УДК 539.3

© 1994 г. А.Л Гольденвейзер

АЛГОРИТМЫ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОСТРОЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК И ПРИНЦИП СЕН-ВЕНАНА

Сформулирован модифицированный принцип Сен-Венана, обусловливающий затухание асимптотически главной части напряженно-деформированного состояния, вызванного системой сил, приложенных к торцу тонкого упругого тела. Выведены четыре условия выполнения модифицированного принципа Сен-Венана и определена возможность использования их при построении итерационных процессов интегрирования общих уравнений теории упругости.

1. Будем понимать под оболочкой тонкое трехмерное тело, напряженно-деформированное состояние (НДС) которого описывается статическими линейными дифференциальными уравнениями теории анизотропной упругости. Для определенности считается, что уравнения отнесены к традиционным триортогональным координатам

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(\beta_1, \beta_2) + \beta_3\mathbf{n}$$

и что лицевые поверхности оболочки задаются уравнениями $\beta_3 = \pm\eta$ (η – полутолщина).

Основная цель работы – построение итерационного процесса интегрирования уравнений теории упругости, из которого в качестве исходного приближения должна следовать теория расчета тонких оболочек.

Будет приниматься во внимание, что если лицевые поверхности $\beta_3 = \pm\eta$ оболочки не закреплены, то ее полное НДС складывается из внутреннего и краевых НДС (пограничных слоев), локализованных вблизи торцов или других концентраторов напряжений оболочки. Соответственно этому соблюдается традиционное для асимптотических методов правило в максимальной степени отделять построение внутреннего НДС от построения пограничных слоев.

С математической точки зрения это оправдывается тем, что каждое из таких видов НДС обладает своей спецификой и требует своего математического аппарата. С физической точки зрения расчленение представляется рациональным еще и потому, что практическая ценность сведений о внутреннем НДС и о пограничных слоях далеко не одинакова.

Для достижения упомянутого расчленения естественно использовать принцип Сен-Венана. Однако, как будет показано ниже, его в канонической формулировке применять нельзя.

В предлагаемой статье формулируется приспособленный для применений в общей теории оболочек модифицированный принцип Сен-Венана. В нем речь идет не о полном затухании эффекта приложения внешних сил, а лишь о затухании "в главном", т.е. о затухании его асимптотически главной части. Обсуждается и согласованный с модифицированным принципом Сен-Венана итерационный процесс интегрирования уравнений теории упругости.

2. Внутренний итерационный процесс (определяющий внутреннее НДС) [1–3] можно реализовать с разной исходной точностью, т.е. допускать при построении исходного приближения погрешности разного порядка. Будем говорить об итерационных процессах, построенных с точностью до h^ρ, и называть ρ характеристикой точности, если при выводе исходного приближения в выкладках отбрасываются в каждом отдельно взятом равенстве все члены вида $O(h^\gamma)$ по сравнению с единицей при $\gamma > \rho$. (Выражение $O(h^0)$ не всегда может считаться асимптотической оценкой погрешности.) Под h подразумевается безразмерная полутолщина.

Наиболее важными в дальнейшем являются внутренние итерационные процессы, построенные с характеристикой точности $\rho = 2 - 2q$ (q – показатель изменяемости искомого НДС по переменным β_1, β_2).

При таком ρ дифференциальные уравнения внутреннего итерационного процесса в исходном приближении адекватны уравнениям Кирхгофа – Лява [4]. Будем пользоваться последними как более известными.

В литературе описан также и итерационный процесс для пограничного слоя. При характеристике точности $\rho = 1 - q$ его реализация сводится к интегрированию дифференциальных уравнений антиплоской и плоской задачи теории упругости [1, 2, 4–7].

Таким образом, проблему раздельного построения дифференциальных уравнений в теории тонких упругих тел можно считать решенной. Перейдем к разделению граничных условий, т.е. к вопросу о том, какие граничные условия надо приписывать к внутренним и к погранслойным дифференциальным уравнениям. Ограничимся случаем, когда на торце оболочки, проходящем вдоль координатной поверхности $\beta_1 = 0$, заданы напряжения, массовые силы отсутствуют, а на лицевых поверхностях $\beta_3 = \pm\eta$ напряжения обращаются в нуль.

Пусть, например, на торце $\beta_1 = 0$ заданы напряжения σ_{1j}. Тогда соответствующие трехмерные граничные условия будет удобно для дальнейшего выразить равенствами

$$\left[a\left(\sigma_{1j}^{(i)} + \sigma_{1j}^{(b)}\right)\right]_{\beta_1=0} = a_0 r_{1j} \quad (j = 1,2,3) \tag{2.1}$$

где $a = 1 + \beta_3/R_2$, $a_0 = a|_{\beta_1=0}$, $1/R_2$ – нормальная кривизна координатной β_2 – линии, индексы i и b означают принадлежность данной величины к внутреннему или краевому НДС, r_{1j} – заданные функции переменных β_2, β_3, определяющие краевые значения напряжений.

Примем, что $\sigma_{ij}^{(i)}$ строятся при помощи внутреннего итерационного процесса с характеристикой точности $\rho = 2 - 2q$, и будем выражать соответствующие результаты в терминах теории Кирхгофа – Лява, пользуясь обозначениями монографии [4]. Это значит, что при $\beta_1 = 0$

$$a\sigma_{11}^{(i)} = \frac{T_1}{2\eta} - \beta_3\frac{3G_1}{2\eta^3}, \quad a\sigma_{12}^{(i)} = \frac{S_{21}}{2\eta} + \beta_3\frac{3H_{21}}{2\eta^3}, \quad a\sigma_{13}^{(i)} = -\frac{N_1}{2\eta}\frac{3}{2}\left(\beta_3^2 - \eta^2\right) \tag{2.2}$$

Отсюда, учитывая (2.1), получаем

$$\left[\frac{T_1}{2\eta} - \beta_3\frac{3G_1}{2\eta^2} + a\sigma_{11}^{(b)}\right]_{\beta_1=0} = a_0 r_{11} \tag{2.3}$$

и два аналогичных равенства, вытекающих из второй и третьей формул (2.2).

Проинтегрируем равенство (2.3) по β_3 в интервале $(-\eta, +\eta)$. Получим

$$T_1|_{\beta_1=0} + \int\limits_{-\eta}^{+\eta}\left[a\sigma_{11}^{(b)}\right]_{\beta_1=0} d\beta_3 = \int\limits_{-\eta}^{+\eta} a_0 r_{11} d\beta_3$$

Отсюда заключаем, что если для краевого НДС считать справедливым естественное условие затухания

$$\int_{-\eta}^{+\eta} \left[a\sigma_{11}^{(b)} \right]_{\beta_1=0} d\beta_3 = 0 \qquad (2.4)$$

то ему для внутреннего НДС соответствует граничное условие

$$T_1\Big|_{\beta_1=0} = \int_{-\eta}^{+\eta} a_0 r_{11} d\beta_3 \qquad (2.5)$$

которое обычно и используется в теории оболочек на основании физических соображений.

Соответствие типа (2.3) $\leftrightarrow$ (2.5) справедливо и для любых других условий затухания краевого НДС, аналогичных условию (2.4).

Таким образом, если бы краевое НДС оболочки подчинялось каноническому принципу Сен-Венана, то на внутреннее НДС надо было бы наложить пять условий вида (2.5). Это привело бы к известному несоответствию с порядком двумерных дифференциальных уравнений теории тонких оболочек. Оно является следствием необоснованного применения канонического принципа Сен-Венана.

Разделение граничных условий в принципе достигнуто. В частности, под граничными условиями для двумерных дифференциальных уравнений теории Кирхгофа – Лява должны подразумеваться соотношения, вытекающие из четырех правильно сформулированных условий затухания краевого НДС так же, как (2.5) вытекает из (2.3). Чтобы получить торцевые условия для краевого НДС, надо положить

$$r_{1j} = r_{1j}^{(i)} + r_{1j}^{(b)} \quad (j = 1, 2, 3)$$

и считать, что

$$\left[a\sigma_{1j}^{(i)} \right]_{\beta_1=0} = a_0 r_{1j}^{(i)}, \quad \left[a\sigma_{1j}^{(b)} \right]_{\beta_1=0} = a_0 r_{1j}^{(b)} \qquad (2.6)$$

Предполагая, что внутреннее НДС уже построено, из первого равенства (2.6) можно найти $r_{1j}^{(i)}$, а следовательно, определить и $r_{1j}^{(b)}$. В результате второе равенство (2.6) определит искомые торцевые условия для краевого НДС.

В разд. 3 будет сформулирован модифицированный принцип Сен-Венана. В нем речь идет о затухании "в главном" и о четырех условиях, обеспечивающих такое затухание. Опираясь на этот принцип, решение краевой задачи теории упругости для тонких тел можно строить следующим образом.

1. Внутреннее НДС оболочки определять как исходное приближение внутреннего итерационного процесса при характеристике точности $\rho = 2 - 2q$, т.е. строить, базируясь на уравнениях теории Кирхгофа – Лява.

2. В краевом НДС строить только ту его асимптотически главную часть, которая затухает.

3. Из трех торцевых условий исходной задачи, сформулированных в терминах трехмерной теории упругости, выводить по приведеннной выше схеме четыре граничных условия для уравнений теории Кирхгофа – Лява и три торцевых условия для краевого НДС.

4. С использованием условий 3 строить последовательно исходные приближения внутреннего НДС и затухающей части краевого НДС, которые в совокупности и составят исходное приближение искомого НДС.

Формулировки перечисленных краевых задач для внутренних и краевых дифференциальных уравнений основаны на приближенных рассуждениях. Кроме того, схема не предполагает построения асимптотически второстепенной незатухающей части пограничного слоя. Все эти погрешности формально можно устранять при помощи итераций.

В рамках приведенной здесь схемы центральное место занимает двумерная теория оболочек Кирхгофа – Лява. Ее роль заключается в том, что эта теория позволяет приближенно исследовать не слишком сильно изменяющееся НДС оболочки в достаточном удалении от ее края или других концентраторов искомого НДС. (Отметим, что в описанной схеме не предусматривается случай, когда решение Кирхгофа – Лява обращается в тождественный нуль.)

Сказанное находится в кажущемся противоречии с тем, что в печати часто указывается на недостатки, присущие теории Кирхгофа – Лява и выражающиеся в парадоксах, к которым она якобы приводит (см., например, [8–10]). Однако все "опровергающие" примеры основаны на том, что в них теория применяется для случаев, для которых она, согласно данному выше определению, не предназначена. Это прежде всего задачи, в которых явно или завуалированно краевые упругие явления играют главную роль. Кроме того, в "опровергающих" примерах не учитывается требование, чтобы была не слишком велика изменяемость искомого НДС. Известно, что в противном случае теорию Кирхгофа – Лява применять нельзя. Она неприменима и в известной "парадоксальной" задаче о кручении полосы, где в углах полосы искомое НДС имеет бесконечную изменяемость.

В рамках приведенной выше приближенной схемы можно, если появится необходимость, исследовать и краевое НДС оболочки. Это может быть выполнено в качестве второго этапа расчета и сводится к решению дифференциальных уравнений, определяющих затухающую часть погранслоя.

Изложенную нетрадиционную схему приближенного исследования оболочки будем интерпретировать при помощи следующей парной модели тонкого упругого тела. Она мыслится как совокупность оболочки-модели, несущей внутреннее НДС, и семейства полосок-моделей, несущего затухающую часть погранслоя.

Оболочка-модель представляет собой срединную поверхность тонкого тела, наделенную упругими свойствами, соответствующими гипотезам Кирхгофа – Лява.

Семейство полосок-моделей как носителя погранслоя достаточно построить лишь вблизи торца. Считая, что последний проходит вдоль координатной поверхности $\beta_1 = 0$, определим каждую полоску как примыкающую к торцу часть координатной поверхности $\beta_2 = \mathrm{const}$. Параметром семейства полосок-моделей будет при этом переменная β_2. Упругие свойства полосок определим, приняв, что в них напряжения и перемещения удовлетворяют полной системе уравнений трехмерной теории упругости и что напряжения σ_{2j} ($j = 1, 2, 3$) можно трактовать как возникающие между полосками силы взаимодействия, вид которых надо должным образом выбрать.

Чтобы НДС оболочек-полосок имело затухающий характер, надо торцевые силы $\sigma_{1j}\big|_{\beta_1=0}$ подчинить некоторому числу требований, сделав это так, чтобы их можно было выполнить за счет произволов оболочки-модели, т.е. чтобы их число равнялось четырем.

Если принять, например, что все силы взаимодействия в семействе полосок-моделей равны нулю, то условия затухания превратятся в пять требований канонического принципа Сен-Венана. Это возвратит нас к прежнему несоответствию порядка двумерных уравнений оболочки-модели числу граничных условий, которым они должны подчиняться. Несоответствие снимется, если в дифференциальных уравнениях полоски-модели учесть законы парности касательных напряжений и считать, что отличны от нуля касательные силы взаимодействия σ_{21}, σ_{23}, а в нуль обращается лишь нормальная сила σ_{22}.

3. Выкладки, конкретизирующие рассуждения п. 2, будем проводить для случая, когда трехмерная тонкая оболочка вырождается в полубесконечный слой $G\{\alpha_1 \geqslant 0;$ $-\infty < \alpha_2 < +\infty;\ -h \leqslant \alpha_3 \leqslant +h\}$, отнесенный к декартовым координатам $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Ниже выяснится, что это не уменьшает общности окончательных выводов.

Будем считать, что для слоя G должны выполняться однородные лицевые условия

$$\sigma_{3k}\big|_{\alpha_3=\pm h} = 0 \quad (k = 1,2,3) \tag{3.1}$$

и неоднородные торцевые условия

$$\sigma_{1k}\big|_{\alpha_1=0} = r_{1k}(\alpha_1, \alpha_3) \quad (k = 1,2,3) \tag{3.2}$$

Они в совокупности означают, что для слоя G рассматривается НДС, вызванное распределенными по торцу $\alpha_1 = 0$ силами $\mathbf{R}$ с компонентами r_{1k}.

Таким образом, в парной модели разд. 2 под оболочкой-моделью надо подразумевать полубесконечную пластину, а под семейством полосок-моделей – совокупность полубесконечных полос $g(\alpha_2) = \{\alpha_1 \geqslant 0;\ -h \leqslant \alpha_3 \leqslant +h\}$, положение которых на торце определяется параметром α_2.

Будем исходить из линейных уравнений изотропной теории упругости в декартовой системе координат и запишем их следующим образом:

$$\begin{gathered} D_i\left(P; \frac{\partial}{\partial\alpha_1}, \frac{\partial}{\partial\alpha_3}\right) + d_i\left(Q; \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right) = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant 3) \\ D_j\left(Q; \frac{\partial}{\partial\alpha_1}, \frac{\partial}{\partial\alpha_3}\right) + d_j\left(P; \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right) = 0 \quad (4 \leqslant j \leqslant 9) \end{gathered} \tag{3.3}$$

(в дальнейшем под i, j всегда подразумеваются индексы, пробегающие указанные здесь значения). В (3.3) считается, что НДС слоя G расчленено на два слагаемых:

$$P = (\sigma_{12}, \sigma_{23}; \upsilon_2), \quad Q = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{13}; \upsilon_1, \upsilon_3) \tag{3.4}$$

Буквы P, Q, проставленные в (3.3) в скобках, показывают, какие из искомых величин входят в данное слагаемое левой части. После точки с запятой проставлены символы содержащихся в этом слагаемом производных.

Предполагается, что уравнения слоя G приведены к безразмерному виду: в них σ_{mn} $(m, n = 1, 2, 3)$ – отнесенные к модулю Юнга напряжения; υ_m – отнесенные к полутолщине η перемещения; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, h$ – отнесенные к некоторой характерной длине L декартовы координаты и полутолщина.

Дифференциальные выражения D_i, d_i, D_j, d_j в (3.3) расшифровываются так:

$$\begin{gathered} D_1\left(P; \frac{\partial}{\partial\alpha_1}, \frac{\partial}{\partial\alpha_3}\right) = \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\alpha_3}, \quad d_1\left(Q; \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right) = \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\alpha_2} \\ D_2\left(P; \frac{\partial}{\partial\alpha_1}, \frac{\partial}{\partial\alpha_3}\right) = \frac{\partial\upsilon_2}{\partial\alpha_1} - 2(1+\nu)\sigma_{12}, \quad d_2\left(Q; \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right) = \frac{\partial\upsilon_1}{\partial\alpha_2} \\ D_3\left(P; \frac{\partial}{\partial\alpha_1}, \frac{\partial}{\partial\alpha_3}\right) = \frac{\partial\upsilon_2}{\partial\alpha_3} - 2(1+\nu)\sigma_{23}, \quad d_3\left(Q; \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right) = \frac{\partial\upsilon_3}{\partial\alpha_2} \\ D_4\left(Q; \frac{\partial}{\partial\alpha_1}, \frac{\partial}{\partial\alpha_3}\right) = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\alpha_3}, \quad d_4\left(P; \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right) = \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\alpha_2} \\ D_5\left(Q; \frac{\partial}{\partial\alpha_1}, \frac{\partial}{\partial\alpha_3}\right) = \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\alpha_3}, \quad d_5\left(P; \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right) = \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial\alpha_2} \\ D_6\left(Q; \frac{\partial}{\partial\alpha_1}, \frac{\partial}{\partial\alpha_3}\right) = \frac{\partial\upsilon_1}{\partial\alpha_1} - [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})], \quad d_6 = 0 \\ D_7\left(Q; \frac{\partial}{\partial\alpha_1}, \frac{\partial}{\partial\alpha_3}\right) = -[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})], \quad d_7\left(P; \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right) = \frac{\partial\upsilon_2}{\partial\alpha_2} \end{gathered} \tag{3.5}$$

$$D_8\left(Q;\frac{\partial}{\partial\alpha_1},\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\right)=\frac{\partial\upsilon_3}{\partial\alpha_3}-[\sigma_{33}-\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})],\quad d_8=0$$

$$D_9\left(Q;\frac{\partial}{\partial\alpha_1},\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\right)=\frac{\partial\upsilon_1}{\partial\alpha_3}+\frac{\partial\upsilon_3}{\partial\alpha_1}-2(1+\nu)\sigma_{13},\quad d_9=0$$

4. Будем трактовать равенства (3.3)–(3.5) как уравнения полоски-модели, представим входящие в них групповые неизвестные в виде суммы

$$P=P'+P'';\quad Q=Q'+Q'' \tag{4.1}$$

и потребуем, чтобы P', Q' составили затухающую часть погранслоя, а P'', Q'' – его остаточную незатухающую часть. В разд. 5 будет показано, что этого можно достигнуть, если P', Q' подчинить уравнениям

$$D_i\left(P';\frac{\partial}{\partial\alpha_1},\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\right)=0\quad(1\leqslant i\leqslant 3) \tag{4.2}$$

$$D_j\left(Q';\frac{\partial}{\partial\alpha_1},\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\right)=-d_j\left(P';\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)\quad(4\leqslant j\leqslant 9) \tag{4.3}$$

а для P'', Q'' принять уравнения

$$\begin{gathered}D_i\left(P'';\frac{\partial}{\partial\alpha_1},\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\right)+d_i\left(Q'';\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)=-d_i\left(Q';\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)\quad(1\leqslant i\leqslant 3)\\ D_j\left(Q'';\frac{\partial}{\partial\alpha_1},\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\right)+d_j\left(P'';\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)=0\quad(4\leqslant j\leqslant 9)\end{gathered} \tag{4.4}$$

В совокупности системы (4.2)–(4.4), конечно, эквивалентны системе (3.3). Для того чтобы выполнялись и краевые равенства (3.1), (3.2), надо на P', Q' и P'', Q'' накладывать условия

$$\sigma'_{3k}=0\quad(\alpha_3=\pm h);\quad \sigma'_{1k}=r_{1k}\quad(\alpha_1=0) \tag{4.5}$$

$$\sigma''_{3k}=0\quad(\alpha_3=\pm h);\quad \sigma''_{1k}=0\quad(\alpha_1=0),\quad k=1,2,3 \tag{4.6}$$

Здесь и ниже считается, что описанным в разд. 2 способом разделение граничных условий уже выполнено и под r_{1k} подразумевается та часть заданных на торце $\beta_1=0$ напряжений, которой соответствует затухающая часть краевого НДС (конечно, считается, что r_{1k} также должным образом обезразмерены.)

5. Обратимся к формулировке модифицированного принципа Сен-Венана для НДС P', Q'. Три из девяти уравнений системы (4.2), (4.3), которым подчиняются P', Q', выражают баланс сил в дифференциальном элементе полоски-модели. Эти уравнения в развернутом виде записываются так:

$$\begin{gathered}X_1=\frac{\partial\sigma'_{11}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\sigma'_{12}}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial\sigma'_{13}}{\partial\alpha_3}=0,\quad X_2=\frac{\partial\sigma'_{21}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\sigma'_{23}}{\partial\alpha_3}=0\\ X_3=\frac{\partial\sigma'_{31}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\sigma'_{32}}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial\sigma'_{33}}{\partial\alpha_3}=0\end{gathered} \tag{5.1}$$

Для системы (4.2), (4.3), которую уместно назвать уравнениями затухающей части НДС, должна решаться следующая краевая задача: в бесконечной полуполосе g надо построить решение, удовлетворяющее на сторонах $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = \pm h$ условиям (4.5) и затухающее на бесконечности.

Будем считать, что это затухание настолько сильное, как может понадобиться в дальнейших рассуждениях. Сформулированная краевая задача имеет решение только при выполнении некоторых необходимых условий, выражающих уравновешенность внешних сил на всей полосе g. Они будут отождествляться с необходимыми и достаточными требованиями применимости модифицированного принципа Сен-Венана.

Из (5.1) очевидным образом следуют равенства

$$\int X_1 dg = \int X_2 dg = \int X_3 dg = \int (\alpha_3 X_1 - \alpha_1 X_3) dg = 0 \tag{5.2}$$

в которых интегрирование распространяется на область, занятую полосой g.

При преобразовании содержащихся здесь интегралов будем пользоваться обычными в теории упругости приемами: менять порядок интегрирования по α_1, α_3, выполнять интегрирование по частям по той или иной из переменных α_1 и α_3, производить преобразования подынтегральных выражений при помощи равенств (5.1).

Кроме того, будем пользоваться лицевыми и торцевыми условиями (4.5), а также постулированным свойством затухания. С учетом всего этого первое равенство (5.2) преобразуем следующим образом:

$$\int_{-h}^{+h} d\alpha_3 \int_0^\infty \frac{\partial \sigma_{11}'}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \int_{-h}^{+h} d\alpha_3 \int_0^\infty \sigma_{12}' d\alpha_1 + \int_0^\infty d\alpha_1 \int_{-h}^{+h} \frac{\partial \sigma_{13}'}{\partial \alpha_3} d\alpha_3 = 0 \tag{5.3}$$

Во втором слагаемом левой части выполним интегрирование по частям относительно α_1. Получим

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \int_{-h}^{+h} d\alpha_3 \int_0^\infty \sigma_{12}' d\alpha_1 = \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \int_{-h}^{+h} [\alpha_1 \sigma_{12}']_0^\infty d\alpha_3 - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \int_{-h}^{+h} d\alpha_3 \int_0^\infty \alpha_1 \frac{\partial \sigma_{12}'}{\partial \alpha_1} d\alpha_1$$

Здесь первое слагаемое в правой части равно нулю в силу предположения о достаточно быстром затухании σ_{12}' по α_1. Во втором слагаемом можно заменить $\partial \sigma_{12}' / \partial \alpha_1$ на $-\partial \sigma_{23}' / \partial \alpha_3$, пользуясь вторым равенством (5.1). Поэтому, выполнив интегрирование по α_3 и учтя лицевые условия (4.5), снова получим нуль. Значит, второе слагаемое левой части (5.3) обращается в нуль.

Равным образом, выполнив интегрирование по α_3 и использовав лицевые условия (4.5), заключаем, что и третье слагаемое левой части (5.3) обращается в нуль. Следовательно,

$$\int X_1 dg = \int_{-h}^{+h} d\alpha_3 \int_0^\infty \frac{\partial \sigma_{11}'}{\partial \alpha_1} d\alpha_1$$

Отсюда, учтя торцевые условия (4.5) и условия затухания при $\alpha_1 = \infty$, будем иметь первое условие выполнения модифицированного принципа Сен-Венана

$$\int_{-h}^{+h} r_{11} d\alpha_3 = 0 \tag{5.4}$$

После аналогичных выкладок из второго и третьего равенств (5.2) получаются еще два условия:

$$\int_{-h}^{+h} r_{12} d\alpha_3 = \int_{-h}^{+h} r_{13} d\alpha_3 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \int_{-h}^{+h} r_{12} \alpha_3 d\alpha_3 = 0 \tag{5.5}$$

а четвертое равенство (5.2) даст

$$\int_{-h}^{+h} \alpha_3 r_{11} d\alpha_3 - I = 0, \quad I = 2\int \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\alpha_3 \sigma_{12}') dg \tag{5.6}$$

Соотношения (5.4)–(5.6) и образуют четыре искомых условия существования затухающего НДС P', Q', порождаемого торцевыми силами r_{1k}.

В разд. 7 будет показано, что P', Q' в известном смысле асимптотически превышают P'', Q''. Поэтому можно считать, что выведенные здесь свойства P', Q' выражают модифицированный принцип Сен-Венана. Он заключается в том, что требования (5.4)–(5.6) являются условиями затухания "в главном" того НДС, которое порождается торцевыми силами. Подчеркнем, что модифицированный принцип Сен-Венана в отличие от канонического согласуется с парной моделью тонкого упругого тела (разд. 2), так как в нем для оболочки-модели нужно ставить лишь четыре граничных условия. С физической точки зрения уменьшение числа условий затухания объясняется тем, что модифицированный принцип Сен-Венана ориентирован на такое семейство полосок-моделей, в котором не исключены сдвигающие напряжения на гранях $\alpha_2 = \mathrm{const}$. Поэтому для реализации сен-венановского затухания нет необходимости накладывать пятое условие, т.е. требовать отсутствия торцевого крутящего момента.

6. Смысл трех первых из условий затухания (5.4)–(5.6) очевиден. Из них вытекают три известных граничных условия двумерной теории пластин

$$T_1 = S_{21} = N_1 + \partial H_{21} / \partial s = 0$$

Обсудим интегральное слагаемое I равенства (5.6).

Преобразуем эту величину, считая, как было оговорено в разд. 4, что r_{1k} во втором равенстве (4.5) удовлетворяют условиям модифицированного принципа Сен-Венана.

Для вычисления I надо знать напряжение σ'_{12} во всей области g, т.е. располагать для фиксированного β_2 затухающим решением антиплоской задачи в полуполосе g при лицевых и торцевых условиях (4.5). При этом, если ограничиться асимптотически главными частями решения, под σ'_{12} надо понимать решение антиплоской задачи, удовлетворяющее условиям (4.5) при $k = 2$.

Поскольку σ_{12}, по предположению, удовлетворяет условию затухания при $\alpha_1 = \infty$, сформулированная задача имеет решение в весьма общем случае. Оно элементарно строится при помощи тригонометрических рядов Фурье [4, 11]. Внося это решение в выражение для I и выполнив интегрирование по α_1, α_3, получим искомый результат. Он определит при данном β_2 некоторую поправку к величине G_1 в соответствующем граничном условии теории Кирхгофа – Лява. В общем случае эта поправка выразится числовым рядом, зависящим от параметра β_2.

В конкретных не слишком сложных случаях, возникающих в большинстве практически важных задач, окончательный результат может оказаться и весьма простым.

Пусть во втором торцевом условии (4.5)

$$r_{12} = A + B\alpha_3, \quad A = \frac{S}{2E\eta}, \quad B = \frac{3H}{2E\eta^2} \tag{6.1}$$

где A и B – заданные безразмерные функции α_2, величины S и H имеют смысл краевого сдвигающего усилия и краевого крутящего момента, а η – истинная полутолщина.

Из первого условия затухания (5.5), подставив в него (6.1), получим $S = 0$. Следовательно, $A = 0$.

Обозначим через $\Sigma_{12}(\alpha_1, \alpha_3)$ сдвигающее напряжение, определяемое затухающим решением в полуполосе g антиплоской задачи при условии

$$\Sigma_{12} = \alpha_3 \quad (\alpha_1 = 0)$$

Поскольку упомянутая антиплоская задача линейна и ее формулировка не зависит от α_2, имеем :$\sigma'_{12} = B\Sigma_{12}$. Поэтому можно написать:

$$I = 3I_0 \frac{1}{EL^2}\frac{\partial H}{\partial \alpha_2}, \quad I_0 = \frac{1}{h^2}\int_0^\infty d\alpha_1 \int_{-h}^{+h} \Sigma_{12}\alpha_3 d\alpha_3$$

(L – характерная длина, упомянутая в разд. 3 и определяемая формулой $\eta = Lh$).

Описанным выше способом получим

$$I_0 = \frac{384}{\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^5} = 0,4200$$

(выкладки в других обозначениях приведены в [4, с. 465]).

Первое слагаемое равенства (5.6) очевидным образом приводится к виду

$$\int_{-h}^{+h} r_{11}\alpha_3 d\alpha_3 = \frac{1}{EL^2} G|_{\alpha_1=0}$$

Поэтому, отбросив общий множитель $(E\eta^2)^{-1}$, получим вместо (5.6) так называемое приведенное граничное условие двумерной теории пластин и оболочек

$$G + 1,2600 h\partial H / \partial\alpha_2 = 0$$

Таким образом, в рассмотренном случае всем четырем условиям затухания модифицированного принципа Сен-Венана соответствуют известные в литературе граничные условия для двумерной теории Кирхгофа – Лява (см., например, [4]). В них учтены и классическая поправка Кельвина–Тейта к перерезывающему усилию и поправка к изгибающему моменту G, впервые обнаруженная в процессе построения так называемых приведенных граничных условий в [11] (из результатов предлагаемой статьи вытекает, что этот результат не является общим: он, строго говоря, верен лишь для случая, когда торцевая сила имеет вид (6.1)).

7. Перейдем к сравнению асимптотических порядков величин P', Q' и P'', Q''. Принципиальная важность этого вопроса состоит в том, что от ответа на него зависит, можно ли модифицированный принцип Сен-Венана использовать в общей теории оболочек так же, как канонический принцип используется в сопротивлении материалов, т.е. в конечном свете, имеют ли вообще смысл двумерные теории оболочек. Ниже приводятся не претендующие на строгость рассуждения, относящиеся к этому вопросу.

Для определения P', Q' надо интегрировать уравнения (4.2), (4.3) с учетом граничных условий (4.5). Формулировка этих краевых задач в явном виде не зависит от малого параметра h. Однако P', Q', по предположению, – затухающие решения и естественно ожидать, что по α_1 они меняются по экспоненциальному закону с большим (при $h \to 0$) показателем степени. Сделаем поэтому традиционную в такой ситуации масштабную замену переменных, положив

$$\alpha_1 = h\xi_1, \quad \alpha_2 = h^\kappa\xi_2, \quad \alpha_3 = h\xi_3, \quad \upsilon_k = hw_k \quad (k = 1,2,3) \tag{7.1}$$

и считая, что дифференцирование по ξ_k уже не изменяет асимптотического порядка искомых функций.

В (7.1) показатели степеней h выбраны из следующих соображений: степень h при ξ_3 соответствует известному факту: вблизи торца пограничный слой оболочки по переменной α_3 имеет показатель изменяемости, равный единице. Такой же показатель должен стоять в формуле для ξ_1: только в этом случае для описания пограничных слоев получатся уравнения, совпадающие в асимптотически главных слагаемых с уравнениями плоской и антиплоской задач теории упругости. Это согласуется с интуитивными представлениями о пограничных слоях и находится в полном соответствии с характером краевых задач, определяющих P', Q'. Под κ в формуле для α_2 подразумевается заданное число ($0 \leqslant \kappa \leqslant 1$). Оно представляет собой показатель изменяемости по переменной α_2 величин r_{11}, r_{12}, r_{13} в торцевых условиях (3.2). О показателе h в последней формуле (7.1) будет сказано ниже.

Внеся (7.1) в (3.3), (3.5), получим формулы преобразования к новым независимым переменным для D_i, D_j, d_i, d_j:

$$D_\rho\left(R;\frac{\partial}{\partial\alpha_1},\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\right)=h^{\lambda-1}D_\rho\left(\overline{R};\frac{\partial}{\partial\xi_1},\frac{\partial}{\partial\xi_3}\right),\quad d_\rho\left(R;\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)=h^{\lambda-\kappa}d_\rho\left(\overline{R};\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right) \tag{7.2}$$

$\lambda = 0$ при $\rho = 1, 4, 5$; $\lambda = 1$ при $\rho = 2,3,6,7,8$

В них индексу ρ можно давать значения i или j, под R можно подразумевать P или Q, а черточка над R означает, что в формулах (3.4) перемещения v_k надо заменить на w_k, т.е. вместо (3.4) надо пользоваться формулами

$$\overline{P}=(\sigma_{12},\sigma_{23};w_2),\quad \overline{Q}=(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33},\sigma_{13};w_1,w_3) \tag{7.3}$$

Систему (4.2), (4.3) при учете (7.2), (7.3) запишем в виде

$$D_i\left(\overline{P};\frac{\partial}{\partial\xi_1},\frac{\partial}{\partial\xi_3}\right)=0\quad(1\leqslant i\leqslant 3) \tag{7.4}$$

$$D_j\left(\overline{Q}';\frac{\partial}{\partial\xi_1},\frac{\partial}{\partial\xi_3}\right)=-h^{1-\kappa}d_j\left(\overline{P}';\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right)\quad(4\leqslant j\leqslant 9) \tag{7.5}$$

Задав $\overline{Q}'$ формулой

$$\overline{Q}'=\overline{Q}_0'+h^{1-\kappa}\overline{Q}_1' \tag{7.6}$$

получим для $\overline{Q}_0'$, $\overline{Q}_1'$ уравнения

$$D_j\left(\overline{Q}_0';\frac{\partial}{\partial\xi_1},\frac{\partial}{\partial\xi_3}\right)=0 \tag{7.7}$$

$$D_j\left(\overline{Q}_1';\frac{\partial}{\partial\xi_1},\frac{\partial}{\partial\xi_3}\right)=-d_j\left(\overline{P}';\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right)\quad(4\leqslant j\leqslant 9) \tag{7.8}$$

Первое из них должно решаться с учетом торцевых условий

$$\sigma_{11}'=r_{11},\quad \sigma_{13}'=r_{13}\quad(\xi_1=0)$$

ко второму надо присоединить соответствующие однородные торцевые условия.

Таким образом, для $\overline{P}'$, $\overline{Q}_0'$, $\overline{Q}_1'$ получаются краевые задачи, в формулировку которых не входит малый параметр h. Заметим, кроме того, что во всех перечисленных задачах неоднородны либо только дифференциальные уравнения, либо только торцевые условия. Будем эти неоднородности интерпретировать как внешние (силовые или деформационные) воздействия и сделаем следующие условные записи:

$$\overline{P}'\Rightarrow[r_{12}],\quad \overline{Q}_0'\Rightarrow[r_{11},r_{13}],\quad \overline{Q}_1'\Rightarrow\left\{d_j(\overline{P}';\partial/\partial\xi_2)\right\} \tag{7.9}$$

Они означают, что причиной возникновения напряжений или перемещений, стоящих слева от стрелки, являются величины, стоящие справа от нее. Квадратные скобки ставятся в (7.9) в тех случаях, когда "внешние воздействия" торцевые, т.е. приложенны к координатной линии $\xi_1 = 0$, фигурные скобки употребляются тогда, когда "внешние воздействия" приторцевые, т.е. приложены к двумерному участку, примыкающему к $\xi_1 = 0$ (напомним, что здесь речь идет о величинах, отмеченных одним штрихом, т.е. обладающих сен-венановским затуханием).

Уравнения для определения P'', Q'' коротко записываются равенствами (4.4). Из расшифровывающих их формул (3.5) следует, что в развернутом виде они представляют собой полную неоднородную систему уравнений теории упругости. Ее неоднородность представлена слагаемыми $d_i(Q', \partial / \partial\alpha_2)$, т.е. зависит лишь от величины Q', которую можно рассматривать как известную, предполагая, что затухающая часть НДС уже построена.

Систему (4.4) надо интегрировать с учетом однородных граничных условий (4.6). Поэтому снова можно считать, что соответствующее НДС порождается "внешними воздействиями", и записать еще одно соотношение типа (7.9)

$$(P'',Q'') \Rightarrow \{d_j(Q'; \partial / \partial\alpha_2)\} \tag{7.10}$$

В основу дальнейших рассуждений положим не претендующее на строгость предположение, что не слишком далеко от торца асимптотические порядки различных НДС можно отождествить с порядком порождающих "внешних воздействий". При этом, однако, будем учитывать, что в (7.9), (7.10) приторцевые (взятые в фигурные скобки) "внешние воздействия" имеют сен-венановский характер, т.е. экспоненциально затухают при показателе степени порядка h^{-1}. Поэтому далее к соотношениям (7.9), (7.10) будет присоединяться условное равенство

$$\{A\} = h[A] \tag{7.11}$$

Оно означает, что, если на торце "внешние воздействия" имеют асимптотически одинаковую интенсивность, то в асимптотических рассуждениях приторцевых "внешние воздействия" надо учитывать с дополнительным множителем h.

Формулировка краевой задачи для P'', Q'' не зависит от малого параметра h. Кроме того, по отношению к P'', Q'' не делается предположения о сен-венановском затухании. Поэтому в соотношении (7.10) нет необходимости прибегать к первой и третьей формулам масштабных преобразований (7.1), достаточно оставить лишь второе из этих равенств. Это значит, что из формул преобразования вида (7.2) учитывать теперь надо лишь одну

$$d_i\left(Q''; \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right) = h^{-\kappa} d_i\left(Q'; \frac{\partial}{\partial\xi_2}\right)$$

Соответственно этому (7.10) заменится соотношением

$$(P'',Q'') \Rightarrow h^{1-\kappa}[d_j(Q'; \partial / \partial\xi_2)] \tag{7.12}$$

При сравнении асимптотических порядков P', Q' и P'', Q'', пользуясь принципом суперпозиции, разобьем общий случай на два (это соответствует расчленению на плоский и антиплоский пограничные слои):

Случай 1: $r_{12} \sim h^0$; $(r_{11}, r_{13}) = 0$

Случай 2: $r_{12} = 0$; $(r_{11}, r_{13}) \sim h^0$

Здесь $\sim$ означает асимптотическую соизмеримость, а нулевой показатель при h выбран для определенности.

В случае 1 при принятом выше грубом предположении из (7.2), (7.6). (7.9), (7.12) следует, что

$$P' \sim h^0, \quad Q_0' = 0, \quad Q_1' \sim h^{1-\kappa}, \quad (P',Q') \sim h^0$$

а соотношение (7.12) в силу этого дает

$$(P'',Q'') \sim h^{2-2\kappa}$$

В случае 2 таким же образом находим

$$(P',Q') \sim h^0, \quad (P'',Q'') \sim h^{1-\kappa}$$

(приведенные рассуждения относятся только к напряжениям и для них не существенна разница между $\overline{P}$, $\overline{Q}$ и P, Q, поэтому здесь черточки опущены).

Таким образом, показано, что есть основание рассчитывать на возможность использовать в теории оболочек модифицированный принцип Сен-Венана так же, как канонический принцип используется в сопротивлении материалов. При этом необходимость перехода к так называемым "приведенным граничным условиям" надо рассматривать не как дефект теорий типа Кирхгофа – Лява, а как отражение специфики модифицированного принципа Сен-Венана.

В работах [12, 13] сравнивались так называемые сдвиговые теории пластин и оболочек с двумерными теориями, вытекающими из асимптотических подходов. Продолжим это обсуждение на основе полученных здесь результатов.

Можно считать, что предложенной здесь парной модели тонкого упругого тела соответствует парная система "сдвиговых гипотез". Часть из них вытекает из свойств оболочки-модели, несущей внутреннее НДС. К ним относится предположение о линейном распределении перемещений по толщине (оно явно не высказывается, но существенным образом используется, поскольку, как показано в [4], только при таких обстоятельствах верны вариационные принципы, кладущиеся в основу сдвиговых теорий).

Другая часть "сдвиговых гипотез" отражает свойства семейства полосок-моделей, несущих краевое НДС. К ним принадлежит предположение о касательном направлении сил взаимодействия между полосками. Оно обусловливает необходимость при исследовании краевого НДС в первую очередь учитывать поперечные сдвиги, так как иначе свойства двух частей парной модели не будут "склеиваться". Остается однако неясным, всегда ли учет поперечных сдвигов достаточен для правильного построения краевого НДС. Не видно также причин полагать, что для уточнения внутреннего НДС достаточен учет только деформаций поперечного сдвига. Вместе с тем "сдвиговые гипотезы" считаются едиными для внутреннего и краевого НДС, хотя ни из чего не следует, что учет деформаций сдвига является приоритетным не только для краевого, но и для внутреннего НДС. Из результатов [12, 13] следует, что это совсем не так.

В заключение отметим два обстоятельства.

1. Замена оболочки полубесконечным слоем G в разд. 3 не уменьшает общности сделанных здесь выводов, хотя и ведет к существенному упрощению выкладок. Последние в сущности совпадают с теми, которые были выполнены в общей триортогональной системе координат и подробно описаны [4].

2. В предполагаемой статье, также в интересах упрощения, рассмотрен лишь случай, когда на торце все напряжения заданы, т.е. отсутствуют заранее неизвестные силы реакции торцевых закреплений. Приемы, позволяющие выводить приведенные граничные условия, а следовательно, и решать поднятые здесь вопросы при наличии торцевых закреплений, описаны в [4, 11].

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (57X000)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Friedrichs K.O., Dressler R.F.* A boundary-layer theory for elastic plates // Comm. Pure and Appl. Math. 1961. V. 14. № 1. P. 1–33.
2. *Гольденвейзер А.Л.* Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 593–608.
3. *Green A.E.* On the linear theory of thin elastic shells // Proc. R. Soc. 1962. V. A266. № 1325. P. 143–160.
4. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
5. *Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д.* Динамический погранслой в задачах колебаний оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 152–162.

6. *Green A.E.* Boundary-layer equations in the linear theory of thin elastic shells // Proc. R. Soc. 1962. V. A269. № 1339. P. 481–491.
7. *Гольденвейзер А.Л.* Погранслой и его взаимодействие с внутренним напряженным состоянием упругой тонкой оболочки // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 6. С. 996–1028.
8. *Васильев В.В.* О теории тонких пластин // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 26–47.
9. *Алфутов Н.А.* О некоторых парадоксах теории тонких упругих пластин // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 65–72.
10. *Жилин П.А.* О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 48–64.
11. *Колос А.В.* Методы уточнения классической теории изгиба и растяжения пластинок // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 771–781.
12. *Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В.* Асимптотический анализ и уточнение теорий пластин и оболочек типа Тимошенко – Рейсснера // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 124–138.
13. *Goldenveizer A.L., Kaplunov J.D., Nolde E.V.* On Timoshenko – Reissner type theories of plates and shells // Intern. J. Solids and Structures. 1993. V. 30. № 5. P. 675–694.

Москва

Поступила в редакцию
5.XI.1993