УДК 62–50

© 1994 г. В.И. Ухоботов

# ОБЛАСТЬ БЕЗРАЗЛИЧИЯ В ОДНОТИПНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ УДЕРЖАНИЯ НА ОГРАНИЧЕННОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ

Рассматриваются однотипные игры, в которых вектограммы игроков описываются одним и тем же выпуклым симметрическим компактом, который в каждый момент времени гомотетично растянут. Платой [1] является максимальное значении функции Минковского этого компакта вдоль движения на заданном промежутке времени.

Ранее была вычислена [2] цена игры с простыми движениями, плата в которой равняется минимальному значению выпуклой функции вдоль движения. Рассмотрен [3] пример однотипной игры, в котором до определенного момента времени первому игроку можно брать любое допустимое значение своего управления. Для некоторых классов игр вычислена [4] цена игры, которая принимает постоянное значение в некоторой области пространства позиций.

**1.** Задано линейное пространство $E$. Фиксирован момент времени $p$ и при $t \leqslant p$ определены неотрицательные скалярные функции $a(t)$ и $b(t)$, которые суммируемы на каждом конечном отрезке.

Рассматривается дифференциальная игра

$$z^{\cdot} = -a(t)u + b(t)\upsilon; \quad z,u,\upsilon \in E; \quad \lambda(u) \leqslant 1, \quad \lambda(\upsilon) \leqslant 1 \tag{1.1}$$

Относительно ненулевой функции $\lambda$: $E \to R$ предполагаем, что она удовлетворяет следующим условиям функции Минковского:

$$\begin{gathered} \lambda(\varepsilon z) = |\varepsilon|\lambda(z), \quad \forall \varepsilon \in R, \quad \forall z \in E; \quad 0 \leqslant \lambda(z) < +\infty \\ \lambda(z) - \lambda(x) \leqslant \lambda(z+x) \leqslant \lambda(z) + \lambda(x), \quad \forall x, z \in E \end{gathered} \tag{1.2}$$

При определении стратегий игроков и движения будем следовать процедуре [5]. Рассмотрим произвольные управления $u(t, z)$, $\upsilon(t, z)$ игроков, стесненные ограничениями

$$\lambda(u(t,z)) \leqslant 1, \quad \lambda(\upsilon(t,z)) \leqslant 1 \tag{1.3}$$

Зафиксируем начальный момент времени $t_0 < p$ и возьмем разбиение

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} = p \tag{1.4}$$

Для начального состояния $z(t_0) = z_0$ построим ломаную

$$z(t) = z(t_i) - \left(\int_{t_i}^{t} a(r)dr\right) u\big(t_i, z(t_i)\big) + \left(\int_{t_i}^{t} b(r)dr\right) \upsilon(t_i, z(t_i)), \quad t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1} \tag{1.5}$$

Из свойств (1.2) и из ограничения (1.3) следует, что

$$\big|\lambda(z(t)) - \lambda(z(\tau))\big| \leqslant \int_{\tau}^{t} (a(r) + b(r))dr, \quad \tau \leqslant t \leqslant p$$

Из этого неравенства следует, что семейство функций $\lambda(z(t))$ на отрезке $[t_0, p]$ является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным. По теореме

Арцела [6] из любой последовательности $\lambda(z_n(t))$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на отрезке $[t_0, p]$.

Под реализацией значений функции $\lambda$ на движении, порожденном управлениями (1.3), понимаем любую функцию $\lambda_*(t) \geqslant 0$, которая является равномерным пределом на отрезке $[t_0, p]$ последовательности функций $\lambda(z_n(t))$. Здесь $z_n(t)$ – последовательность ломаных (1.5) с диаметром разбиения

$$m = \max_{0 \leqslant i \leqslant k} (t_{i+1} - t_i) \to 0 \tag{1.6}$$

Цель первого игрока заключается в минимизации величины

$$\max_{t_0 \leqslant t \leqslant p} \max(\lambda_*(t) + f_1(t); f_2(t)) \tag{1.7}$$

Второй игрок эту величину максимизирует. Здесь $f_i(t)$ – непрерывные при $t \leqslant p$ функции. Обозначим

$$f(t) = \max_{t \leqslant \tau \leqslant p} \left( \int_t^\tau (b(r) - a(r))dr + f_1(\tau) \right) \tag{1.8}$$

$$F(t) = \max_{t \leqslant \tau \leqslant p} \max\left(f(\tau); f_2(\tau)\right) \tag{1.9}$$

В пространстве переменных $t$, $z$ рассмотрим множества

$$A = \{(t,z): \lambda(z) + f(t) > F(t)\}$$

$$A_0 = \{(t,z): \lambda(z) + f(t) = F(t)\}, \quad A_1 = \{(t,z): \lambda(z) + f(t) < F(t)\} \tag{1.10}$$

Введем функцию

$$D(t,z) = \max\{F(t);\ \lambda(z) + f(t)\} \tag{1.11}$$

Рассмотрим следующее управление первого игрока:

$$u(t,z) = z / \lambda(z), \quad (t,z) \in A; \quad u(t,z) = u, \quad \forall u: \lambda(u) \leqslant 1, \ (t,z) \overline{\in} A \tag{1.12}$$

Зафиксируем произвольное управление (1.3) второго игрока, начальное состояние $z_0 = z(t_0)$ и любую реализацию $\lambda_*(t)$, порожденную управлением (1.12).

*Теорема 1.1*. Управление (1.12) обеспечивает неравенство

$$\max\left(\lambda_*(t) + f_1(t); f_2(t)\right) \leqslant D(t_0, z_0), \quad \forall t \in [t_0, p] \tag{1.13}$$

*Доказательство*. Обозначим

$$\varphi(t) = \max\{F(t); \lambda_*(t) + f(t)\} \tag{1.14}$$

Согласно формулам (1.11) и (1.14), $\varphi(t_0) = D$. Здесь обозначено $D = D(t_0, z_0)$.

Из формул (1.8) и (1.9) следует, что $f_1(t) \leqslant f(t)$ и $f_2(t) \leqslant F(t)$. Поэтому, если $\varphi(t) \leqslant D$ при всех $t \in [t_0, p]$, то условие (1.13) будет выполнено.

Пусть $\varphi(t^*) > D$ при некотором $t^* \in (t_0, p]$. Обозначим $t_* = \sup\left\{t \in [t_0, t^*): \varphi(t) = D\right\}$.

Тогда

$$\varphi(t) > D, \quad \forall t \in (t_*, t^*]; \quad \varphi(t_*) = D \tag{1.15}$$

Отсюда и из формулы (1.11) следует, что $\varphi(t) > D \geqslant F(t_0)$ при всех $t \in (t_*, t^*]$. Стало быть, учитывая монотонность функции $F$ (1.9), получим $\varphi(t) > F(t)$. Отсюда используя формулу (1.14), получим неравенство

$$\lambda_*(t) + f(t) > F(t), \quad \forall t \in (t_*, t^*] \tag{1.16}$$

Рассмотрим последовательность ломаных $z_n(t)$ с диаметрами разбиения $m_n \to 0$, для которых $\lambda(z_n(t)) \to \lambda_*(t)$ равномерно на $[t_0, p]$.

Зафиксируем число $\tau \in (t_*, p)$. Тогда, используя неравенство (1.16), найдем номер $n_*$ такой, что при всех $n > n_*$ выполнены следующие условия:

$$\lambda(z_n(t)) + f(t) > F(t), \quad \forall t \in [\tau, t^*] \tag{1.17}$$

$$\lambda(z_n(t)) - \int_t^r a(s)ds > 0, \quad \tau \leqslant t < r \leqslant t + m_n, \quad r \leqslant t^* \tag{1.18}$$

Зафиксируем ломаную с номером $n > n_*$. Пусть $t_{i-1} < \tau \leqslant t_i < \ldots < t_l < t^* \leqslant t_{l+1}$ часть ее точек разбиения.

Из неравенства (1.17) следует, что управление (1.12) равняется $u(t_j, z_n(t_j)) = (z_n(t_j)) / \lambda(z_n(t_j))$, $i \leqslant j \leqslant l$.

Подставим это управление в формулу (1.5). Тогда, используя свойства (1.2), получим

$$\lambda\big(z_n(t_{j+1})\big) \leqslant \left|\lambda\big(z_n(t_j)\big) - \int_{t_j}^{t_{j+1}} a(s)ds\right| + \int_{t_j}^{t_{j+1}} b(s)ds$$

Отсюда и из неравенства (1.18) следует, что

$$\lambda(z_n(t_l)) \leqslant \lambda(z_n(t_i)) + \int_{t_i}^{t_l} \big(b(s) - a(s)\big)ds$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и учтем, что $t_i \to \tau$, $t_l \to t^*$. Затем устремим $\tau$ к $t_*$. Будем иметь

$$\lambda_*(t^*) \leqslant \lambda_*(t_*) + \int_{t_*}^{t^*} \big(b(s) - a(s)\big)ds$$

Отсюда, используя определение функции (1.8), получим неравенство

$$\lambda_*(t^*) + f(t^*) \leqslant \lambda_*(t_*) + f(t_*) \tag{1.19}$$

Из неравенства (1.16) и из формулы (1.14) следует, что левая часть неравенства (1.19) равняется $\varphi(t^*)$. Из второго равенства (1.15) получим, что правая часть неравенства (1.19) равна $D$. Получим противоречие с первым неравенством (1.15).

**2.** Рассмотрим игру с позиции второго игрока. Зафиксируем следующее управление второго игрока:

$$\begin{aligned} &\upsilon(t,z) = z / \lambda(z); \ (t,z) \in A \cup A_0, \ \lambda(z) \neq 0 \\ &\upsilon(t,z) = \upsilon, \ \forall \upsilon : \lambda(\upsilon) = 1; \ (t,z) \in A_0, \ \lambda(z) = 0 \\ &\upsilon(t,z) = \upsilon, \ \forall \upsilon : \lambda(\upsilon) \leqslant 1; \ (t,z) \in A_1 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Зафиксируем любое управление (1.3) первого игрока и рассмотрим произвольную ломаную (1.5).

*Лемма 2.1.* Пусть при некотором $0 \leqslant j \leqslant k$ выполнено включение

$$(t_j, z(t_j)) \in A \cup A_0 \tag{2.2}$$

Тогда либо

$$(t_{j+1}, z(t_{j+1})) \in A \cup A_0, \quad D(t_{j+1}, z(t_{j+1})) \geqslant D(t_j, z(t_j)) \tag{2.3}$$

либо при некотором $t \in [t_j, t_{j+1}]$ выполнено неравенство

$$\lambda(z(t)) + f_1(t) \geqslant D(t_j, z(t_j)) \tag{2.4}$$

*Доказательство.* Из включения (2.2), формул (1.10) и (1.11) следует, что

$$\lambda(z(t_j)) + f(t_j) = D(t_j, z(t_j)) \tag{2.5}$$

Подставим управление (2.1) в формулу (1.5). Используя свойства (1.2), получим, что при всех $t \in [t_j, t_{j+1}]$ выполнено неравенство

$$\lambda(z(t)) \geqslant \lambda(z(t_j)) + \int_{t_j}^{t} (b(r) - a(r))dr \tag{2.6}$$

Из формулы (1.8) следует, что при некотором $\tau \in [t_j, p]$ выполнено равенство

$$f(t_j) = \int_{t_j}^{\tau} (b(r) - a(r))dr + f_1(\tau) \tag{2.7}$$

Пусть $t_j \leqslant \tau \leqslant t_{j+1}$. Положим $t = \tau$. Тогда из (2.7), (2.6) и (2.5) получим неравенство (2.4).

Пусть $\tau > t_{j+1}$. Тогда из (2.7) и (1.8) следует, что

$$f(t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (b(r) - a(r))dr + f(t_{j+1})$$

Отсюда и из формул (2.5) и (2.6) получим, что

$$\lambda(z(t_{j+1})) + f(t_{j+1}) \geqslant D(t_j, z(t_j)) \tag{2.8}$$

Из формул (1.11) и (1.9) имеем, что $D(t_j, z(t_j)) \geqslant F(t_j) \geqslant F(t_{j+1})$. Следовательно, согласно формуле (1.11), левая часть неравенства (2.8) равняется $D(t_{j+1}, z(t_{j+1}))$ и не меньше $F(t_{j+1})$. Отсюда получим требуемые соотношения (2.3).

Зафиксируем произвольное управление (1.3) первого игрока и начальное состояние $z(t_0) = z_0$.

*Теорема 2.1.* Для управления (2.1) существует реализация $\lambda_*(t)$, удовлетворяющая неравенству

$$\max_{t_0 \leqslant t \leqslant p} \max(\lambda_*(t) + f_1(t); f_2(t)) \geqslant D(t_0, z_0) \tag{2.9}$$

*Доказательство.* Возьмем произвольную ломаную $z(t)$ (1.5).

Пусть $(t_0, z_0) \in A \cup A_0$. Тогда из леммы 2.1 следует, что при некотором $\tau \in [t_0, p]$ выполнено неравенство

$$\max(\lambda(z(\tau)) + f_1(\tau); f_2(\tau)) \geqslant D(t_0, z_0) \tag{2.10}$$

Осуществляя в (2.10) предельный переход по ломаным, получим, что для любой реализации выполнено неравенство (2.9).

Пусть $(t_0, z_0) \in A_1$. Тогда из формул (1.10) и (1.11) получим, что $D(t_0, z_0) = F(t_0) >$ $> \lambda(z_0) + f(t_0) \geqslant f(t_0)$. Обозначим

$$t_* = \sup\{t \in [t_0, p]: F(t) = F(t_0)\} \tag{2.11}$$

Тогда

$$F(t_*) = F(t_0) = D(t_0, z_0) \tag{2.12}$$

Из (1.8) и (1.9) следует, что $F(p) = \max(f_1(p); f_2(p))$. Поэтому, если $t_* = p$, то из (2.12) получим, что неравенство (2.10) выполнено при $\tau = p$.

Пусть $t_* < p$. Тогда из определений функции (1.9) и числа (2.11) можно получить, что существует последовательность точек $r_n$ такая, что

$$r_n \to t_*, \ r_n > t_*, \ F(r_n) = \max(f(r_n); \ f_2(r_n)) \tag{2.13}$$

Если $F(r_n) = f_2(r_n)$ для бесконечного числа членов последовательности, то из непрерывности функций получим $F(t_*) = f_2(t_*)$. Отсюда и из (2.12) следует, что неравенство (2.10) выполнено при $\tau = t_*$.

Пусть $F(r_n) = f(r_n)$ для бесконечного числа членов последовательности. Возьмем такую последовательность ломаных $z_n(t)$ с диаметром разбиения $m_n \to 0$, чтобы разбиение (1.4) ломаной $z_n(t)$ содержало точку $r_n$. Тогда из (1.10) получим, что $(r_n, z_n(r_n)) \in A \cup A_0$. Как показано выше, при некотором $\tau_n \in [r_n, p]$ будет выполнено неравенство (2.10) для ломаной $z_n(t)$.

Перейдем к сходящейся подпоследовательности и будем считать, что $\tau_n \to \tau_* \in$ $\in [t_0, p]$ и $\lambda(z_n(t)) \to \lambda_*(t)$ равномерно на $[t_0, p]$. Подставим в (2.10) $z(t) = z_n(t)$, $\tau = \tau_n$ и перейдем к пределу. Получим неравенство (2.9).

*Условие 2.1.* Для любого числа $t_* < p$, удовлетворяющего неравенству $F(t_*) > F(t)$ при $t_* < t < p$, существуют последовательности точек $t_* < s_i < l_i$, $l_i \to t_*$ такие, что

$$F(t) = \max(f(t); f_2(t)), \ \forall t \in [s_i, l_i]$$

*Теорема 2.2.* Пусть выполнено условие 2.1. Тогда управление (2.1) обеспечивает выполнение неравенства (2.9) для любой реализации $\lambda_*(t)$.

*Доказательство.* Пусть ломаные $\lambda(z_n(t))$, диаметры которых стремятся к нулю, сходятся равномерно к некоторой реализации. Из условия 2.1 следует, что у каждой ломаной, начиная с какого-то номера, среди точек разбиения (1.4) имеется точка $r_n$, где выполнено условие (2.13). Следовательно, как и в предыдущей теореме, реализация удовлетворяет неравенству (2.9).

Рассмотрим следующее управление второго игрока:

$$\upsilon(t,z) = z / \lambda(z); \ \lambda(z) \neq 0 \tag{2.14}$$

$$\upsilon(t,z) = \upsilon, \ \lambda(\upsilon) = 1; \ \lambda(z) = 0$$

*Теорема 2.3.* Управление (2.14) обеспечивает выполнения условия (2.9) для любой реализации $\lambda_*(t)$.

*Доказательство.* Будем считать, что $f_2(t) < D(t_0, z_0) = D$ при всех $t_0 \leqslant t \leqslant p$.

Из формул (1.8), (1.9) и (1.11) следует, что существуют числа $t_0 \leqslant \tau \leqslant s \leqslant p$, при которых выполнено одно из следующих двух равенств:

$$\lambda(z_0) + \int_{t_0}^{\tau} \big(b(r) - a(r)\big)dr + f_1(\tau) = D \tag{2.15}$$

$$\int_{\tau}^{s} \big(b(r) - a(r)\big)dr + f_1(s) = D \tag{2.16}$$

Возьмем любую ломаную $z(t)$ (1.5) с разбиением (1.4). Управление (2.14) обеспечивает выполнение неравенства (2.6) во всех точках разбиения.

Пусть выполнено неравенство (2.15). Тогда из (2.6) следует, что для любой ломаной выполнено неравенство $\lambda(z(\tau)) + f_1(\tau) \geqslant D$. Отсюда следует, что для любой реализации выполнено неравенство (2.9).

Пусть выполнено неравенство (2.16). Если $\tau = s$, то $f_1(\tau) = D$. Следовательно, неравенство, (2.9) выполнено.

Пусть $\tau < s$. Тогда из непрерывности интеграла и функции $f_1$ получим, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что

$$\int_t^s (b(r) - a(r))dr + f_1(s) \geq D - \varepsilon, \ \ \forall t \in [\tau - \delta, \tau + \delta] \tag{2.17}$$

Возьмем ломаную с диаметром разбиения меньше $\delta$. Пусть $\tau \leq t_i \leq \tau + \delta$. Тогда из (2.17) получим, что $\lambda(z(t_i)) + \int_{t_i}^s (b(r) - a(r))dr + f_1(s) \geq D - \varepsilon$.

Отсюда и из (2.6) получим, что $\lambda(z(s)) + f_1(s) \geq D - \varepsilon$. Стало быть, для любой реализации $\lambda*$ левая часть неравенства (2.9) больше или равна $D - \varepsilon$. Отсюда и из произвольности числа $\varepsilon$ получим неравенство (2.9).

*Замечание*. Из теорем 1.1 и 2.2. следует, что функция (1.11) является ценой игры, а функции (1.12) и (2.14) – оптимальные управления игроков. Если выполнено условие 2.1, то оптимальным управлением второго игрока явится и функция (2.1). Функции (1.12) и (2.1) принимают произвольные допустимые значения на множестве $A_1$. В этом смысле множество $A_1$ является областью безразличия.

**3.** Рассмотрим игровую задачу с фиксированным моментом окончания, которая в формализованном виде сводится к игре с критерием (1.7).

Пусть в игре (1.1) динамики игроков до момента времени $\tau \leq p$ определяются функциями $a_1(t)$ и $b_1(t)$, а при $t \geq \tau$ определяются функциями $a_2(t)$ и $b_2(t)$. Это может произойти в результате поломки.

Цель первого игрока заключается в минимизации $\lambda_*(p)$.

Пусть $\lambda_*(\tau)$ – значение реализации в момент $\tau$. Примем $\tau$ за начальный момент времени в игре с фиксированным моментом окончания $p$. Можно показать [4], что значение цены игры в этой игре равно

$$\max(\lambda_*(\tau) + f_1(\tau); f_2(\tau)); \ \ f_1(\tau) = \int_\tau^p (b_2(r) - a_2(r))dr, \ \ f_2(\tau) = \max_{\tau \leq r \leq p} f_1(r) \tag{3.1}$$

Величина (3.1) является минимальным значением $\lambda_*(p)$, которое может обеспечить первый игрок при условии, что второй ведет себя оптимальным образом.

Если выбор момента $\tau$ не зависит от первого игрока, то он может рассчитывать на величину (1.7). Получим игру с платой (1.7).

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. *Субботин А.И.* Вычисление цены дифференциальной игры сближения простых движений на ограниченном промежутке времени // Управление с гарантированным результатом. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987. С. 71–76.
3. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
4. *Ухоботов В.И.* Построение цены игры в некоторых дифференциальных играх с фиксированным временем // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 994–1000.
5. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. *Колмогоров А.Н., Фомин. С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
7. *Ухоботов В.И.* К построению стабильного моста в игре удержания // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 236–240.


Челябинск

Поступила в редакцию
10.XII.1993