jk}=Z_{n+j,k}\quad (j=1,2,\ldots,n)$$

где базисные орты пространства $\mathbf{R}^n$ имеют те же обозначения, что и орты пространства $\mathbf{R}^{2n}$: $\mathbf{e}_j$.

С другой стороны, пусть в соответствии с методикой, представленной в [2–4, 6, 7], составлены уравнения Галеркина для системы уравнений Лагранжа и найдена аппроксимация решения задачи Коши. В соответствии с предыдущим используем базис (2.4). Затем непосредственной проверкой можно убедиться, что тригонометрические функции не являются удобным средством построения базиса для аппроксимаций методом Галеркина решения задачи Коши уравнений Лагранжа второго рода.

При этом возникает проблема обеспечения начальных условий или появляются секулярные члены при применении оператора D^{-1}. Здесь же заметим, что использование методик работ [1, 5] позволяет достичь результата при помощи тригонометрического базиса, если для представления динамики применять систему Гамильтона (или каким-либо образом преобразованную к форме Коши систему Лагранжа).

Оказывается, эквивалентность методик работ [2–4, 6, 7] и данной работы может быть установлена в базисах, составленных при помощи классических ортогональных многочленов. Пусть $\{p_k(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$ – одна из систем таких полиномов, определенных на отрезке $[-1,1]$. Отображение независимой переменной $t\to\tau$ удобно определить, например, по формуле

$$\tau=-2\frac{t-t_0}{t_1-t_0}+1$$

Один из вариантов приложения полиномов Чебышева для метода Галеркина можно найти в [5]. В дальнейшем, чтобы не загромождать текст выражениями, возникающими вследствие упомянутой замены, будем полагать, что динамическая система определена при $t\in[-1,1]$, а начальные условия заданы при $t=1$: $\mathbf{q}(1)=\mathbf{q}^0$, $\dot{\mathbf{q}}(1)=\dot{\mathbf{q}}^0$, либо $\mathbf{q}(1)=\mathbf{q}^0$, $\mathbf{p}(1)=\mathbf{p}^0$ (для системы Гамильтона).

3. Эквивалентность. Итак, пусть $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ – ортогональный базис в пространстве $L_2([-1,1],\alpha)$ квадратично интегрируемых по Лебегу функций с весовой функцией $\alpha(t)\geqslant 0$. Соответствующая мера Радона $d\mu_1=\alpha(t)\mathrm{d}t$ конечна, если функции $\varphi_k(t)$ – классические ортогоналные многочлены. Известно [8], что каждая из систем функций $\psi_k(t)=\dot{\varphi}_{k+1}(t)$, $\chi_k(t)=\dot{\psi}_{k+1}(t)$ $(k=0,1,\ldots)$ образует ортогональный базис в пространствах $L_2([-1,1],\beta)$, $L_2([-1,1],\gamma)$ соответственно. Весовые функции $\beta(t)$, $\gamma(t)\geqslant 0$ для производных могут быть получены по известным правилам [8]. Так что теперь в качестве элементов пространства H_n^2 следует рассматривать функции, определенные на $[-1,1]$, у которых вторые производные интегрируемы в квадрате с весом γ, а первые – с весом β. Сами функции – интегрируемы в квадрате с весом α.

Ясно, что при дифференцировании базисы переходят один в другой. При действии оператора D^{-1} проблемы также не возникает. В самом деле, пусть имеется аппроксимация обобщенных ускорений

$$\ddot{\mathbf{q}}(t)=\sum_{k=0}^{m}\ddot{\mathbf{q}}_k\chi_k(t)$$

Тогда равномерная аппроксимация обобщенных скоростей может быть получена по формуле

$$\dot{\mathbf{q}}(t)=\sum_{k=0}^{m+1}\dot{\mathbf{q}}_k\psi_k(t)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_k=\ddot{\mathbf{q}}_{k-1}\ (k=1,2,\ldots,m+1),\quad \dot{\mathbf{q}}_0=\left[\dot{\mathbf{q}}^0-\sum_{k=0}^{m}\ddot{\mathbf{q}}_k\psi_{k+1}(1)\right]\psi_0^{-1}(1)$$

Заметим, что в любой системе ортогональных классических полиномов элемент с нулевым номером – тождественная постоянная. Далее можно получить формулы для равномерной аппроксимации обобщенных координат

$$\mathbf{q}(t)=\sum_{k=0}^{m+2}\mathbf{q}_k\varphi_k(t)$$

$$\mathbf{q}_k=\dot{\mathbf{q}}_{k-1}\ (k=1,2,\ldots,m+2),\quad \mathbf{q}_0=\left[\mathbf{q}^0-\sum_{k=0}^{m+1}\dot{\mathbf{q}}_k\psi_{k+1}(1)\right]\psi_0^{-1}(1)$$

Вернемся теперь к системе Гамильтона и в пространстве производных от фазовых переменных $\mathbf{z}(t)$ составим ортогональный базис

$$\{\mathbf{e}_j\psi_k(t),\ \mathbf{e}_{n+j}\chi_l(t)\}\quad (j=1,2,\ldots,n;\ \ \mathbf{e}_j,\mathbf{e}_{n+j}\in\mathbf{R}^{2n};\ \ k,l=0,1,\ldots)$$

Конечномерное пространство аппроксимаций E_m определим как линейную оболочку базисных функций

$$\{\mathbf{e}_j\psi_k(t),\ \mathbf{e}_{n+j}\chi_l(t)\}\quad (j=1,2,\ldots,n;\ \ k=0,1,\ldots,m+1,\ \ l=0,1,\ldots,m)$$

Уравнения Гамильтона (1.6) имеют вид

$$\dot{\mathbf{q}}=B\mathbf{p}+\mathbf{b},\quad \dot{\mathbf{p}}=\mathbf{P}(t,\mathbf{q},\mathbf{p})$$

что соответствует функциональной записи в пространстве производных

$$\dot{\mathbf{q}}=B(D^{-1}\dot{\mathbf{p}})+\mathbf{b},\quad \dot{\mathbf{p}}=\mathbf{P}(t,D^{-1}\dot{\mathbf{q}},D^{-1}\dot{\mathbf{p}})\tag{3.1}$$

где оператор взятия первообразной определен в соответствии с (2.2). Система проекционных уравнений Галеркина для (3.1) в пространстве E_m может быть записана в виде

$$\dot{\mathbf{q}}=B(D^{-1}\dot{\mathbf{p}})+\mathbf{b},\quad \dot{\mathbf{p}}=[\mathbf{P}(t,D^{-1}\dot{\mathbf{q}},D^{-1}\dot{\mathbf{p}})]_m\tag{3.2}$$

где квадратные скобки означают переразложение векторной функции $\mathbf{P}(t,D^{-1}\dot{\mathbf{q}},D^{-1}\dot{\mathbf{p}})$ по базису $\{\mathbf{e}_j\chi_1(t)\}$ ($\mathbf{e}_j\in\mathbf{R}^n$) и отбрасывание всех членов $\mathbf{e}_j\chi_1(t)$ при $l>m$. Что касается первой подсистемы уравнений (3.1), то операции в правой части не выводят за пределы пространства E_m. В самом деле, пространство $E_m=E_m^q\times E_m^p$, где E_m^q есть линейная оболочка функций

$$\{\mathbf{e}_j\psi_k(t)\}\quad (\mathbf{e}_j\in\mathbf{R}^n;\quad k=0,1,\ldots,m+1)$$

а E_m^p – функций

$$\{\mathbf{e}_j\chi_l t)\}\quad (\mathbf{e}_j\in\mathbf{R}^n;\quad l=0,1,\ldots,m)$$

Поэтому, если $(\dot{\mathbf{q}},\dot{\mathbf{p}})^{\mathrm{T}}\in E_m$, то $\dot{\mathbf{p}}\in E_m^p$. Далее, по уже доказанному $D^{-1}\dot{\mathbf{p}}\in E_m^q$, а так как B, $\mathbf{b}$ – постоянные матрицы, то $B(D^{-1}\dot{\mathbf{p}})+\mathbf{b}\in E_m^q$.

С другой стороны, уравнения Лагранжа (1.1) имеют вид

$$A\ddot{\mathbf{q}}=\mathbf{Q}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$$

откуда получается система уравнений Галеркина (в том же пространстве E_m)

$$A\ddot{\mathbf{q}} = [\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]_m \tag{3.3}$$

где квадратные скобки должны иметь тот же смысл, что и выше.

Теорема. Решение

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{k=0}^{m+2} \mathbf{q}_k \varphi_k(t) \tag{3.4}$$

системы уравнений (3.3), удовлетворяющее начальным условиям

$$\mathbf{q}(1) = \mathbf{q}^0, \quad \dot{\mathbf{q}}(1) = \dot{\mathbf{q}}^0 \tag{3.5}$$

взаимно-однозначно соответствует решению

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \sum_{k=0}^{m+1} \dot{\mathbf{q}}_k \psi_k(t), \quad \dot{\mathbf{p}}(t) = \sum_{k=0}^{m} \dot{\mathbf{p}}_k \chi_k(t) \tag{3.6}$$

системы уравнений (3.2). Соответствие обеспечивается при помощи преобразования Лежандра.

Доказательство. В самом деле, можно убедиться, что системы (3.2) и (3.3) эквивалентны в том смысле, что одна переходит в другую в пределах пространства E_m. Пусть вначале решение (3.4) удовлетворяет системе (3.3) с условием (3.5). Фактически нужно рассматривать объединенную систему уравнений (3.3), (3.5).

Докажем, что функции

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \sum_{k=0}^{m+1} \mathbf{q}_{k+1} \psi_k(t), \quad \dot{\mathbf{p}}(t) = \sum_{k=0}^{m} A\mathbf{q}_{k+2} \chi_k(t)$$

удовлетворяют системе (3.2). Построим первообразные

$$D^{-1}\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{q}^0 + \int_1^t \dot{\mathbf{q}}(\tau)d\tau = \mathbf{q}^0 + \sum_{k=0}^{m+1} \mathbf{q}_{k+1}\varphi_{k+1}(t) - \sum_{k=0}^{m+1} \mathbf{q}_{k+1}\varphi_{k+1}(1) \tag{3.7}$$

$$D^{-1}\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{p}^0 + \int_1^t \dot{\mathbf{p}}(\tau)d\tau = \mathbf{p}^0 + \sum_{k=0}^{m} A\mathbf{q}_{k+2}\psi_{k+1}(t) - \sum_{k=0}^{m} A\mathbf{q}_{k+2}\psi_{k+1}(1), \quad \mathbf{p}^0 = A\dot{\mathbf{q}}^0 + \mathbf{a}$$

Умножим второе соотношение (3.7) на матрицу $B = A^{-1}$, а затем прибавим к обеим частям вектор $\mathbf{b}$. Учитывая задаваемую при помощи (2.2) связь между $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$, будем иметь

$$(B(D^{-1}\dot{\mathbf{p}}))(t) + \mathbf{b} = \dot{\mathbf{q}}^0 - \sum_{k=0}^{m+1} \mathbf{q}_{k+1}\psi_k(1) + \sum_{k=0}^{m+1} \mathbf{q}_{k+1}\psi_k(t)$$

Функция, стоящая в правой части, при $t = 1$ равна $\dot{\mathbf{q}}^0$. В силу (3.5)

$$\mathbf{q}_1\psi_0(1) + \sum_{k=1}^{m+1} \mathbf{q}_{k+1}\psi_k(1) = \dot{\mathbf{q}}^0$$

Для классических ортогональных полиномов $\psi_0(1) \equiv \psi_0(t) \equiv \mathrm{const}$. Поэтому

$$(B(D^{-1}\dot{\mathbf{p}}))(t) + \mathbf{b} = \sum_{k=1}^{m+1} \mathbf{q}_{k+1}\psi_k(t)$$

т.е. первое из уравнений (3.2) удовлетворяется тождественно.

Убедимся, что второе уравнение (3.2) идентично (3.3). В самом деле, матрица A постоянна, поэтому $\dot{\mathbf{p}} = A\ddot{\mathbf{q}}$. Функции $D^{-1}\dot{\mathbf{q}}(t)$, $D^{-1}\dot{\mathbf{p}}(t)$ в силу условий (2.2) совпадают с функциями $\mathbf{q}(t)$, $A\dot{q}(t) + \mathbf{a}$ соответственно. Поэтому в силу определения функции $\mathbf{P}(t, \mathbf{q},$

$\mathbf{p}) = \mathbf{Q}(t, q, B\mathbf{p} + \mathbf{b})$ разложение $\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ в ряд по полиномам $\{\chi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ совпадает с таким же разложением для функции

$$\mathbf{P}(t, D^{-1}\dot{\mathbf{q}}(t), D^{-1}\dot{\mathbf{p}}(t)) = \mathbf{P}(t, \mathbf{q}(t), A\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{a}) =$$

$$= \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}(t), B(A\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{a}) + \mathbf{b}) = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \qquad (3.8)$$

То же можно утверждать об отрезках этих рядов. Следовательно, правые части уравнений (3.2) (вторая группа) и (3.3) тождественно совпадают. Значит удовлетворяется и вторая группа уравнений системы (3.2).

Обратно, пусть решение (3.6) удовлетворяет системе (3.2). Тогда функция

$$\mathbf{q}(t) = D^{-1}\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{q}^0 - \sum_{k=1}^{m+2} \dot{\mathbf{q}}_{k-1}\varphi_k(t) + \sum_{k=1}^{m+2} \dot{\mathbf{q}}_{k-1}\varphi_k(t)$$

удовлетворяет начальному условию $\mathbf{q}(1) = \mathbf{q}^0$. Так как выполняется первая группа уравнений в (3.2), а функция $D^{-1}\dot{\mathbf{p}}(t)$ удовлетворяет начальному условию $D^{-1}\dot{\mathbf{p}}(1) = A\dot{\mathbf{q}}^0 + \mathbf{a}$, то

$$\dot{\mathbf{q}}(1) = B(D^{-1}\dot{\mathbf{p}}(1)) + \mathbf{b} = B(A\dot{\mathbf{q}}^0 + \mathbf{a}) + \mathbf{b} = \dot{\mathbf{q}}^0$$

Поэтому выполнены все начальные условия (3.5).

Опять в силу преобразования Лежандра или, что то же самое, в силу первой группы уравнений (3.2) имеем $A\mathbf{q} + \mathbf{a} = D^{-1}\mathbf{p}$. Отсюда $A\ddot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{p}}$, т.е. левые части уравнений (3.2) (вторая группа) и (3.3) совпадают. То же можно сказать и о правых частях этих систем уравнений. Это утверждение опирается на постоянство матрицы A, вектора $\mathbf{a}$ и следует из соотношений (3.8). В самом деле

$$\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}(t, D^{-1}\dot{\mathbf{q}}, B(D^{-1}\dot{\mathbf{p}}) + \mathbf{b}) = \mathbf{P}(t, D^{-1}\dot{\mathbf{q}}, D^{-1}\dot{\mathbf{p}})$$

Поэтому отрезки соответствующих рядов также совпадают.

Замечание. Доказанная теорема позволяет на основе результатов работ [1, 5] утверждать о корректности проекционных аппроксимаций примеров из работ [6, 7], в которых в качестве базисных функций использовались классические ортогональные многочлены (смещенные полиномы Лежандра).

4. Пример. Проиллюстрируем упомянутую методику аппроксимации [1] решений уравнений Лагранжа для случая уравнения Матье

$$\ddot{q} + (\omega^2 + \varepsilon \cos t)q = 0 \qquad (4.1)$$

Имеем голономную систему с одной степенью свободы и лагранжианом

$$L(t, q, \dot{q}) = 1/2\, \dot{q}^2 - 1/2\, (\omega^2 + \varepsilon \cos t)q^2 \qquad (4.2)$$

Пусть для определенности нужно аппроксимировать решение с начальными данными $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ на отрезке изменения независимой переменной $t \in [0, T]$. Перейдем к новому аргументу $\tau \in \{-1,1]$ по формуле

$$\tau = -2T^{-1}t + 1 \qquad (4.3)$$

Получим уравнение вида

$$q'' + [\Omega^2 + \mu \cos (a\tau + b)]q = 0 \qquad (4.4)$$

где штрих означает дифференцирование по τ, $\Omega = \omega T/2$, $\mu = \varepsilon T^2/4$, $a = T/2$, $b = -T/2$. Уравнение (4.4) описывает динамическую систему с лагранжианом

$$\Lambda(t, q, q') = 1/2\, (q')^2 - 1/2\, [\Omega^2 + \mu \cos (a\tau + b)]q^2$$

Искомое решение задачи Коши должно удовлетворять начальным условиям

$$q(1) = q_0,\ q'(1) = q'_0 = -T\dot{q}_0/2 \qquad (4.5)$$

Уравнение (1.3) можно для (4.4) записать в виде

$$\int_{1}^{-1}[\Lambda_{q'}\delta q'+\Lambda_q\delta q]d\tau-\Lambda_{q'}\delta q|_{-1}=0$$

В соответствии с описанной методикой поступим следующим образом. Решение будем аппроксимировать при помощи полиномов Чебышева первого и второго рода. Представим в пространстве $L_2[-1,1]$ приближение функции $q''(\tau)$ с неопределенными коэффициентами по базису из полиномов Чебышева второго рода $\{U_k(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$ в виде отрезка ряда

$$q''(\tau)=\sum_{k=0}^{N} z_k U_k(\tau) \tag{4.6}$$

где N – порядок аппроксимации в схеме Галеркина. Так что равномерное приближение обобщенной скорости может быть получено в виде отрезка ряда разложения по полиномам Чебышева первого рода

$$q'(\tau)=\sum_{k=0}^{N+1} y_k T_k(\tau) \tag{4.7}$$

причем $(N+2)$-мерный вектор коэффициентов $\mathbf{y}=(y_0, y_1,..., y_{N+1})^{\mathrm{T}}$ вычисляется посредством вектора $\mathbf{z}=(z_0, z_1,..., z_N)^{\mathrm{T}}$ по формулам

$$y_0=q_0'-\sum_{j=0}^{N}(j+1)^{-1}z_j,\quad y_k=k^{-1}z_{k-1}\quad (k=1,2,...,N+1) \tag{4.8}$$

Так построенная функция $q'(\tau)$ удовлетворяет начальному условию при $\tau = 1$. Функция обобщенной координаты $q(\tau)$ аппроксимируется также равномерно при помощи разложения

$$q(\tau)=\sum_{k=0}^{N+2} x_k T_k(\tau) \tag{4.9}$$

полученного с использованием известных формул для первообразных от полиномов $T_k(\tau)$ [9]. При этом

$$x_0=q_0-y_0-\frac{y_1}{4}+\sum_{j=0}^{N+1}\frac{y_j}{j^2-1},\quad x_1=y_0-\frac{y_2}{2},\quad x_2=\frac{y_1}{4}-\frac{y_3}{4}$$

$$x_k=\frac{y_{k-1}-y_{k+1}}{2k}\quad (k=3,4,...,N+2),\quad x_{N+2}=\frac{y_{N+1}}{2(N+2)}$$

Формулы (4.8) выведены при помощи известного соотношения $U_k(\tau) = (k + 1)^{-1}T'_{k+1}(\tau)$. Чтобы получить систему уравнений Галеркина, необходимо в уравнении (4.4) произвести подстановки из (4.7), (4.9), а также выполнить следующие дополнительные операции.

Введем обозначение $A(\tau) = \Omega^2 + \mu\cos(a\tau + b)$. Для этой функции легко получить разложение [9]

$$A(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty} A_k T_k(\tau)$$

$A_0 = \Omega^2 + \mu J_0(a)\cos b$, $A_k = 2\mu J_k(a)\cos(b + k\pi/2)$ $(k = 1,2,...)$ где $J_k(a)$ – функции Бесселя первого рода.

Для завершения вывода уравнений Галеркина необходимо получить разложения сначала по полиномам $T_k(\tau)$, а затем – по $U_k(\tau)$ функции $A(\tau)q(\tau)$. При этом нужно использовать известное свойство

$$T_m(\tau)T_n(\tau)=(T_{m-n}(\tau)+T_{m+n}(\tau))/2 \tag{4.10}$$

справедливое для произвольных целых m, n (имеется в виду, что $T_{-n}(\tau) = T_n(\tau)$).

Введем для отрезка ряда Чебышева, содержащего первые $N + 3$ слагаемых, обозначение

$$[A(\tau)q(\tau)]_{N+2} = \sum_{k=0}^{N+2} Y_k T_k(\tau) \tag{4.11}$$

где в силу (4.10) можно получить

$$Y_0 = A_0 x_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N+2} A_j x_j$$

$$Y_k = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=0}^{k} A_{k-j}x_j + \sum_{j=k}^{N+2} A_{j-k}x_j + \sum_{j=0}^{N+2} A_{j+k}x_j\right] \quad (k = 1,2,\ldots,N+2)$$

Выражая в (4.11) полиномы первого рода через полиномы второго рода в соответствии с известной формулой

$$T_k(\tau) = (U_k(\tau) - U_{k-2}(\tau))/2$$

и оставляя в разложении первые $N + 1$ слагаемых, получим

$$\left[[A(\tau)q(\tau)]_{N+2}\right]_N = \sum_{k=0}^{N} Z_k U_k(\tau) \tag{4.12}$$

$$Z_0 = Y_0 - Y_2/2, \quad Z_k = (Y_k - Y_{k+2})/2 \quad (k = 1,2,\ldots, N)$$

В итоге система уравнений Галеркина составится из $N + 1$ алгебраического уравнения относительно $N + 1$ неопределенных коэффициентов, составляющих вектор $\mathbf{z}$

$$\mathbf{z} + \mathbf{Z}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{z} \in \mathbf{R}^{N+1}, \mathbf{Z}: \mathbf{R}^{N+1} \to \mathbf{R}^{N+1}) \tag{4.13}$$

Вектор-функция $\mathbf{Z}(\mathbf{z})$ определена компонентами разложения (4.12). В рассматриваемом примере система уравнений (4.13) линейна относительно $\mathbf{z}$. Однако в общем случае для решения (4.13) желательно иметь начальное приближение. Когда ε мало, величина μ при не очень больших T также не очень велика. Оказывается, в реальных вычислениях величина T может быть достаточно большой. Важно лишь, чтобы норма производной конечномерного оператора $\mathbf{Z}(\mathbf{z})$ была меньше единицы. Тогда для опрделения решения (4.13) можно использовать метод Ньютона, полагая в качестве начального приближения $\mathbf{z}^0 \in \mathbf{R}^{N+1}$ коэффициенты отрезка ряда разложения функции $(q^0)''(\tau)$ по полиномам $U_k(\tau)$, где $q^0(\tau)$ – решение невозмущенной линейной задачи

$$q'' + \Omega^2 q = 0 \tag{4.14}$$

с теми же начальными условиями (4.5). Решение уравнения (4.14) имеет вид

$$q^0(\tau) = q_0 \cos\Omega\tau + q'_0 \Omega^{-1}\sin\Omega\tau$$

Поэтому

$$(q^0)''(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \varsigma_k T_k(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k^0 U_k(\tau), \quad \varsigma_0 = q_0 J_0(\Omega)$$

$$\varsigma_{2k-1} = 2(-1)^{k-1} q'_0 \Omega^{-1} J_{2k-1}(\Omega), \quad \varsigma_{2k} = 2(-1)^k q_0 J_{2k}(\Omega) \quad (k = 1,2,\ldots)$$

Теперь можно вычислить вектор начального приближения для решения системы (4.13) в виде

$$z_0^0 = \varsigma_0 - \varsigma_2/2, \quad z_k^0 = (\varsigma_k - \varsigma_{k+2})/2 \quad (k = 1,2,\ldots,N)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Косенко И.И.* О построении фазовых траекторий гамильтоновой системы в окрестности положения равновесия // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 531–538.
2. *Bailey C.D.* A new look at Hamilton's Principle // Foundat. phys. 1975. V. 5. N. 3. P. 433–451.

3. *Bailey C.D.* On a more precise statement of Hamilton's principle // Foundat. phys. 1981. V. 11. N. 3/4. P. 279–296.
4. *Hitzl D.L., Levinson D.A.* Application of Hamilton's law of varying action to the restricted three-body problem/ / Celest. Mech. 1980. V. 22. N. 3. P. 255–266.
5. *Косенко И.И.* О применении многочленов Чебышева для построения траектории возмущенного движения в нелинейной механике // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 32–38.
6. *Hitzl D.L.* Implementing Hamilton's law of varying action with shifted Legendre polynomials // J. comput. phys. 1980. V. 38. N. 2. P. 185–211.
7. *Agrawal O.P., Saigal S.* A novel, computationally efficient, approach for Hamilton's law of varying action // Intern. j. mech. sci. 1986. V. 29. N. 4. P. 285–292.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966, 295 с.
9. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983, 384 с.

Сергиев Посад

Поступила в редакцию
20.1.1994