

УДК 532.526

© 1994 г. В.Н. Диесперов

**НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КАРМАНА, ОПИСЫВАЮЩИЕ  
ТРАНСЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ТОЧКИ ИЗЛОМА ПРОФИЛЯ  
С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ОБРАЗУЮЩЕЙ**

В классе автомодельных решений уравнения Кармана исследуются трансзвуковые течения в окрестности точки излома профиля. Последняя образована пересечением двух гладких кривых, касательные к которым составляют выпуклый угол. Образующая, лежащая в дозвуковой части потока, предполагается криволинейной и изменяющейся по степенному закону. Найдены значения параметра автомодельности, при которых могут реализоваться трансзвуковые течения либо со свободной линией тока, либо с волной разрежения.

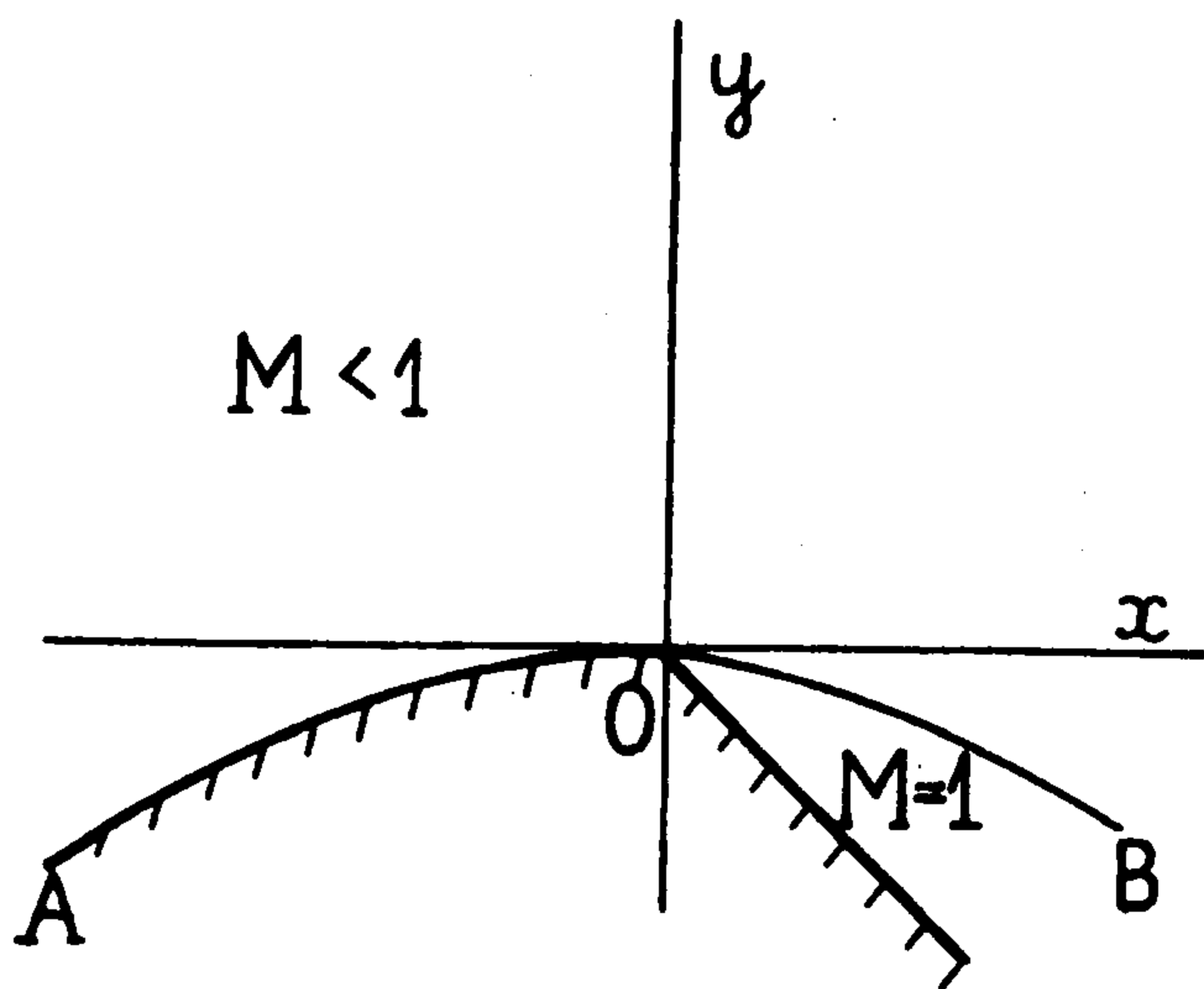
Исследуются трансзвуковые течения в окрестности точки излома профиля, образованной пересечением двух гладких кривых  $AO$  и  $OB$ , касательные к которым образуют выпуклый угол (фиг. 1, 2). Предполагается, что набегающий вдоль  $AO$  дозвуковой поток идеального газа является безвихревым, изэннергетическим и из точки  $O$  выходит звуковая линия. В этом случае все характерные особенности течения в некоторой окрестности точки  $O$  описываются уравнением Кармана, которое допускает класс автомодельных решений [1, 2].

Впервые задача о трансзвуковом обтекании точки излома профиля с волной разрежения была поставлена Вальо – Лаурином при изучении обтекания затупленного тела с отошедшей ударной волной. Ее решение в случае прямолинейной образующей  $AO$  определено в классе автомодельных функций при значении показателя автомодельности  $n = 5/4$  с помощью численных методов [3]. В замкнутой параметрической форме решение Вальо – Лаурина получено в работе [4]. Если образующая  $AO$  прямолинейна и  $n = 6/5$ , то, как показано в [5], может реализоваться автомодельное решение, описывающее течение со свободной линией тока. Скорость на последней равна звуковой.

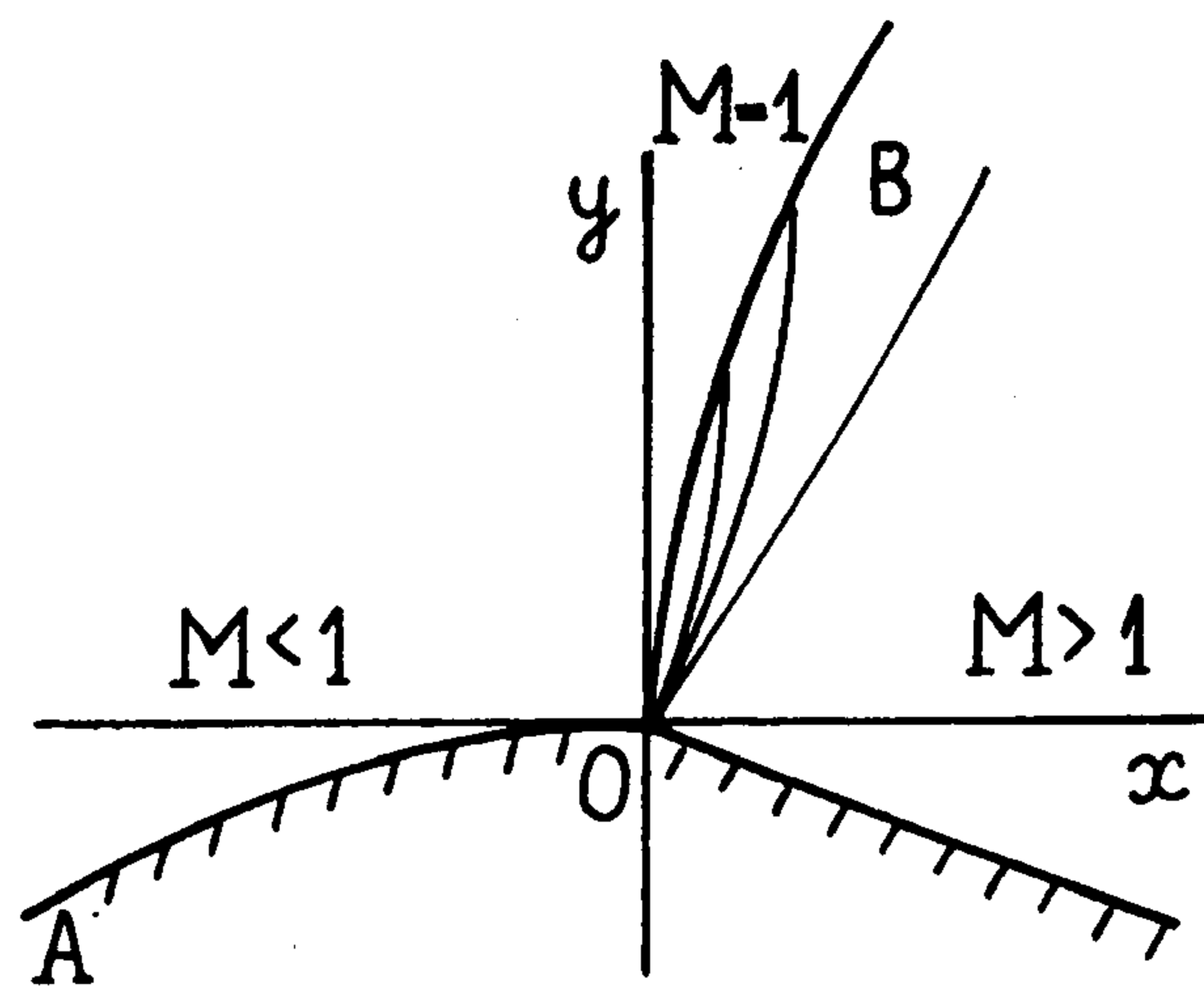
Учет кривизны образующей  $AO$  при  $n = 5/4$  и  $n = 6/5$  производится с помощью следующих приближений [3, 6–8]. Если кривизна  $AO$  постоянна, то ее учет в решении Вальо – Лаурина производится с помощью второго приближения, обусловленного нелинейностью уравнения Кармана. Однако при  $n = 3/2$  было найдено [9] еще одно решение с волной разрежения, аналогичное решению Вальо – Лаурина. Оно дает обтекание точки излома с образующей  $AO$ , имеющей постоянную кривизну.

Ниже найдены автомодельные решения, которые описывают локально трансзвуковые течения в окрестности точки излома профиля с криволинейной образующей  $AO$ , изменяющейся по степенному закону. Показывается, что кроме решений при  $n = 5/4$ ,  $n = 6/5$  и  $n = 3/2$  имеются еще решения с  $n \in (1, 2)$ , которые описывают течения как с волной разрежения (решения типа Вальо – Лаурина), так и со свободной линией тока (фиг. 1, 2), обусловленные криволинейностью образующей  $AO$ .

1. Введем декартову систему координат  $(x, y)$ , отрицательная часть оси  $x$  которой совпадает с касательной к образующей  $AO$  в точке  $O$ , и систему координат Мизеса  $(x, \psi)$  ( $\psi$  – функция тока). Начала обеих систем совпадают с точкой  $O$ . Обозначим через  $q_x$  и  $q_y$  компоненты скорости вдоль оси  $x$  и  $y$  соответственно,  $\rho$  – плотность,  $p$  –



Фиг. 1.



Фиг. 2.

давление,  $\kappa$  – отношение удельных теплоемкостей. Термодинамические переменные связаны уравнением состояния идеального газа. Ниже все параметры течения и система уравнений Эйлера предполагаются безразмерными. В качестве характерных величин берутся их критические значения.

Компоненты возмущенной скорости  $v_x$  и  $v_y$  равны  $v_x = q_x - 1$ ,  $v_y = q_y$ . Окрестность угловой точки  $O$ , в которой  $|v_x| \ll 1$  и  $|v_y| \ll 1$ , обозначим через  $G$ . В области  $G$  систему уравнений Эйлера в переменных Мизеса можно упростить и в первом приближении представить в виде

$$-(1+\kappa)v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial \psi} = 0 \quad (1.1)$$

На основе уравнений (1.1) изучается задача трансзвукового обтекания точки излома профиля с образующей  $AO$ , изменяющейся по степенному закону

$$y = -\frac{\beta^{3-3/n}}{4-3/n} \mathcal{B}(-x)^{4-3/n} + \dots, \quad x \leq 0, \quad \mathcal{B} > 0; \quad n > 1, \quad \beta = (1+\kappa)^{-1/3} \quad (1.2)$$

В зависимости от глобальной задачи обтекания может реализоваться либо течение с волной разрежения, либо течение со свободной линией тока.

Система уравнений Кармана (1.1) обладает классом автомодельных решений. Для потенциала возмущенной скорости  $\Phi$  и ее компонент имеем [1,2]

$$\Phi = \psi^{3n-2} \Phi(\xi), \quad \xi = \beta x / \psi^n, \quad v_x = \beta \psi^{2n-2} f(\xi), \quad v_y = \psi^{3n-3} g(\xi) \quad (1.3)$$

Автомодельная функция  $f(\xi) = d\Phi/d\xi$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению [10]

$$(f - n^2 \xi^2) \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \left( \frac{df}{d\xi} \right)^2 + n(3n-5)\xi \frac{df}{d\xi} - 2(2n-3)(n-1)f = 0 \quad (1.4)$$

Переходя в уравнении (1) к переменным

$$F = \xi^{-2} f, \quad \Psi = \xi dF / d\xi \quad (1.5)$$

получим дифференциальное уравнение первого порядка [10]

$$\frac{d\Psi}{dF} = \frac{-6F - 5n\Psi + 6F^2 + 7F\Psi + \Psi^2}{(n^2 - F)\Psi} \quad (1.6)$$

Для функции  $g(\xi)$  имеем

$$g = \frac{1}{3(n-1)} \left[ (f - n^2 \xi^2) \frac{df}{d\xi} + 2n(n-1)\xi f \right] = \frac{\xi^3}{3(n-1)} [2F(F-n) + (F-n^2)\Psi] \quad (1.7)$$

Кривые, определяемые из уравнений

$$2F(F-n) + (F-n^2)\Psi_V = 0$$

$$-6F - 5n\Psi_P + 6F^2 + 7F\Psi_P + \Psi_P^2 = 0$$

обозначим, соответственно  $V$  и  $P$ . При пересечении интегральными кривыми кривой  $V$  вертикальная компонента скорости меняет знак. В точках кривой  $P$  интегральные кривые имеют нулевой наклон.

Разрешимость задач трансзвуковой газовой динамики часто удобно исследовать в плоскости годографа. Если в системе уравнений (1.1) перейти к одному уравнению для  $\psi$  и к независимым переменным  $u = \beta^{-1}v_x$ ,  $v = v_y$ , то в результате получится уравнение Трикоми [1, 2]. Последнее обладает классом автомодельных решений, соответствующих решениям (1.3) в физической плоскости [1],

$$\psi_j = \rho^j \chi_j(z), \quad \rho^2 = v^2 - \frac{4}{9}u^3, \quad z = \frac{v^2}{\rho^2}, \quad j = \frac{1}{6(n-2)} \quad (1.8)$$

Функция  $\chi_j(z)$  удовлетворяет гипергеометрическому уравнению [7]

$$z(1-z) \frac{d^2 \chi_j}{dz^2} + \left( \frac{1}{2} - \frac{7}{6}z \right) \frac{d\chi_j}{dz} + j \left( j + \frac{1}{6} \right) \chi_j = 0 \quad (1.9)$$

2. Изучим поведение интегральных кривых уравнения (1.6). Оно имеет четыре особые точки  $A(0,0)$ ,  $B(0,1)$ ,  $C(n^2, -n(n+1))$ ,  $D(n^2, -6n(n-1))$  в конечной части плоскости  $(F, \Psi)$  и три бесконечно удаленные особые точки  $E, Q, G$  [5, 11]. Поведение интегральных кривых удобно рассматривать на единичной полусфере Пуанкаре, спроектированной на плоскость  $(F, \Psi)$  (фиг. 3, 4). В результате каждая бесконечно удаленная точка расслаивается на две тождественные, лежащие на экваторе симметрично относительно центра круга. Те из бесконечно удаленных точек, в которые кривые входят или выходят при  $\Psi > 0$ , обозначим через  $E^*, Q^*, G^*$  (а при  $\Psi < 0$  – через  $E, Q, G$ ).

Точка  $A$  – узел и в физической плоскости соответствует  $\psi = 0$ ,  $x \neq 0$ . При  $(-\xi) \rightarrow \infty$  в окрестности оси  $x$  асимптотическое поведение  $\Phi(\xi)$  имеет вид [1]

$$\Phi(\xi) = A_0(-\xi)^{3-2/n} + B_0(-\xi)^{3-3/n} + \dots \quad (2.1)$$

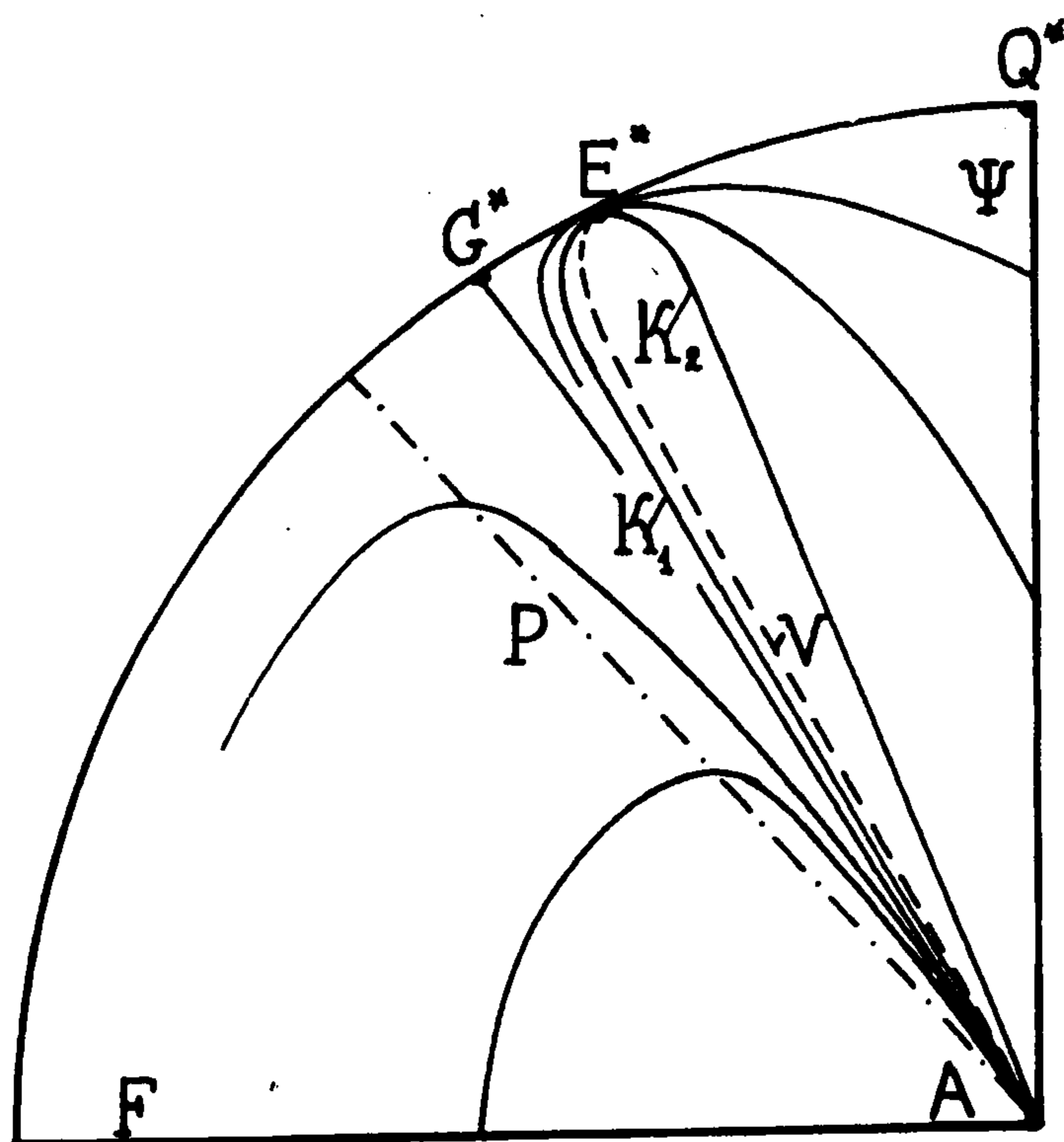
В плоскости  $(F, \Psi)$  им соответствуют интегральные кривые

$$\left( \frac{2}{n} F + \Psi \right) = C_A \left| \frac{3}{n} F + \Psi \right|^{3/2} + \dots \quad (2.2)$$

Произвольные постоянные  $A_0$  и  $B_0$  в (2.1) связаны с  $C_A$  в (2.2) и  $\mathcal{B}$  в (1.2) зависимостью [11]

$$C_A = \frac{3(n-1)n}{(3n-2)^{3/2}} \frac{B_0}{|A_0|^{3/2}}, \quad \mathcal{B} = B_0$$

Если  $B_0 = 0$ ,  $A_0 \neq 0$ , то  $C_A = 0$ . Отсюда вытекает, что  $v_x \neq 0$ , а  $v_y = 0$ . В физической плоскости это соответствует обтеканию профиля с прямолинейной образующей  $y = 0$ ,  $x < 0$ . Интегральную кривую (2.2) с  $C_A = 0$  назовем симметричной и обозначим  $K_1$ .



Фиг. 3.

Интегральную кривую (2.2) в случае  $B_0 \neq 0, A_0 = 0 (C_A = \infty)$  назовем антисимметричной и обозначим  $K_2$ . При  $x > 0$  она соответствует течению со свободной линией тока, на которой скорость равна звуковой.

Особая точка  $B$  при всех значениях  $n > 1$  – седло. Интегральную кривую, проходящую через точку  $B$  с отрицательным наклоном и соответствующую течению типа Прандтля – Майера, обозначим  $K_3$ .

Особая точка  $G - G^*$  – седло. В нее можно попасть только вдоль интегральной кривой [10]

$$\Psi_G = -\frac{3}{2}F + \frac{9}{10}(n-2)\left(n - \frac{4}{3}\right) + \dots, |F| \rightarrow \infty$$

В физической плоскости точка  $G - G^*$  соответствует оси  $y$ , на которой достигается скорость звука. Ускорение при этом становится бесконечным.

Особая точка  $E - E^*$  – узел. В ее окрестности поведение интегральных кривых можно представить в виде

$$\Psi = -2F + C_{E^*}|F|^{1/2} + 4(n-1)\left(n - \frac{3}{2}\right) + \dots, |F| \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

Если интегральная кривая  $f = f(\xi)$  уравнения (1.4) гладко проходит ось  $\xi = 0$  при  $f < 0$ , то в окрестности точки  $\xi = 0$  ей соответствуют две интегральные кривые семейства (2.3) при  $F \rightarrow -\infty$  с  $C_{E^*} = \alpha$  и  $C_{E^*} = -\alpha$ , где  $\alpha$  – некоторая не равная нулю постоянная.

В физической плоскости точка  $E - E^*$  соответствует оси  $y$ . Кривую узла при  $C_{E^*} = 0$  и  $F < 0$  обозначим  $\Psi_{E^*}$ .

Точка  $Q - Q^*$  – узел и достигается при движении вдоль предельной линии  $|\Psi| \rightarrow \infty, F = n^2 (f = n^2 \xi^2)$ .

При переходе через точку  $Q - Q^*$  величина  $\xi$  достигает экстремума. Это означает, что физическая плоскость перекрывается дважды. При приближении к точке  $Q - Q^*$  ускорение потока стремится к бесконечности.

Точки  $C$  и  $D$  при исследовании не используются, поэтому останавливаться на них не будем.



$$v_x \rightarrow 0, \quad \psi \rightarrow 0, \quad x > 0 \quad (3.2)$$

Вертикальная компонента скорости  $v_y$  в окрестности  $AO$  положительна, а в окрестности  $OB$  – отрицательна. Если образующая  $AO$  прямолинейна ( $v_y = 0$  при  $\psi = 0$  и  $x < 0$ ), то решение задачи (1.1), (3.1), (3.2) дается в плоскости  $(F, \Psi)$  функциями (фиг. 3)

$$\Psi^{(\pm)} = -5F \frac{5(3-2F) \pm \sqrt{3(3-2F)}}{36-25F}, \quad -\infty < F < 0$$

Кривая  $\Psi^{(-)}$  выходит из точки  $A$ , являясь кривой  $K_1$ , и попадает в точку  $E^*$  ( $C_{E^*} = -\sqrt{6}/5$ ). В точке  $E^*$  она переходит в кривую  $\Psi^{(+)}$ , которая является кривой  $K_2$  ( $C_{E^*} = -\sqrt{6}/5$ ). Кривая  $\Psi_{E^*}$  ( $C_{E^*} = 0$ ) лежит между кривыми  $K_1$  и  $K_2$ . Все интегральные кривые семейства (2.2), которые располагаются между кривыми  $K_1$  и  $\Psi_{E^*}$ , попадают в точку  $E^*$ . Затем, продолженные, они возвращаются в точку  $A$ , располагаясь между кривыми  $\Psi_{E^*}$  и  $K_2$ . При  $n < 6/5$  кривая  $K_2$ , достигнув точки  $E^*$ , переходит в кривую, которая возвращается обратно в  $A$  между кривыми  $K_1$  и  $\Psi_{G^*}$ . Поэтому она не пересекает кривую  $V$ , а знак скорости не меняется с отрицательного на положительный. Пусть теперь  $n > 6/5$ . В этом случае кривая  $K_2$ , попадая в  $E^*$ , затем продолжается кривой, которая приходит в точку  $A$ , располагаясь между кривыми  $K_1$  и  $\Psi_{E^*}$ . Она пересекает кривую  $V$ . Такая ситуация будет иметь место до тех пор, пока параметр  $n$  не станет равным  $3/2$ . При  $n = 3/2$  кривая  $K_2$  переходит в прямую  $\Psi = -2F$  и совпадает с  $\Psi_{E^*}$ . При  $n > 3/2$  все кривые, выходящие из точки  $A$  при  $F < 0$  между кривыми  $\Psi_{G^*}$  и  $K_2$ , попадают в точку  $E^*$  и продолжают кривыми, которые достигают либо точки  $Q^*$ , либо  $B$ , либо  $A$ . При этом они обязательно пересекают ось  $F = 0$ , и мы не можем удовлетворить граничному условию (3.2).

Разрешимость задачи (1.1), (3.1), (3.2) наиболее удобно исследовать в плоскости годографа. Решение уравнения (1.9), удовлетворяющее условию (3.1), имеет вид

$$\psi_j = D_j \rho^j (1-z)^{1/3} F\left(\frac{1}{3}-j, \frac{1}{2}+j; \frac{4}{3}; 1-z\right), \quad D_j > 0 \quad (3.3)$$

Аналитическое продолжение решения (3.3) в окрестность  $z = 0$  ( $u < 0, v \rightarrow -0$ ) имеет вид [12]

$$\begin{aligned} \psi_j = D_j \rho^j (1-z)^{1/3} & \left[ \frac{\Gamma(4/3)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1+j)\Gamma(5/6-j)} F\left(\frac{1}{3}-j, \frac{1}{2}+j; \frac{1}{2}; z\right) + \right. \\ & \left. + \frac{\Gamma(4/3)\Gamma(-1/2)}{\Gamma(1/3-j)\Gamma(1/2+j)} z^{1/2} F\left(1+j, \frac{5}{6}-j; \frac{3}{2}; z\right) \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Если  $n > 6/5$  ( $j < 5/6$ ), то первый член в правой части (3.4) положителен. Переход через ось  $v = 0$  означает пересечение кривой  $V$  на фазовой плоскости  $(F, \Psi)$ .

Установим, при каких значениях  $n$  кривая в плоскости  $(F, \Psi)$ , соответствующая решению (3.4), попадает в точку  $A$ . Продолжим решение (3.4) через ось  $v = 0$  так, чтобы в физической плоскости соответствующее решение было гладким. Это условие будет удовлетворено, если в области  $u < 0, v > 0$  решение уравнения (1.9) взять в

виде

$$\psi_j = D_j \rho^j (1-z)^{1/3} \left[ \frac{\Gamma(4/3)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1+j)\Gamma(5/6-j)} F\left(\frac{1}{3}-j, \frac{1}{2}+j; \frac{1}{2}; z\right) - \frac{\Gamma(4/3)\Gamma(-1/2)}{\Gamma(1/3-j)\Gamma(1/2+j)} z^{1/2} F\left(1+j, \frac{5}{6}-j; \frac{3}{2}; z\right) \right] \quad (3.5)$$

Аналитическое продолжение решения (3.5) в окрестность  $z = 1$  ( $u = 0, v > 0$ ) дает

$$\psi_j = D_j \rho^j \left[ \frac{2\pi\Gamma(1/3)\Gamma(4/3)}{\Gamma(1+j)\Gamma(1/2+j)\Gamma(5/6-j)\Gamma(1/3-j)} F\left(\frac{1}{6}+j, -j; \frac{2}{3}; 1-z\right) + -\frac{2}{\sqrt{3}} \cos \pi \left(2j + \frac{1}{6}\right) (1-z)^{1/3} F\left(\frac{1}{3}-j, \frac{1}{2}+j; \frac{4}{3}; 1-z\right) \right] \quad (3.6)$$

При  $6/5 < n < 3/2$  ( $5/6 > j > 1/3$ ) первый член в правой части (3.6) меньше нуля. Значит, при некотором  $z^*$  функция тока  $\psi_j$  обращается в нуль. Это означает, что в плоскости  $(F, \Psi)$  интегральная кривая после пересечения кривой  $V$  попадает в  $A$ , и все требования, налагаемые на решение задачи, выполняются.

Исследуем на плоскости годографа разрешимость задачи при  $n < 6/5$ . Если  $5/6 - j = -k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ), то первый член в (3.4) пропадает. Получаем спектр значений

$$n_k = \frac{6k+6}{6k+5} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

при котором функции тока  $\psi_j = 0$  при  $u < 0, v = 0$ .

Решение при  $n_0 = 6/5$  ( $k = 0$ ) было найдено в [5], и на фазовой плоскости дается описанными выше функциями  $\Psi = \Psi^{(\pm)}(F)$  ( $F < 0$ ).

Покажем, что при остальных значениях  $n_k$  решения (1.8), (1.9) не могут быть взяты в качестве решения поставленной нами физической задачи.

Представим уравнение (1.9) в самосопряженной форме [2]

$$\frac{d}{dz} \left( z^{1/2} (1-z)^{2/3} \frac{d\chi_j}{dz} \right) + \frac{j(j+1/6)}{z^{1/2} (1-z)^{1/3}} \chi_j = 0 \quad (3.7)$$

Коэффициент перед вторым членом в правой части (3.4) при  $j - 5/6 = k$  пропорционален  $\Gamma^{-1}(-k-1/2)$ . Если  $k = 1$ , то он отрицателен. Следовательно, решение имеет хотя бы один нуль  $z^* \in (0, 1)$ . На основании теоремы Штурма [13] можно утверждать, что все решения (3.3) при  $k > 1$  будут иметь нули. В результате получаем, что обтекание точки излома с прямолинейной образующей  $AO$  в классе автомодельных функций описывается единственным решением с  $n = 6/5$ .

Рассмотрим случай, когда образующая  $AO$  криволинейна и  $n < 6/5$  ( $j > 5/6$ ). Из формулы (3.4) видно, что если  $0 < j - 5/6 < 1$ , то внутри интервала  $0 < z < 1$  имеется нуль, так как первый член в (3.4) отрицателен. Обозначим его  $z_j^*$ . Тогда при  $1 < j - 5/6 < 2$  по теореме Штурма на интервале  $(z_j^*, 1)$  имеется хотя бы один нуль решения (3.4). Рассуждая подобным образом, приходим к заключению, что при всех  $j > 5/6$  на интервале  $(0, 1)$  решение (3.3) имеет хотя бы один нуль.

Таким образом, поставленная задача (1.1), (3.1), (3.2) в классе автомодельных функций имеет решение при  $6/5 \leq n < 3/2$ .

4. Обратимся к задаче трансзвукового обтекания точки излома профиля с волной разрежения. Требуется найти такое гладкое решение системы уравнений (1.1), которое на образующей  $AO$  удовлетворяло бы условию непротекания (3.1), а при

$\psi \rightarrow 0, x > 0$  переходило бы в решение типа Прандтля – Майера. Решение Вальо – Лаурина изображается в плоскости  $(F, \Psi)$  интегральной кривой, которая из точки  $A$  выходит как кривая  $K_1$  и достигает  $E^*$ . Из точки  $E^*$  она продолжается кривой семейства (2.3) и приходит в  $B$ . При  $5/4 < n < 4/3$  ( $2/3 > j > 1/2$ ) кривая  $K_1$  попадает в точку  $E^*$ , затем продолжается кривой, которая попадает в  $Q^*$ , предварительно пересекая ось  $F = 0$ . Это означает переход через скорость звука. Одна из кривых семейства (2.2), выходящая из точки  $A$  между  $K_1$  и  $K_2$  и продолженная через  $E^*$ , попадает в точку  $B$ . Она обязательно пересекает кривую  $V$ , что приводит к изменению знака компоненты скорости  $v_y$  с положительного на отрицательный.

При  $n = 4/3$  ( $j = 1/2$ ) кривая  $K_1$  переходит в прямую  $\Psi = -3/2 F$  и попадает в точку  $G^*$ .

При  $4/3 < n$  ( $j < 1/2$ ) кривая  $K_1$  располагается ниже кривой  $\Psi_{G^*}$ .

При  $4/3 \leq n < 3/2$  ( $1/2 \geq j > 1/3$ ) одна из кривых, находящихся между  $\Psi_{G^*}$  и  $\Psi_{E^*}$ , после продолжения ее через точку  $E^*$ , попадает в  $B$ . Кривая  $K_2$  при этих значениях  $n$  лежит выше прямой  $\Psi = -2F$  при всех  $F \in (-\infty, 0)$ .

Если  $n = 3/2$  ( $j = 1/3$ ), кривая  $K_2$  переходит в прямую  $\Psi_{E^*} = -2F$ .

При  $3/2 < n < 5/3$  ( $1/3 > j > 1/4$ ) одна из кривых, расположенных между  $\Psi_{G^*}$  и  $K_2$ , после ее продолжения через точку  $E^*$ , приходит в  $B$ .

Когда  $n$  становится равным  $5/3$ , кривая  $K_2$  продолжается в точке  $E^*$  кривой, которая попадает в  $B$ . В этом случае все кривые, выходящие из точки  $A$  между  $\Psi_{G^*}$  и  $K_2$ , после продолжения через точку  $E^*$ , попадут в  $Q^*$  (фиг. 4).

При  $n < 5/4$  все интегральные кривые, находящиеся между  $K_1$  и  $\Psi_{E^*}$ , после продолжения через  $E^*$  обратно возвращаются в точку  $A$ , располагаясь ниже кривой  $K_2$ . Точки  $B$  они достигнуть не могут.

Рассмотрим плоскость годографа. В окрестности предельной характеристики решение уравнения (1.9), обращающееся на ней в нуль, имеет вид

$$\chi_j = z^{-j-1/6} F\left(\frac{1}{6} + j, \frac{2}{3} + j; \frac{7}{6} + 2j; z^{-1}\right), \quad D_j > 0. \quad (3.8)$$

Решение (3.8) в окрестности предельной характеристики соответствует в плоскости  $(F, \Psi)$  интегральной кривой  $K_3$ . В результате аналитического продолжения решения (3.8) через точку  $z = 1$  в окрестность точки  $z = 0$  ( $u < 0, v = 0$ ) находим

$$\begin{aligned} \psi_j = D_j \rho^j & \left[ 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1/6 + 2j) \sin \pi(1/3 + j)}{\Gamma(2/3 + j) \Gamma(1 + j)} F\left(\frac{1}{3} - j, \frac{1}{2} + j; \frac{1}{2}; z\right) - \right. \\ & \left. - 4\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1/6 + 2j) \cos \pi(1/3 + j)}{\Gamma(1/2 + j) \Gamma(1/6 + j)} z^{1/2} F\left(1 + j, \frac{5}{6} - j; \frac{3}{2}; z\right) \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Если

$$1/3 + j = k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.10)$$

то функция тока (3.9) обращается в нуль при  $v = 0$ . Это соответствует обтеканию точки излома с прямолинейной образующей  $AO$ . При  $k = 1$  получаем решение Вальо – Лаурина.

Покажем, что остальные значения спектра (3.10) не дают физически осмысленных решений. Решение (3.9) при условии (3.10) принимает вид

$$\psi_j = -D_j \rho^j \left[ 4\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1/2 + 2k) \cos \pi k}{\Gamma(1/6 + k) \Gamma(-1/6 + k)} z^{1/2} F\left(\frac{2}{3} + k, \frac{7}{6} - k; \frac{3}{2}; z\right) \right] \quad (3.11)$$

При  $k = 2m$  значение  $\psi_j$  (3.11) меньше нуля, когда  $z \rightarrow 0$ ,  $v < 0$ . При  $z = 1$  решение (3.8) принимает значение

$$\psi_j = D_j \rho^j \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(1/2+2k)}{\Gamma(2/3+k)\Gamma(1/6+k)} > 0$$

Следовательно, на отрезке  $[0, 1]$  решение (3.8) при четном  $k$  обращается в нуль. Так как решение (3.8) удовлетворяет уравнению (3.7), то можно применить теорему Штурма. Из нее следует, что при  $k = 2m + 1$  и  $m \geq 1$  решение (3.8) также обращается в нуль.

Остановимся сначала на случае  $n > 5/4$ . Продолжение решения (3.9) в окрестность линии  $z = 1$  в области  $v > 0$  дает

$$\begin{aligned} \psi_j = 2D_j \rho^j & \left[ \frac{\Gamma(7/6+2j)\Gamma(1/3)}{\Gamma(1+j)\Gamma(1/2+j)} \cos 2\pi j F\left(\frac{1}{6}+j, -j; \frac{2}{3}; 1-z\right) + \right. \\ & \left. + \frac{\Gamma(7/6+2j)\Gamma(-1/3)}{\Gamma(2/3+j)\Gamma(1/6+j)} \cos \pi(1/3+2j)(1-z)^{1/3} F\left(\frac{1}{3}-j, \frac{1}{2}+j; \frac{4}{3}; 1-z\right) \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Первый член в решении (3.12) при  $5/4 < n < 5/3$  ( $1/4 < j < 2/3$ ) отрицателен. Следовательно, на интервале  $0 < z < 1$  ( $u < 0$ ,  $v > 0$ ) функция тока обращается в нуль. Значение корня  $z^*$  позволяет найти связь между постоянными  $A_0$  и  $B_0$ . Итак, при  $5/4 < n < 5/3$  задача имеет решение.

Рассмотрим теперь случай  $6/5 < n < 5/4$  ( $2/3 < j < 5/6$ ). При этих значениях  $j$  первый член в правой части (3.9) отрицателен. Значит, на интервале  $0 < z < 1$  ( $u < 0$ ,  $v < 0$ ) функция тока  $\psi_j$  обращается в нуль. Это означает, что интегральная кривая достигает точки  $A$ , не пересекая линию  $V$ . Случай  $n < 6/5$  ( $j > 5/6$ ) аналогичен разобранному ранее.

Таким образом, имеются два семейства автомодельных решений уравнения Кармана. Одно из них при  $6/5 < n < 3/2$  описывает трансзвуковое обтекание точки излома профиля со свободной линией тока, которое формируется в главном под влиянием кривизны образующей  $AO$ . Другое, при  $5/4 < n \leq 5/3$  – с волной разрежения. Эти решения существуют параллельно решениям, которые можно построить на основе решений при  $n = 6/5$  и  $n = 5/4$ , добавляя члены, учитывающие кривизну. Вызывает интерес вопрос, какие из вышеописанных локальных решений реализуются на практике. Он не простой, так как на выбор решений влияет не только наличие точки излома в течение, но и краевые условия. Было показано [11], что под влиянием последних может выработаться совсем другой тип обтекания точки излома, который реализуется при  $n = 2$ . При ответе на этот вопрос необходимо в первую очередь выяснить, какую роль играет в окрестности точки излома профиля вязкость и теплопроводность. Хотя вопрос о единственности решения Вальо – Лаурина был поставлен давно [9], он, дополненный вопросом о единственности решения при  $n = 6/5$ , остается открытым. По всей видимости, выбор решения зависит от рассматриваемой глобальной задачи. Решение, реализуемое в ней, обусловлено градиентом давления, который вырабатывается в окрестности точки излома.

*Замечание.* В работе автора "Исследование автомодельных решений, описывающих течение в слоях смешения" (1986. Т. 50. Вып. 3. С. 403–414.) на с. 412 шестую строку после формул следует читать: "Таким образом, при  $m > 1/2$  и заданной величине  $b > 0$  решение задачи (2)–(5) в классе трижды непрерывно дифференцируемых функций существует и единственно при  $m \geq 1$ ".

Допущенная неточность несущественна, так как в диапазоне значений  $m \in (1/2, 1)$  задачи, имеющие физический смысл, неизвестны. При  $m \in (1/2, 1)$  (так же как и для всех  $m > 1/2$ ) существование и единственность физической задачи, соответствующей

(2)–(5), обеспечивается, как отмечалось в начале работы, например, условиями:  $\Phi(\zeta) \rightarrow c < 0, \zeta \rightarrow -\infty$ ;  $\Phi'(\zeta) > 0, \zeta \in (-\infty, +\infty)$ . Второе условие можно также заменить требованием  $\Phi(\zeta) \rightarrow +\infty, \zeta \rightarrow +\infty$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-17363).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гудерлей К.Г. Теория околозвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит. 1960. 421 с.
2. Коул Дж., Кук Л.П. Трансзвуковая аэродинамика. М.: Мир, 1989. 360 с.
3. Vaglio – Laurin R. Transonic rotational flow over a convex corner // J. Fluid Mech. 1960. V. 9. No. 1. P. 81–103.
4. Фалькович С.В., Чернов И.А. Обтекание тел вращения звуковым потоком газа // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 2. С. 280–284.
5. Диесперов В.Н. Об одном решении уравнения Кармана, описывающем обтекание выпуклого угла // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254. № 6. С. 1367–1371.
6. Есин А.И., Чернов И.А. К вопросу о локальном течении вблизи выпуклого угла // Аэродинамика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1978. Вып. 6(9). С. 17–32.
7. Диесперов В.Н. О некоторых решениях уравнения Кармана, описывающих обтекание точек излома профиля // Учен. зап. ЦАГИ. 1984. Т. 15. № 2. С. 11–19.
8. Диесперов В.Н. Точное решение уравнения Кармана – Фальковича, описывающее отрыв от угловой точки профиля // Докл. АН СССР. 1989. Т. 306. № 3. С. 561–565.
9. Лифшиц Ю.Б., Шифрин Э.Г. К задаче о трансзвуковом обтекании выпуклого угла // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 2. С. 67–69.
10. Рыжов О.С. Исследование трансзвуковых течений в соплах Лаваля. М.: ВЦ АН СССР, 1965. 238 с.
11. Диесперов В.Н. Трансзвуковое течение разрежения в окрестности выпуклого угла // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 4. С. 651–661.
12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 295 с.
13. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.

Москва

Поступила в редакцию  
14.XII.1993