УДК 531.36; 62–50

© 1994 г. Ю.К. Зотов, А.В. Тимофеев

МЕТОДЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЙ ОБРАТИМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Рассматриваются методы синтеза стабилизирующих и робастных законов управления для нелинейных обратимых систем, обеспечивающих асимптотическую устойчивость программных движений, заданные показатели качества и декомпозицию переходных процессов. Получены нелинейные канонические преобразования пространства состояний и управлений, упрощающие синтез и анализ законов стабилизации обратимых динамических систем.

1. Постановка задачи. Рассмотрим объект управления, динамика которого описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$z^{\cdot} = F(z,u,t), \quad z(t_0) = z_0, \quad t \geqslant t_0 \tag{1.1}$$

Здесь z_0, $z = z(t)$ – n-мерные векторы состояний системы в начальной и текущий моменты времени; u – m-мерный вектор управлений; F – n-мерная вектор-функция, удовлетворяющая условиям существования и единственности решения системы (1.1).

Пусть задано программное движение (ПД) $z_p = z_p(t)$, $t \geqslant t_0$, являющееся частным решением системы (1.1) при некотором допустимом программном управлении $u = u_p = u_p(t)$ и начальном условии $z_{p0} = z_p(t_0)$. ПД $z_p(t)$ будем называть невозмущенным движением, а любое другое движение $z(t)$ системы (1.1) под действием допустимых управлений – возмущенным (реальным) движением. Тогда величины

$$e_z = z - z_p, \quad e_u = u - u_p \tag{1.2}$$

являются возмущениями, т.е. отклонениями реального (возмущенного) и программных движений, удовлетворяющими уравнению в отклонениях

$$e_z^{\cdot} = F_z(e_z, e_u, t), \quad e_z(t_0) = e_{z_0}, \quad t \geqslant t_0 \tag{1.3}$$

Здесь

$$F_z(e_z, e_u, t) = F_z(e_z + z_p, e_u + u_p, t) - F(z_p, u_p, t) \tag{1.4}$$

причем $F_z(0,0,t) \equiv 0$.

Для широкого класса динамических систем структура уравнений (1.3), (1.4) такова, что

$$e_z = \mathrm{col}(e_{z_1}, \ldots, e_{z_r}), \quad n = mr \tag{1.5}$$

$$F_z(e_z, e_u, t) = \mathrm{col}(F_{z_1}(e_z^2, t), \ldots, F_{z_{r-1}}(e_z^r, t), F_{z_r}(e_z^r, e_u, t)) \tag{1.6}$$

$$F_{z_i}(e_z^{i+1}, t) = C_i(e_z^i, t) + D_i(e_z^i, t) e_{z_{i+1}}, \quad i = 1, \ldots, r-1 \tag{1.7}$$

$$F_{z_r}(e_z^r, e_u, t) = C_r(e_z^r, t) + D_r(e_z^r, t) e_u \tag{1.8}$$

Здесь e_{z_i} – m-мерный, $e_z^i = \mathrm{col}(e_{z_1},\dots,e_{z_i}) - mi$ мерные векторы; C_i, D_i $(i = 1, \dots, r)$ – заданные вектор- и матрицы-функции; вектор-функции F_{z_i} $(i = 1,\dots,r)$ (1.7), (1.8) непрерывны и достаточное число раз непрерывно-дифференцируемы по своим аргументам, причем матрицы-функции D_i $(i = 1,\dots,r)$ в (1.7), (1.8) невырождены при всех возможных значениях своих аргументов, т.е.

$$\mathrm{rank}\, D_i(e_z^i, t) = m, \quad \forall e_z^i \in R^{mi}, \quad t \geqslant t_0, \quad i = 1,\dots,r \tag{1.9}$$

где R^{mi} – mi-мерное евклидово пространство.

Примерами таких систем могут служить механические и электромеханические системы, описываемые уравнениями Лагранжа–Максвелла.

Уравнение (1.3)–(1.9) можно записать в разрешенной относительно управления e_u форме

$$\dot{e}_{z_i} = F_{z_i}(e_z^{i+1}, t) = C_i(e_z^i, t) + D_i(e_z^i, t) e_{z_{i+1}}, \quad i = 1,\dots,r-1 \tag{1.10}$$

$$e_u = D_r^{-1}(e_z^r, t)(\dot{e}_{z_r} - C_r(e_z^r, t)) \tag{1.11}$$

Система (1.3)–(1.9), обладающая указанным свойством разрешимости, относится к классу обратимых управляемых систем (ОУС). Из ее обратимости при учете (1.2) следует, что обратима также и исходная система (1.1), (1.4)–(1.9). Было показано [1–6], что ОУС (1.1), (1.4)–(1.9) обладает свойством глобальной управляемости и для нее легко построить в аналитическом виде ПД $z_p(t)$ и соответствующее ему программное управление $u_p(t)$.

Предположим, что для каждой из вектор-функции C_i $(i = 1, \dots, r)$ и матриц-функций D_i $(i = 1, \dots, r)$ при всех возможных значениях их аргументов выполнены соотношения

$$|C_i(e_z^i, t)| \leqslant \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij} |e_z^i|^j, \quad \forall e_z^i \in R^{mi}, \quad t \geqslant t_0, \quad i = 1,\dots,r \tag{1.12}$$

$$|D_i(e_z^i, t)| \leqslant d_i < \infty, \quad \forall e_z^i \in R^{mi}, \quad t \geqslant t_0, \quad i = 1,\dots,r \tag{1.13}$$

где $a_{ij} \geqslant 0$ $(j = 1,\dots,k_i)$, $d_i > 0$ – некоторые постоянные. Будем также считать, что аналогичные соотношения справедливы для частных производных от C_i $(i = 1,\dots,r)$ и D_i $(i = 1,\dots,r)$ по их аргументам.

Будем говорить, что ПД $z_p(t)$ системы (1.1) стабилизируемо, если существует закон управления с обратной связью по вектору состояния $z(t)$ вида

$$u = u(z, t) = u_p(t) + e_u(z - z_p, t) \tag{1.14}$$

обеспечивающий асимптотическую устойчивость $z_p(t)$ системы (1.1), (1.4)–(1.9) в целом.

Формулируемые в статье свойства, критерии и законы стабилизации ПД ОУС развивают и обобщают результаты, полученные ранее [1–14].

2. Канонические формы описания ОУС. Предлагаемые методы анализа устойчивости и синтеза стабилизирующих управлений для нелинейных ОУС основаны на приведении системы (1.1), (1.4)–(1.9) к некоторым простым "каноническим формам" при помощи нелинейных преобразований координат в пространствах состояний и управлений. Важно отметить, что для ОУС в канонической форме задачи анализа устойчивости ПД и синтеза стабилизирующих управлений значительно упрощаются.

Канонической формой первого типа является представление ОУС в виде

$$\dot{e}_x = P(e_x^r, t) e_x + Q(e_x^r, t) e_w, \quad e_x(t_0) = e_{x0}, \quad t \geqslant t_0 \tag{2.1}$$

где

$$e_x = \mathrm{col}(e_{x_1},\dots,e_{x_r}) \tag{2.2}$$

– n-мерный вектор "канонического" состояния системы; e_{x_i}, $e_x^i = \mathrm{col}(e_{x_1},\dots,e_{x_i}) - m$, mi-мерные векторы; e_w – m-мерный вектор "канонического" управления; P, Q – матрицы-функции размером $n \times n$ и $n \times m$ вида

$$P(e_x^r,t)=\begin{Vmatrix} P_{11}(e_x^1,t) & P_{12}(e_x^1,t) & 0 & & \dots 0 \\ P_{21}(e_x^2,t) & P_{22}(e_x^2,t) & P_{23}(e_x^2,t) & 0 & \dots 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ P_{r-2,1}(e_x^{r-2},t) & \dots & P_{r-2,r-1}(e_x^{r-2},t) & & 0 \\ P_{r-1,1}(e_x^{r-1},t) & \dots & P_{r-1,r-1}(e_x^{r-1},t) & & P_{r-1,r}(e_x^{r-1},t) \\ P_{r-1}(e_x^r,t) & \dots & P_{r,r-1}(e_x^r,t) & & P_{rr}(e_x^r,t) \end{Vmatrix} \tag{2.3}$$

$$Q(e_x^r,t)=\begin{Vmatrix} 0 \\ Q_r(e_x^r,t) \end{Vmatrix} \tag{2.4}$$

причем $|P(e_x^r,t)| \leqslant \kappa_1 < \infty$, $|Q(e_x^r,t)| \leqslant \kappa_2 < \infty$, $\forall e_x^r \in R^n$, $t \geqslant t_0$, где κ_1, κ_2 – некоторые положительные постоянные, и для частных производных от элементов-функций ($m \times m$)-блоков P_{ij} ($i = 1, \dots, r$; $j = 1, \dots, i$) матрицы-функции P по их аргументам выполнены соотношения, аналогичные (1.12), а для частных производных от элементов-функций ($m \times m$)-блоков $P_{i,i+1}$ ($i = 1, \dots, r-1$) матрицы P и ($m \times m$)-блока Q_r матрицы Q по их аргументам выполнены соотношения, аналогичные (1.13); O– нулевая матрица, соответствующего размера.

Для ОУС матрицы-функции $P_{i,i+1}$ ($i = 1, \dots, r-1$), блок Q_r невырождены при всех возможных значениях своих аргументов, т.е.

$$\mathrm{rank}\, P_{i,i+1}(e_x^i,t) = m, \quad \forall e_x^i, t \in R^{mi}, \quad t \geqslant t_0, \quad i = 1,\dots,r-1 \tag{2.5}$$

$$\mathrm{rank}\, Q_r(e_x^r,t) = m, \quad \forall e_x^r \in R^n, \quad t \geqslant t_0 \tag{2.6}$$

В рамках канонического представления ОУС первого типа целесообразно выделить два подкласса канонических форм, различающихся структурой матрицы-функции P в уравнении (2.1), а именно (2.7)

$$P(e_x^r,t)=\begin{Vmatrix} P_{11}(,t) & P_{12}(e_x^1,t) & 0 & & & & \dots 0 \\ -P_{12}^*(e_x^1,t) & P_{22}(e_x^1,t) & P_{23}(e_x^2,t) & 0 & & & \dots 0 \\ 0 & -P_{23}^*(e_x^2,t), & P_{33}(e_x^2,t) & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots \;\; \ddots \;\; \ddots & & \ddots & & P_{r-2,r-1}(e_x^{r-2},t) & & 0 \\ 0 \;\dots\; 0 & & -P_{r-2,r-1}^*(e_x^{r-2},t) & & P_{r-1,r-1}(e_x^{r-2},t) & & P_{r-1,r}(e_x^{r-1},t) \\ 0 \;\dots & & 0 & & -P_{r-1,r}^*(e_x^{r-1},t) & & P_{rr}(e_x^{r-1},t) \end{Vmatrix}$$

$$P(e_x^{r-1},t)=\begin{Vmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) & 0 & & & \dots 0 \\ 0 & P_{22}(e_x^1,t) & P_{23}(e_x^!,t) & 0 & & \dots 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & & \ddots \; \vdots \\ 0 \;\dots & 0 & P_{r-2,r-2}(e_x^{r-3},t) & P_{r-2,r-1}(e_x^{r-3},t) & & 0 \\ 0 \;\dots & & 0 & P_{r-1,r-1}(e_x^{r-2},t) & & P_{r-1,r}(e_x^{r-2},t) \\ 0 \;\dots & & & 0 & & P_{rr}(e_x^{r-1},t) \end{Vmatrix} \tag{2.8}$$

Канонической формой второго типа является представление ОУС в виде

$$e_x^{\cdot} = Pe_x + Qe_w, \quad e_x(t_0) = e_{x_0}, \quad t \geqslant t_0 \tag{2.9}$$

где e_x – n-мерный вектор (2.2) "канонического состояния" системы; P,Q – постоянные матрицы, имеющие ту же структуру, что и матрицы-функции P (2.3) и Q (2.4), причем $(m \times m)$-блоки $P_{i,i+1}$ (i = 1, ..., r – 1) матрицы P и $(m \times m)$-блок Q_r матрицы Q невырожденны, т.е.

$$\operatorname{rank} P_{i,i+1} = m, \quad i = 1,\dots,r-1; \ \operatorname{rank} Q_r = m \tag{2.10}$$

Отметим, что в частном случае, когда у системы (2.9) матрицы P, Q имеют вид [4–6]

$$P = \begin{Vmatrix} 0 & I_{n-m} \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad Q = \begin{Vmatrix} 0 \\ Q_r \end{Vmatrix} \tag{2.11}$$

где I_m – единичная $(m \times m)$-матрица, ОУС (2.9) имеет наиболее простую "каноническую форму", а ее вектор состояния определяется каноническими переменными вида

$$e_x = \operatorname{col}(e_{x_1},\dots,e_{x_r}) = \operatorname{col}(e_{x_1}, e_{x_1}^{\cdot},\dots,e_{x_1}^{(r-1)}), \qquad e_{x_i} = e_{x_{i-1}}^{\cdot}, \quad i = 2,\dots,r \tag{2.12}$$

где $e_{x_1}^{(i)}$ – i-я производная по времени t от переменной $e_{x_1} = e_{x_1}(t)$.

3. Приведение ОУС к канонической форме. Построим взаимно-однозначные преобразования пространств состояний и управлений исходной ОУС (1.3)–(1.9), которые приводят ее к более простой "канонической форме" (2.1)–(2.6).

Будем искать преобразования в виде

$$e_x = \Psi^r(e_z,t), \quad e_w = \Psi_{r+1}(e_z,e_u,t) \tag{3.1}$$

где Ψ^r, Ψ_{r+1} – n-, m – вектор-функция соответственно вида

$$\Psi^r(e_z,t) = \operatorname{col}(\Psi_1(e_z^1,t),\dots,\Psi_r(e_z^r,t)) \tag{3.2}$$

$$\Psi_1(e_z^1,t) = K_1 + L_1 e_{z_1}, \quad K_1 = 0, \quad L_1 = I_m \tag{3.3}$$

$$\Psi_i(e_z^i,t) = K_i(e_z^{i-1},t) + L_i(e_z^{i-1},t)e_{z_i}, \quad i = 2,\dots,r \tag{3.4}$$

$$\Psi_{r+1}(e_z,e_u,t) = K_{r+1}(e_z,t) + L_{r+1}(e_z,t)e_u \tag{3.5}$$

Здесь K_i (i = 2, ..., r + 1) – m-вектор-функции, L_i (i = 2, ..., r + 1) – $(m \times m)$ – матрицы-функции, подлежащие определению.

Опишем алгоритм нахождения неизвестных вектор-функций K_i (i = 2, ..., r + 1) и матриц-функций L_i (i = 2, ..., r + 1).

Рассмотрим r тождеств

$$\begin{aligned} e_{x_1}^{\cdot} &= \Psi_1^{\cdot}(e_z^1,t) = K_1^{\cdot} + L_1^{\cdot} e_{z_1} + L_1 e_{z_1}^{\cdot} = e_{z_1}^{\cdot} \\ e_{x_i}^{\cdot} &= \Psi_i^{\cdot}(e_z^1,t) = K_i^{\cdot}(e_z^{i-1},t) + L_i^{\cdot}(e_z^{i-1})e_{z_i} + L_i(e_z^{i-1},t)e_{z_i}^{\cdot}, \quad i = 2,\dots,r-1 \\ e_{x_r}^{\cdot} &= \Psi_r^{\cdot}(e_z^r,t) = K_r^{\cdot}(e_z^{r-1},t) + L_r^{\cdot}(e_z^{r-1},t)e_{z_r} + L_r(e_z^{r-1},t)e_{z_r}^{\cdot} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Заменяя в (3.6) производные $e_{x_i}^{\cdot}$ $(i = 1,\dots,r)$ и $e_{z_i}^{\cdot}$ $(i = 1,\dots,r)$ по формулам

$$\begin{aligned} e_{x_i}^{\cdot} &= F_{x_i}(e_x^{i+1},t) = P_{i1}(e_x^i,t)e_{x_1} + \ldots + P_{i,i+1}(e_x^i,t)e_{x_{i+1}}, \quad i = 1,\dots,r-1 \\ e_{x_r}^{\cdot} &= F_{x_r}(e_x^r,e_w,t) = P_{r1}(e_x^r,t) + \ldots + P_{rr}(e_x^r,t)e_{x_r} + Q_r(e_x^r,t)e_w \end{aligned} \tag{3.7}$$

и используя (1.7), (1.8), получим соотношения

$$
\begin{aligned}
&P_{11}(e_x^1,t)e_{x_1}+P_{12}(e_x^1,t)e_{x_2}=\dot{K}_1+\dot{L}_1e_{z_1}+L_1(C_1(e_z^1,t)+D_1(e_z^1,t)e_{z_2})\\
&P_{i1}(e_x^i,t)e_{x_1}+\ldots+P_{i,i+1}(e_x^i,t)e_{x_{i+1}}=\dot{K}_i(e_z^{i-1},t)+\dot{L}_i(e_z^{i-1},t)e_{z_i}+\\
&+L_i(e_z^{i-1},t)(C_i(e_z^i,t)+D_i(e_z^i,t)e_{z_{i+1}}),\qquad i=2,\ldots,r-1\\
&P_{r1}(e_x^r,t)e_{x_1}+\ldots+P_{rr}(e_x^r,t)e_{x_r}+Q_r(e_x^r,t)e_w=\dot{K}_r(e_z^{r-1},t)+\\
&+\dot{L}_r(e_z^{r-1},t)e_{z_r}+L_r(e_z^{r-1},t)(C_r(e_z,t)+D_r(e_z,t)e_u)
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

В ОУС канонической формы (2.1)–(2.6) матрица-функция P_{12} невырождена в силу (2.5). Поэтому первое (при $i = 1$) уравнение системы (3.8) можно разрешить относительно e_{x_2} и получить искомое второе (при $i = 2$) преобразование из (3.4), связывающее переменные e_{x_2} и e_{z_2}, с вектор-функцией $\Psi_2(e_z^2,t)$, в котором

$$
\begin{aligned}
&K_2(e_z^1,t)=P_{12}^{-1}(e_z^1,t)[\dot{K}_1+\dot{L}_1e_{z_1}+L_1C_1(e_z^1,t)-P_{11}(e_z^1,t)e_{z_1}]=\\
&=P_{12}^{-1}(e_z^1,t)[C_1(e_z^1,t)-P_{11}(e_z^1,t)e_{z_1}]\\
&L_2(e_z^1,t)=P_{12}^{-1}(e_z^1,t)D_1(e_z^1,t)
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Продолжая последовательно этот процесс, т.е. подставляя в каждое текущее i-е (начиная с $i = 2$) уравнение из (3.8) найденные ранее вектор-функции Ψ_j $(j=1,\ldots,i)$, K_i и матрицу-функцию L_i и учитывая согласно (2.5) и (2.6), невырожденность матриц-функций $P_{i,i+1}$ $(i=2,\ldots,r-1)$ и Q_r, получим искомые (при $i = 3, ..., r + 1$) преобразования (3.4), (3.5), в которых

$$
\begin{aligned}
&K_i(e_z^{i-1},t)=P_{i-1,i}^{-1}(\Psi^{i-1},t)[\dot{K}_{i-1}(e_z^{i-2},t)+\dot{L}_{i-1}(e_z^{i-2},t)e_{z_{i-1}}+\\
&+L_{i-1}(e_z^{i-2},t)C_{i-1}(e_z^{i-1},t)-\sum_{k=1}^{i-1}P_{i-1,k}(\Psi^{i-1},t)\Psi_k],\qquad i=3,\ldots,r\\
&L_i(e_z^{i-1},t)=P_{i-1,i}^{-1}(\Psi^{i-1},t)L_{i-1}(e_z^{i-2},t)D_{i-1}(e_z^{i-1},t),\qquad i=3,\ldots,r\\
&K_{r+1}(e_z,t)=Q_r^{-1}(\Psi^r,t)[\dot{K}_r(e_z^{r-1},t)+\dot{L}_r(e_z^{r-1},t)e_{z_r}+\\
&+L_r(e_z^{r-1},t)C_r(e_z^r,t)-\sum_{k=1}^{r}P_{rk}(\Psi^r,t)\Psi_k]\\
&L_{r+1}(e_z,t)=Q_r^{-1}(\Psi^r,t)L_r(e_z^{r-1},t)D_r(e_z^r,t)\\
&\Psi^k=\mathrm{col}(\Psi_1,\ldots,\Psi_k),\qquad \Psi^k=\Psi^k(e_z^k,t),\\
&\Psi_k=\Psi_k(e_z^k,t),\qquad k=1,\ldots,i-1;\qquad \Psi^r=\Psi^r(e_z^r,t)
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Поскольку при учете соотношений (3.3), (3.4), (3.10), (1.9), (2.5),(2.6) имеем

$$
\operatorname{rank}L_1=m,\quad \operatorname{rank}L_i(e_z^{i-1},t)=m,\quad \forall e_z^{i-1}\in R^{m(i-1)},\quad t\geqslant t_0,\quad i=2,\ldots,r+1 \tag{3.11}
$$

и $(n \times m)$-матрица Якоби $J_{\psi^r}(e_z^{r-1},t)=\partial\Psi^r(e_z,t)/\partial e_z$ имеет блочно-нижнетреугольный вид, то

$$
\operatorname{rank}J_{\psi^r}(e_z^{r-1},t)=n,\quad \forall e_z^{r-1}\in R^{m(i-1)},\quad t\geqslant t_0 \tag{3.12}
$$

Учитывая (3.1), (3.5), (3.11), имеем

$$\operatorname{rank} J_{\Psi_{r+1}}(e_z,t)=m, \quad \forall e_z \in R^n, \quad t \geqslant t_0$$
$$J_{\Psi_{r+1}}(e_z,t)=\partial\Psi_{r+1}(e_z,e_u,t)/\partial e_u = L_{r+1}(e_z,t) \tag{3.13}$$

Разрешая первое уравнение (3.1) относительно e_z и второе относительно e_u, получим обратные преобразования

$$e_z=\Phi^r(e_x,t)=\mathrm{col}(\Phi_1(e_x^1,t),\ldots,\Phi_r(e_x^r,t))$$
$$e_u=\Phi_{r+1}(e_x,e_w,t) \tag{3.14}$$

где

$$\Phi_1(e_x^1,t)=M_1+N_1e_{x_1}, \quad \Phi_i(e_x^i,t)=M_i(e_x^{i-1},t)+N_i(e_x^{i-1},t)e_{x_i}$$
$$i=2,\ldots,r; \quad e_x^i=\mathrm{col}(e_{x_l},\ldots,e_{x_i}), \quad e_x^r=e_x, \quad M_1=0, \quad N=I_m$$
$$M_i(e_x^{i-1},t)=-L_i^{-1}(\Phi^{i-1},t)K_i(\Phi^{i-1},t), \quad N_i(e_x^{i-1},t)=L_i^{-1}(\Phi^{i-1},t) \tag{3.15}$$
$$\Phi_{r+1}(e_x,e_w,t)=M_{r+1}(e_x,t)+N_{r+1}(e_x,t)e_w$$
$$M_{r+1}(e_x,t)=-L_{r+1}^{-1}(\Phi^r,t)K_{r+1}(\Phi^r,t), \quad N_{r+1}(e_x,t)=L_{r+1}^{-1}(\Phi^r,t)$$
$$\Phi^{i-1}=\mathrm{col}(\Phi_1,\ldots,\Phi_{i-1}), \quad \Phi^{i-1}=\Phi^{i-1}(e_x^{i-1},t)$$
$$\Phi_k=\Phi_k(e_x^k,t), \quad k=1,\ldots,i-1; \quad \Phi^r=\Phi^r(e_x^r,t)$$

Аналогично строятся взаимно-однозначные преобразования для канонических форм (2.1), (2.2), (2.7), (2.4)–(2.6); (2.1), (2.2), (2.8), (2.4)–(2.6) и (2.9)–(2.10). Их также можно получить из (3.1)–(3.5), (3.9), (3.10), (3.14), (3.15) заменой (2.3) соответственно на (2.7) и (2.8) или заменой (2.3), (2.4) на матрицы P, Q из (2.9).

В разделе 7 приведены явные формулы (7.2), (7.3) прямого и обратного преобразований (3.1)–(3.5), (3.14), (3.15) для электромеханических ОУС, рассмотренных в [4–14].

4. Критерии устойчивости и стабилизации ПД для ОУС с канонической формой первого типа. Рассмотрим сначала задачу обеспечения асимптотической устойчивости ПД в замкнутой ОУС, динамика которой допускает представление в канонической форме первого типа (2.1)–(2.8). Синтезируем стабилизирующий закон управления с обратной связью по e_x в виде

$$e_w=\Gamma_0(e_x,t)e_x \tag{4.1}$$

где матрица коэффициентов усиления

$$\Gamma_0(e_x,t)=\|\Gamma_{01}(e_x,t),\ldots,\Gamma_{0r}(e_x,t)\| \tag{4.2}$$

представляет собой $(m\times n)$-матрицу-функцию, состоящую из $(m\times m)$-блоков Γ_{0j} $(j=1,\ldots,r)$.

Пусть ОУС имеет каноническую форму первого подкласса первого типа, т.е. описывается уравнениями (2.1)–(2.2), (2.7), (2.4)–(2.6). Построим матрицу Γ_0 (4.2) в виде

$$\Gamma_0(e_x,t)=\|0\Gamma_{0r}(e_x,t)\| \tag{4.3}$$

$$\Gamma_{0r}(e_x,t)=Q_r^{-1}(e_x^r,t)\overline{\Gamma}_{0r}(e_x^{r-1},t) \tag{4.4}$$

так, что

$$\Gamma(e_x^{r-1},t)=P(e_x^{r-1},t)+Q(e_x^r,t)\Gamma_0(e_x,t) \tag{4.5}$$

и выберем блоки P_{ii} $(i=1,\ldots,r)$ у матрицы- функции P (2.7), (2.5) и блок Γ_{0r} (4.4), где

$\bar{\bar{\Gamma}}_{0r}-(m\times m)$ – матрица-функция, у матрицы-функции Γ_0 (4.3), так чтобы матрица-функция Γ (4.5) была такова, что

$$-[\Gamma(e_x^{r-1},t)+\Gamma^*(e_x^{r-1},t)]/2=G_1(e_x^{r-1},t) \quad (4.6)$$

Здесь G_1 – квазидиагональная, симметричная матрица-функция вида

$$G_1(e_x^{r-1},t)=\mathrm{diag}(G_{11}(t),\quad G_{12}(e_x^1,t),\ldots,G_{1r}(e_x^{r-1},t)) \quad (4.7)$$

где

$$\begin{gathered}G_{11}(t)=-(P_{11}(t)+P_{11}^*(t))/2,\quad G_{1i}(e_x^{i-1},t)=-(P_{ii}(e_x^{i-1},t)+P_{ii}^*(e_x^{i-1},t))/2,\\ i=2,\ldots,r-1\\ G_{1r}(e_x^{r-1},t)=-(P_{rr}(e_z^{r-1},t)+\bar{\Gamma}_{0r}(e_x^{r-1},t)+P_{rr}^*(e_x^{r-1},t)+\bar{\Gamma}_{0r}^*(e_x^{r-1},t))/2\end{gathered} \quad (4.8)$$

– $(m\times m)$-блоки с положительными диагональными элементами с преобладающей диагональю, т.е. для их элементов g_{1ikj} $(k,j=1,\ldots,m;\ i=1,\ldots,r)$ выполнены неравенства

$$\begin{gathered}g_{11kk}(t)>0,\quad t\geqslant t_0,\ k=1\ldots,m;\ g_{1ikk}(e_x^{i-1},t)>0,\quad \forall e_x^{i-1}\in R^{m(i-1)},\\ t\geqslant t_0,\quad k=1,\ldots,m`\quad i=2,\ldots,r\\ \inf_{t\geqslant t_0}\left[g_{11kk}(t)-\sum_{\substack{j-1\\ j\neq k}}^{m}|g_{11kj}(t)|\right]\geqslant\delta_{1k}>0,\quad t\geqslant t_0,\quad k=1,\ldots,m\\ \inf_{e_x^{i-1}\in R^{m(i-1)},t\geqslant t_0}\left[g_{1ikk}(e_x^{i-1},t)-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}|g_{1ikj}(e_x^{i-1},t)|\right]\geqslant\delta_{ik}>0,\quad k=1,\ldots,m;\quad i=2,\ldots,r\end{gathered} \quad (4.9)$$

где δ_{ik} $(k=1,\ldots,m;\quad i=1,\ldots,r)$ – некоторые положительные постоянные.

Тогда уравнение переходных процессов (ПП) в замкнутой канонической ОУС (2.1), (2.2), (2.7), (2.4)–(2.6), (4.1)–(4.9) имеет

$$\dot{e_x}=\Gamma(e_x^{r-1},t)e_x,\quad e_x(t_0)=e_{x_0},\quad t\geqslant t_0 \quad (4.10)$$

где Γ – матрица-функция (4.5)–(4.9).

Рассмотрим функцию

$$V(e_x)=\tfrac{1}{2}|e_x|^2 \quad (4.11)$$

и вычислим ее производную по t в силу (4.10), (4.5)–(4.9),

$$\begin{gathered}\dot{V}(e_x(t))=\tfrac{1}{2}(|e_x(t)|^2)^{\cdot}=\tfrac{1}{2}e_x^*(t)(\Gamma(e_x^{r-1},t)+\Gamma^*(e_x^{r-1},t))e_x(t))=\\ =-e_x^*(t)G_1(e_x^{r-1},t)e_x(t),\quad t\geqslant t_0\end{gathered} \quad (4.12)$$

Из (4.9) вытекает, что квазидиагональная, симметричная матрица-функция G_1 (4.7)–(4.9) является положительно-определенной при всех значениях своих аргументов, т.е.

$$G_1(e_x^{r-1},t)>0,\quad \forall e_x^{r-1}\in R^{m(r-1)},\quad t\geqslant t_0 \quad (4.13)$$

Отсюда и из (4.12), (4.11) следует оценка

$$\dot{V}(e_x(t))=-e_x^*(t)G_1(e_x^{r-1},t)e_x(t)\leqslant-\gamma_1|e_x(t)|^2=-2\gamma_1V(e_x(t)),\quad t\geqslant t_0 \quad (4.14)$$

Здесь γ_1 – параметр такой, что

$$0<\gamma_1 \leqslant \inf_{e_x^{r-1}\in R^{m(r-1)},\,t\geqslant t_0} \lambda_m(e_x^{r-1},t) \tag{4.15}$$

где $\lambda_m(e_x^{r-1},t)$ – минимальное собственное число положительно-определенной матрицы-функции G_1 (4.7)–(4.9), (4.13). Из (4.14), (4.15) находим $V(e_x(t))\leqslant V(e_x(t_0))\times$ $\times\exp[-2\gamma_1(t-t_0)]$, $t\geqslant t_0$. Отсюда, используя снова (4.11), получим

$$|e_x(t)|^2 \leqslant |e_{x_0}|^2\exp[-2\gamma_1(t-t_0)],\quad e_x(t_0)=e_{x_0},\quad t\geqslant t_0 \tag{4.16}$$

Следовательно, положение равновесия $e_x=0$ системы (4.10), (4.5)–(4.9) асимптотически устойчиво в целом с оценкой

$$|e_x(t)|\leqslant|e_{x_0}|\exp[-\gamma_1(t-t_0)],\quad e_x(t_0)=e_{x_0},\quad t\geqslant t_0 \tag{4.17}$$

Подставляя e_x (3.1), e_w (4.1)–(4.9) в (3.14), (3.15), получим стабилизирующий закон управления с обратной связью по e_z

$$e_u=\Phi_{r+1}(e_x,\Gamma_0(e_x,t)e_x,t)=\Phi_{r+1}[\Psi^r(e_z,t),\Gamma_0(\Psi^r(e_z,t),t)\Psi^r(e_z,t),t] \tag{4.18}$$

для исходной ОУС (1.3)–(1.9), (1.12), (1.13).

Уравнение ПП в замкнутой исходной ОУС (1.3)–(1.9), (1.12), (1.13), (4.18), (4.3)–(4.9) имеет вид

$$e_z^0=F_z(e_z,\Phi_{r+1}(\Psi^r(e_z,t),\Gamma_0(\Psi^r(e_z,t),t)\Psi^r(e_z,t),t),t),\quad e_z(t_0)=e_{z_0},\quad t\geqslant t_0 \tag{4.19}$$

Используя соотношения для конечных приращений вектор-функции $\Phi^r(e_x,t)$ (3.14), (3.15) и оценки ПП (4.17), (1.12), (1.13), для канонической ОУС, получим

$$|e_z(t)|=|\Phi^r(e_x,t)|=\left|\left(\int_0^1 J_{\Phi^r}(\theta e_x^{r-1},t)d\theta)e_x(t)\right)\right|\leqslant\mu_0|e_x(t)|\leqslant$$

$$\leqslant\mu_0|e_x(t_0)|\exp[-\gamma_1(t-t_0)]=\mu_0|\Psi^r(e_z(t_0),t_0)|\exp[-\gamma_1(t-t_0)],\quad t\geqslant t_0 \tag{4.20}$$

Здесь

$$\begin{gathered}\sup_{\tilde e_x^{r-1}\in[0,e_x^{r-1}],\,t\geqslant t_0}|J_{\Phi^r}(\tilde e_x^{r-1},t)|\leqslant \nu_0+\sum_{j=1}^{s}\nu_j|\tilde e_x^{r-1}|^j=\mu_0\\ J_{\Phi^r}(e_x^{r-1},t)=\partial\Phi^r(e_x,t)/\partial e_x,\quad [0,e_x^{r-1}]=\{\bar e_x^{r-1}|\bar e_x^{r-1}=\theta e_x^{r-1},0\leqslant\theta\leqslant 1\}\end{gathered} \tag{4.21}$$

$\nu_0>0$, $\nu_j\geqslant 0$ $(j=1,\ldots,s)$ – некоторые параметры.

Из (4.20), (4.21) вытекает, что положение равновесия $e_z=0$ исходной ОУС (1.3)–(1.9), (1.12), (1.13) с законом управления e_u (4.18), (4.3)–(4.9) асимптотически устойчиво в целом. Следовательно, ПД $z_p(t)$ исходной ОУС (1.1), (1.3)–(1.9), (1.12),(1.13) с законом управления v (1.14), (4.18), (4.3)–(4.9) асимптотически устойчиво в целом с оценкой ПП (4.20), (4.21).

Рассмотрим теперь задачи устойчивости ПД и синтеза стабилизирующего закона управления для ОУС с канонической формой второго подкласса первого типа (2.1)–(2.2), (2.8), (2.4)–(2.6).

Для канонической ОУС (2.1)–(2.2), (2.8), (2.4)–(2.6) синтезируем стабилизирующий закон управления e_w с обратной связью по e_x в виде (4.1), (4.3), (4.4) и выберем блоки P_{ii} $(i=1,\ldots,r-1)$ у матрицы-функции P (2.8), (2.5) и блок Γ_{0r} (4.4) у матрицы-функции

Γ_0 (4.3) так, чтобы матрица-функция Γ (4.5), (2.8), (4.3) была такова, что

$$-[\Gamma(e_x^{r-1},t)+\Gamma^*(e_x^{r-1},t)]/2 = G_1(e_x^{r-1},t)+G_2(e_x^{r-2},t) \tag{4.22}$$

Здесь G_1 – квазидиагональная, симметричная, положительно-определенная матрица-функция (4.7)–(4.9), (4.13), матрица-функция G_2 имеет вид

$$G_2(e_x^{r-2},t) = -\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & P_{12}(t) & 0 & & 0 \\ P_{12}^*(t) & 0 & P_{23}(e_x^1,t) & 0 & 0 \\ 0 & P_{23}^*(e_x^1,t) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & P_{r-1,r}(e_x^{r-2},t) \\ 0 \ \dots & & 0 & P_{r-1,r}^*(e_x^{r-2},t) & 0 \end{Vmatrix} \tag{4.23}$$

Пусть выполнены соотношения

$$\begin{gathered} \inf_{t\geqslant t_0}\left[\delta_1-\frac{1}{2}\varepsilon|P_{12}(t)|\right]\geqslant \alpha_1>0 \\ \inf_{e_x^1\in R^m,t\geqslant t_0}\left[\delta_2-\frac{1}{2}\varepsilon|P_{12}(t)|-\frac{1}{2}\varepsilon|P_{23}(e_x^1,t)|\right]\geqslant\alpha_2>0 \\ \inf_{e_x^{i-1}\in R^{m(i-1)},t\geqslant t_0}\left[\delta_i-\frac{1}{2}\varepsilon|P_{i-1,i}(e_x^{i-2},t)|-\frac{1}{2}\varepsilon|P_{i,i+1}(e_x^{i-1},t)|\right]\geqslant\alpha_i>0,\quad i=3,\dots,r-1 \\ \inf_{e_x^{i-2}\in R^{m(r-2)},t\geqslant t_0}\left[\delta_r-\frac{1}{2}\varepsilon|P_{r-1,r}(e_x^{r-2},t)|\right]\geqslant\alpha_r>0 \end{gathered} \tag{4.24}$$

где $\delta_i = \min\limits_{k=1,\dots,m}\delta_{ik}$, δ_{ik} $(k=1,\dots,m;\ i=1,\dots,r)$ – положительные постоянные из (4.9), ε, α_i $(i=1,\dots,r)$ – некоторые положительные параметры.

Тогда уравнение ПП в замкнутой канонической ОУС (2.1)–(2.2), (2.8), (2.4)–(2.6), (4.1)–(4.5), (4.7)–(4.9), (4.22)–(4.24) имеет вид

$$\dot{e_x} = \Gamma(e_x^{r-1},t)e_x,\quad e_x(t_0)=e_{x_0},\quad t\geqslant t_0 \tag{4.25}$$

Сделав в (4.25) замену переменной

$$e_x = He_y \tag{4.26}$$

где $e_y = \mathrm{col}(e_{y_1},\dots,e_{y_r})$, e_{y_i} $(i=1,\dots,r)$ – n, m-мерные векторы,

$$H=\mathrm{diag}(\mathrm{I}_m,\varepsilon\,\mathrm{I}_m,\dots,\varepsilon^{r-1}\,\mathrm{I}_m) \tag{4.27}$$

– постоянная, диагональная, положительно-определенная $(n\times n)$-матрица, $\varepsilon>0$ – параметр из (4.24), приведем ее к системе

$$\dot{e_y} = \Gamma_y(e_y^{r-1},t)e_y,\quad e_y(t_0)=e_{y_0},\quad t\geqslant t_0 \tag{4.28}$$

Здесь

$$\Gamma_y(e_y^{r-1},t)=H^{-1}\Gamma(H_1e_y^{r-1},t)H \tag{4.29}$$

где $H_1=\mathrm{diag}(I_m,\varepsilon I_m,\dots,\varepsilon^{r-2}I_m)$, $\varepsilon>0$ – параметр из (4.24), причем матрица Γ_y (4.29) такова, что

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}(\Gamma_y(e_y^{r-1},t)+\Gamma_y^*(e_y^{r-1},t)) &= -\tfrac{1}{2}(H^{-1}\Gamma(H_1e_y^{r-1},t)H+H\Gamma^*(H_1e_y^{r-1},t)H^{-1}) = \\ &= -\tfrac{1}{2}(H^{-1}\Gamma(e_x^{r-1},t)H+H\Gamma^*(e_x^{r-1},t)H^{-1}) = G_1(e_x^{r-1},t)+\varepsilon G_2(e_x^{r-2},t) \end{aligned} \tag{4.30}$$

где G_1 – положительно-определенная матрица-функция (4.7)–(4.9), (4.13), а G_2 – матрица-функция (4.23), удовлетворяющая (4.24).

Рассмотрим функцию

$$V(e_y) = \tfrac{1}{2}|e_y|^2 \qquad (4.31)$$

и вычислим ее производную по t в силу (4.28), учитывая соотношения (4.29)–(4.31), (4.7)–(4.9), (4.13), (4.22)–(4.24). Получим соотношение

$$V^{\cdot}(e_y(t)) = \tfrac{1}{2}(|e_y(t)|^2)^{\cdot} = \tfrac{1}{2}e_y^*(t)(\Gamma_y(e_y^{r-1},t)+\Gamma_y^*(e_y^{r-1},t))e_y(t) =$$

$$= -e_y^*(t)(G_1(H_1e_y^{r-1},t)+\varepsilon G_2(H_2e_y^{r-2},t))e_y^*(t) =$$

$$= -e_y^*(t)(G_1(e_x^{r-1},t)+\varepsilon G_2(e_x^{r-2},t))e_y(t) \leqslant -\sum_{i=1}^{r}\alpha_i|e_y(t)|^2 \leqslant -\gamma_2 V(e_y(t)),\ t\geqslant t_0 \qquad (4.32)$$

где $H_2 = \mathrm{diag}(\mathrm{I}_m, \varepsilon\mathrm{I}_m, \ldots, \varepsilon^{r-3}\mathrm{I}_m)$; $\varepsilon > 0$, $\alpha_i > 0$ $(i = 1,\ldots,r)$ – параметры из (4.24); $\gamma_2 = \min\limits_i \alpha_i$, $i = 1,..,r$.

Из (4.32) находим $V(e_y(t)) \leqslant V(e_y(t_0))\exp[-2\gamma_2(t-t_0)]$, $t \geqslant t_0$. Отсюда, используя снова (4.31), получим соотношение

$$|e_y(t)|^2 \leqslant |e_{y0}|^2\exp[-2\gamma_2(t-t_0)],\ e_y(t_0) = e_{y0},\ t\geqslant t_0 \qquad (4.33)$$

Следовательно, положение равновесия $e_y = 0$ системы (4.28) асимптотически устойчиво в целом с оценкой

$$|e_y(t)| \leqslant |e_{y0}|\exp[-\gamma_2(t-t_0)],\ e_y(t_0) = e_{y0},\ t\geqslant t_0 \qquad (4.34)$$

Отсюда и из (4.26), (4.27) вытекает, что положение равновесия $e_x = 0$ системы (4.25), (4.5), (4.22)–(4.24), (4.7)–(4.9), (4.13) асимптотически устойчиво в целом с оценкой

$$|e_x(t)| \leqslant \beta_1|e_{x0}|\exp[-\gamma_2(t-t_0)],\ e_x(t_0) = e_{x0},\ t\geqslant t_0 \qquad (4.35)$$

где $\beta_1 = |H|\,|H^{-1}|$.

По аналогии с предыдущим случаем, при учете (4.20), (4.21), (4.35), можно показать, что положение равновесия $e_z = 0$ замкнутой исходной ОУС (4.19), (1.4)–(1.9), (1.12), (1.13), (4.3)–(4.5), (4.22)–(4.24),(4.7)–(4.9), (4.13), асимптотически устойчиво в целом, а, следовательно, и ПД $z_p(t)$ исходной ОУС (1.1), (1.3)–(1.9), (1.12), (1.13) с законом управления u (1.14), (4.18), (4.3)–(4.5), (4.22)–(4.24), (4.7)–(4.9), (4.13) асимптотически устойчиво в целом с оценкой ПП

$$|e_z(t)| = |\Phi^r(e_x,t) \leqslant \mu_0|e_x(t)| \leqslant \mu_0\beta_1|e_x(t_0)|\exp[-\gamma_2(t-t_0)] \leqslant$$

$$\leqslant \mu_0\beta_1|\Psi^r(e_z(t_0),t_0)|\exp[-\gamma_2(t-t_0)],\ t\geqslant t_0 \qquad (4.36)$$

где μ_0 – положительный параметр, определяемый аналогично (4.21); γ_2, β_1 – параметры из (4.35).

5. Критерии устойчивости и стабилизации ПД для ОУС с канонической формой второго типа. Рассмотрим теперь задачи устойчивости и стабилизации ПД для ОУС, допускающих представление в канонической форме второго типа (2.9), (2.2), (2.10). Учитывая структуру постоянных матриц P, Q из (2.9), (2.10), можно убедиться, что $\mathrm{rank}\|Q, PQ, \ldots, P^{r-1}Q\| = n$. Следовательно, пара $(P, Q|$ управляема и существует постоянная $(m\times n)$-матрица

$$\Gamma_0 = \|\Gamma_{01},\ldots,\Gamma_{0r}\| \qquad (5.1)$$

где Γ_{0j} $(j=1,\dots,r)-(m\times m)$-блоки, такие, что матрица

$$\Gamma = P + Q\Gamma_0 \tag{5.2}$$

$$\operatorname{Re}\lambda_i(\Gamma) < 0, \quad i=1,\dots,n \tag{5.3}$$

где $\lambda_i(\Gamma)$ $(i=1,\dots,n)$ – собственные числа Γ.

Синтезируем закон управления с обратной связью по e_x в виде

$$e_w = \Gamma_0 e_x \tag{5.4}$$

Тогда уравнение ПП в замкнутой канонической ОУС (2.9), (2.2), (2.10), (5.4), (5.1)–(5.3) имеет вид

$$\dot{e}_x = \Gamma e_x, \quad e_x(t_0) = e_{x_0}, \quad t \geqslant t_0 \tag{5.5}$$

Следовательно, положение равновесия $e_x = 0$ в замкнутой ОУС (5.5), (5.2), (5.3) асимптотически устойчиво в целом с оценкой ПП вида

$$|e_x(t)| \leqslant \beta_2 |e_x(t_0)| \exp[\gamma_3(t-t_0)], \quad t \geqslant t_0 \tag{5.6}$$

где $\gamma_3 = \max\limits_i \operatorname{Re}\lambda_i(\Gamma)$ $(i=1,\dots,n)$, $\beta_2 > 0$ – параметр, зависящий только от Γ.

Подставляя e_x (3.1), e_w (5.4), (5.1)–(5.3) в (3.14), (3.15), получим стабилизирующий закон управления с обратной связью по e_z

$$e_u = \Phi_{r+1}(e_x, \Gamma_0 e_x, t) = \Phi_{r+1}(\Psi^r(e_z,t), \Gamma_0\Psi^r(e_z,t), t) \tag{5.7}$$

и уравнение ПП в замкнутой исходной ОУС (1.3)–(1.9), (1.12), (1.13), (5.7), (5.1)–(5.3) вида

$$\dot{e}_z = F_z(e_z, \Phi_{r+1}(\Psi^r(e_z,t), \ \Gamma_0\Psi^r(e_z,t),t),t), \quad e_z(t_0) = e_{z_0}, \quad t \geqslant t_0 \tag{5.8}$$

Оценивая ПП в (5.8), при учете (4.20), (5.6) получим

$$|e_z(t)| = |\Phi^r(e_x,t)| \leqslant \mu_0 |e_x(t)| \leqslant \mu_0\beta_2 |e_x(t_0)| \exp[\gamma_3(t-t_0)] =$$

$$= \mu_0\beta_2 |\Psi^r(e_z(t_0),t_0)| \exp[\gamma_3(t-t_0)], \quad t \geqslant t_0 \tag{5.9}$$

где μ_0 – параметр, определяемый аналогично (4.21); β_2, γ_3 – параметры из (5.6).

Отсюда следует, что положение равновесия $e_z = 0$ в замкнутой исходной ОУС (5.8), (1.4)–(1.9), (1.12), (1.13), (5.7), (5.1)–(5.3) асимптотически устойчиво в целом. Следовательно, ПД $z_p(t)$ исходной ОУС (1.1), (1.4)–(1.9), (1.12), (1.13) с законом управления (1.14), (5.7), (5.1)–(5.3) асимптотически устойчиво в целом с оценкой ПП (5.9).

6. Декомпозируемость, робастность и качество стабилизации ОУС. Многомерным ОУС присущи перекрестные динамические связи, интенсивность взаимовлияния которых нелинейно зависит от текущего состояния. Вследствие этого при использовании линейных ПИД-регуляторов в замкнутой ОУС существенно ухудшается качество ПП и возможна потеря устойчивости ПД.

Преимущество синтезированных нелинейных законов стабилизации ПД заключается в том, что за счет правильного выбора параметров матриц коэффициентов усиления можно обеспечить полную компенсацию перекрестных связей и заданный характер затухания ПП в замкнутой ОУС.

ОУС будем называть декомпозируемой, если существует закон управления, при котором уравнение ПП в замкнутой системе распадается на систему независимых уравнений по управляемым координатам.

Можно показать, что синтезированные законы управления обеспечивают декомпозицию ОУС в указанном смысле. Так, например, для ОУС в канонической форме второго типа (2.9), (2.2),(2.10) достаточно блоки у матрицы P из (2.9) и у матрицы Γ_0

(5.1) выбрать так, что

$$P_{ij} = \mathrm{diag}(P_{ijkk})_{k=1}^{m}, \quad i = 1,\dots,r-1; \quad j = 1,\dots,i+1$$
$$\Gamma_{0j} = Q_r^{-1}(-P_{rj} + \hat{\Gamma}_{0j}), \quad \hat{\Gamma}_{0j} = \mathrm{diag}(\hat{\Gamma}_{0jkk})_{k=1}^{m}, \quad j = 1,\dots,r \tag{6.1}$$

Тогда уравнение ПП (5.5) распадается на m независимых уравнений вида

$$\dot{\bar{e}}_{x_k} = \bar{\Gamma}_k \bar{e}_{x_k}, \quad \bar{e}_{x_k}(t_0) = e_{x_{k0}}, \quad t \geq t_0, \quad k = 1,\dots,m \tag{6.2}$$

$$\bar{\Gamma}_k = \begin{Vmatrix} p_{11kk} & p_{12kk} & 0 & \dots & 0 \\ p_{21kk} & p_{22kk} & p_{23kk} \; 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ p_{r-1,1kk} & \dots & & & p_{r-1,rkk} \\ \hat{\Gamma}_{01kk} & \dots & & & \hat{\Gamma}_{0rkk} \end{Vmatrix}$$

где $\bar{e}_{x_k} = \mathrm{col}(e_{x_{1k}},\dots,e_{x_{rk}})$ – r-мерный вектор состояния системы, причем $e_x = \mathrm{col}(e_{x_1},\dots,e_{x_r})$, $e_{x_j} = \mathrm{col}(e_{x_{j1}},\dots,e_{x_{jm}})$ $(j = 1,\dots,r)$ – n, m-векторы.

Параметрами уравнений ПП (6.2) при учете (6.1) являются коэффициенты $\hat{\Gamma}_{0jkk}$ $(j = 1,\dots,r;\ k = 1,\dots,m)$ – элементы матрицы $\hat{\Gamma}_0 = \|\hat{\Gamma}_{01},\dots,\hat{\Gamma}_{0r}\|$, где $\hat{\Gamma}_{0j} = Q_r\Gamma_{0j} + P_{rj} = \mathrm{diag}(\hat{\Gamma}_{0jkk})_{k=1}^{m}$ $(j = 1, \dots, r)$, определяемые по матрице коэффициентов усиления Γ_0 (5.1) стабилизирующего закона управления e_w (5.4),(5.1)–(5.3).

Очевидно, что их всегда можно выбрать так, чтобы ПП имели наперед заданный характер и скорость затухания. В важном для практики случае, когда $n = 3m$, что соответствует динамике электромеханических ОУС, выбор параметров закона стабилизации ПД можно осуществлять при помощи диаграмм Вышнеградского, исходя из требования обеспечения желаемого характера затухания ПП (монотонный, апериодический или колебательный) и заданных показателей качества (точность, быстродействие и т.п.).

Были получены [4, 6] расчетные формулы для параметрического синтеза нелинейных стабилизирующих и модальных законов управления ОУС в канонической форме второго типа по параметрам Вышнеградского. Важно отметить, что эти законы стабилизации обеспечивают робастность ОУС, т.е. устойчивость ПД по отношению к ограниченным параметрическим и постоянно действующим возмущениям [4, 6]. Используя нелинейные преобразования в пространстве состояний и управлений, предложенные выше, легко перенести указанные результаты на более широкий класс ОУС и синтезировать соответствующие робастные законы стабилизации ПД с обратными связями по компонентам исходного или канонического векторов состояний. На основе стабилизирующих и робастных законов стабилизации можно синтезировать адаптивное управление ПД ОУС при помощи методов, описанных в [1–3, 7–14].

7. Приложение. Для электромеханических ОУС (ЭМОУС) с двигателями постоянного тока (ДПТ) с жестким редуктором, описывающих нелинейную динамику роботов, станков и т.п. [4–14], уравнения в отклонениях имеют вид (1.3)–(1.9), где $n = 3m$ и

$$\begin{aligned} & e_z = \mathrm{col}(q - q_p, q^{\cdot} - q_p^{\cdot}, I - I_p), \quad F_{z_1}(e_z^2, t) = q^{\cdot} - q_p^{\cdot}, F_{z_2}(e_z^3, t) = \\ & = A^{-1}(q)(k_M I - b(q, q^{\cdot}, t)) - A^{-1}(q_p)(k_M I_p - b(q_p, q_p^{\cdot}, t)), \quad F_{z_3}(e_z^3, e_u, t) = \\ & = L^{-1}(e_u - R(I - I_p) - k_e i_p(q^{\cdot} - q_p^{\cdot})), \quad C_1(r_z^1, t) = 0, \quad D_1(e_z^1, t) = I_m \\ & C_2(e_z^2, t) = A^{-1}(q)(k_M I_p - b(q, q^{\cdot}, t)) - A^{-1}(q_p)(k_M I_p - b(q_p q_p^{\cdot}, t)), \quad D_2(e_z^2, t) = A^{-1}(q) k_M \\ & C_3(e_z^3, t) = -L^{-1}(R(I - I_p) - k_e i_p(q^{\cdot} - q_p^{\cdot})), \quad D_3(e_z^3, t) = L^{-1} \\ & A(q) = J i_p + i_p^{-1} A_0(q), \quad b(q, q^{\cdot}, t) = k_0 i_p q^{\cdot} + i_p^{-1} b_0(q, q^{\cdot}, t) \end{aligned} \tag{7.1}$$

Здесь q – m-мерный вектор обобщенных координат механической части – исполнительного механизма (ИМ) ЭМОУС; $A_0(q)$ – положительно определенная $(m \times m)$-матрица кинетической энергии $T = \frac{1}{2} q^{\cdot *} A_0(q) q^{\cdot}$ ИМ ЭМОУС;

$$b_0(q, q^{\cdot}, t) = \dot{A_0}(q) q^{\cdot} - \tfrac{1}{2} \partial (q^{\cdot *} A_0(q) q^{\cdot}) / \partial q + \partial \Pi / \partial q - Q_0;$$

$\Pi = \Pi(q)$ – потенциальная энергия ИМ ЭМОУС; $Q_0 = Q_0(q, q^{\cdot}, t)$ – m-мерный вектор обобщенных сил (моментов) сопротивления, действующих на ИМ ЭМОУС; I – m-мерный вектор токов в якорных цепях ДПТ; e_u – m-мерный вектор управлений – отклонений управляющих напряжений u, подаваемых на якорные цепи ДПТ, от их программных значений u_p; J, k_0, k_M, L, R, k_e – диагональные матрицы электромеханических параметров ДПТ, являющихся положительными вещественными величинами; i_p – диагональная матрица коэффициентов передачи редукторов (такая, что $\varphi = i_p q$, где φ – вектор углов поворота валов двигателей).

Для ЭМОУС (1.3)–(1.9), (7.1) операторы прямого и обратного преобразований в пространствах состояний и управлений (3.1) и (3.14) имеют соответственно вид

$$\Psi^3(e_z, t) = \begin{Vmatrix} e_{z_1} \\ K_2(e_z^1, t) + L_2(e_z^1, t) e_{z_2} \\ K_3(e_z^2, t) + L_3(e_z^2, t) e_{z_3} \end{Vmatrix}, \quad \Phi^3(e_x, t) = \begin{Vmatrix} e_{x_1} \\ M_2(e_x^1, t) + N_2(e_x^1, t) e_{x_2} \\ M_3(e_x^2, t) + N_3(e_x^2, t) e_{x_3} \end{Vmatrix}$$

$$\Psi_4(e_z, e_u, t) = K_4(e_z, t) + L_4(e_z, t) e_u, \quad \Phi_4(e_x, e_w, t) = M_4(e_x, t) + N_4(e_x, t) e_w \tag{7.2}$$

Здесь

$$K_2(e_z^1, t) = -P_{12}^{-1}(e_z^1, t) P_{11}(e_z^1, t), \quad L_2(e_z^1, t) = P_{12}^{-1}(e_z^1, t)$$

$$K_3(e_z^2, t) = P_{23}^{-1}(\Psi^2, t) \left[-\sum_{k=1}^{2} P_{2k}(\Psi^2, t) \Psi_k + \dot{K_2}(e_z^1, t) + \dot{L_2}(e_z^1, t) e_{z_2} + L_2(e_z^1, t) C_2(e_z^2, t) \right]$$

$$L_3(e_z^2, t) = P_{23}^{-1}(\Psi^2, t) L_2(e_z^1, t) D_2(e_z^2, t) \tag{7.3}$$

$$K_4(e_z, t) = P_{34}^{-1}(\Psi^3, t) \left[-\sum_{k=1}^{3} P_{3k}(\Psi^3, t) \Psi_k + \dot{K_3}(e_z^2, t) + \dot{L_3}(e_z^2, t) e_{z_3} + L_3(e_z^2, t) C_3(e_z^3, t) \right]$$

$$L_4(e_z, t) = P_{34}^{-1}(\Psi^3, t) L_3(e_z^2, t) D_3(e_z^3, t)$$

примем матрицы-функции P_{ij} $(i = 1, \dots, 3;\ j = 1, \dots, i+1)$ и вектор-функции Ψ_k, Ψ^k $(k = 1, 2, 3)$ определены в (2.3), (2.5), (3.10), а вектор функции M_i $(i = 2, 3, 4)$ и матрицы-функции N_i $(i = 2, 3, 4)$ определяются согласно (3.15).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимофеев А.В.* Адаптивная стабилизация программных движений и оценка времени адаптации // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248. № 3. С. 545–549
2. *Попов Е.П., Тимофеев А.В.* Принцип скоростного управления в задаче аналитического синтеза автоматов стабилизации // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256. № 5. С. 1073–1076.
3. *Попов Е.П., Тимофеев А.В.* Управляемость на подпространстве и адаптивные модальные регуляторы // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 5. С. 1070–1073.
4. *Тимофеев А.В.* Свойства обратимых моделей динамики и синтез высококачественного робастного управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 1. С. 45–5.
5. *Зотов Ю.К., Тимофеев А.В.* Управляемость и стабилизация программных движений обратимых механических и электромеханических систем // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 968–975.
6. *Зотов Ю.К., Тимофеев А.В.* Стабилизация программных движений с заданными показа-

7. *Гинзбург А.Р., Тимофеев А.В.* Об адаптивной стабилизации программных движений механических систем // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 859–869.
8. *Тимофеев А.В., Экало Ю.В.* Устойчивость и стабилизация программных движений робота-манипулятора // Автоматика и телемеханика. 1976. № 10. С. 148–156.
9. *Павлов В.А., Тимофеев А.В.* Построение и стабилизация программных движений подвижного робота-манипулятора // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1976. № 6. С. 91–101.
10. *Тимофеев А.В.* Адаптивное управление программным движением динамических систем // Автоматика. 1978. № 3. С. 36–43.
11. *Тимофеев А.В.* Построение адаптивных систем управления программным движением. Л.: Энергия, 1980, 85 с.
12. *Тимофеев А.В.* Управление роботами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. 240 с.
13. *Козлов В.В., Макарычев В.П., Тимофеев А.В., Юревич Е.И.* Динамика управления роботами. М.: Наука, 1984. 334 с.
14. *Тимофеев А.В.* Адаптивное управление роботами // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1989. № 1. С. 154–165.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
4.VI.1993