УДК 531.37

© 1994 г. В.М. Матросов, И.А. Финогенко

О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ТРЕНИЕМ СКОЛЬЖЕНИЯ

Исследуется вопрос существования локальных классических решений уравнений движения голономных систем с трением скольжения. Условия разрешимости уравнений движения относительно ускорений позволяют получить оценки коэффициентов трения, в рамках которых (с точки зрения существования решений) для описания динамики механических систем с трением скольжения могут применяться законы Кулона.

В некоторых условиях прямое использование законов сухого трения Кулона связано с введением сил трения, зависящих от нормальных реакций, являющихся функциями ускорений. Разрешение таких уравнений движения относительно ускорений не всегда возможно и не всегда однозначно. Поэтому для уравнений движения это не приводит к доопределению правых частей в некоторых точках разрыва или приводит к неоднозначному их доопределению даже для автономных механических систем с голономными стационарными связями.

Первый в истории механики феномен такого рода был открыт Пэнлеве в его лекциях о трении [1] и явился парадоксом, вызвавшим дискуссии, теоретические и экспериментальные исследования (см. дополнение к переводу на русский язык [1]). Но и сейчас задачи динамики систем с сухим трением решаются в областях, где правые части уравнений движения могут быть определены законами Кулона.

Общая теория движения механических систем с трением создана в трудах Пэнлеве [1] и развита в известных работах ряда авторов ([2–7] и др.), в которых принцип возможных перемещений Эйлера-Лагранжа, метод Лагранжа и принцип наименьшего принуждения Гаусса распространены на системы с трением.

1. Уравнения движения. Пусть дана механическая система с k степенями свободы, стесненная голономными (вообще говоря, удерживающими, нестационарными) идеальными связями с силами трения скольжения, добавляемыми к активным силам. Уравнения ее движения могут быть записаны в форме Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_a}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial T_a}{\partial q^i}=Q_i, \quad i=1,\ldots,k \tag{1.1}$$

Здесь $\dot{q}^i(t)=dq^i/dt$ – обобщенные скорости, T_a – кинетическая энергия системы в движении относительно инерциальной системы координат, представляющая сумму $T_a = T + T_1 + T_0$ положительно определенной квадратичной формы T обобщенных скоростей в некоторой области изменения переменных (t, q)

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}a_{ij}(t,q)\dot{q}^i\dot{q}^j, \quad (a_{ij}(t,q)=a_{ji}(t,q)) \tag{1.2}$$

линейной формы обобщенных скоростей

$$T_1=\sum_{i=1}^{k}a_i(t,q)\dot{q}^i$$

и функции $T_0 = T_0(t, q)$. Функции $a_{ij}(t, q)$, $a_i(t, q)$, $T_0(t, q)$ предполагаются непрерывно-дифференцируемыми по совокупности аргументов в области определения из пространства R^{k+1}.

Силы F_μ, действующие на точки системы с радиус-векторами $r_\mu(t, q)$ включают активные силы F_μ^A и силы реакций связей, состоящие из сил нормальной реакции F_μ^N и сил трения скольжения F_μ^T : $F_\mu = F_\mu^A + F_\mu^N + F_\mu^T$. Обобщенные силы вычисляются как коэффициенты при δq^i в выражении виртуальной работы сил F_μ, действующих на точки системы. Они являются линейными относительно F_μ^A, F_μ^T функциями с коэффициентами, непрерывно зависящими от t, q:

$$Q_i = \sum_\mu \left(\frac{\partial r_\mu}{\partial q^i} F_\mu^A \right) + \sum_\mu \left(\frac{\partial r_\mu}{\partial q^i} F_\mu^T \right) = Q_i^A + Q_i^T$$

Вводятся обозначения: $q = (q^1, ..., q^k)^T$, $\dot q = (\dot q^1, \dots, \dot q^k)^T$, $\ddot q = (\ddot q^1, \dots, \ddot q^k)^T$, $Q = (Q_1, ..., Q_k)^T$ – векторы обобщенных координат, скоростей, ускорений и сил; $g=(g_1, ..., g_k)^T$ – непрерывная вектор-функция,

$$g_i(t,q,\dot q) = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial a_j}{\partial q^i} - \frac{\partial a_i}{\partial q^j} \right) \dot q^j + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial a_{\nu j}}{\partial q^i} \dot q^\nu \dot q^j -$$

$$- \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^\nu} \dot q^\nu \right) \dot q^j + \frac{\partial T_0}{\partial q^i} - \frac{\partial a_i}{\partial t}$$

описывающая обобщенные гироскопические силы, переносные силы инерции и некоторые другие члены. При учете возможной зависимости обобщенных сил трения Q_i^T от обобщенных нормальных реакций связей N_i, а последних от обобщенных ускорений, и предполагая, как обычно, обобщенные активные силы Q_i^A непрерывно зависимыми только от обобщенных координат, скоростей и времени, можно записать

$$Q = Q^A(t,q,\dot q) + Q^T(t,q,\dot q,\ddot q)$$

Тогда система (1.1) запишется в виде уравнения

$$A(t,q)\ddot q = g(t,q,\dot q) + Q^A(t,q,\dot q) + Q^T(t,q,\dot q,\ddot q), \ (t,q,\dot q) \in \Omega \tag{1.3}$$

Здесь $A(t, q)$– матрица коэффициентов квадратичной формы (1.2) (коэффициентов инерции) с определителем $\det A(t, q) > 0$ при любых t, q в некоторой области из R^{k+1}, $Q^A(t,q,\dot q)$ включают потенциальные силы, силы радиальной коррекции, силы сопротивления демпферов и среды (детальное описание этих сил не приводится), $Q_i^T(t,q,\dot q,\ddot q)$ – обобщенные силы трения скольжения.

2. Обобщенные силы трения скольжения. Пусть связи и обобщенные координаты $q^1, ..., q^k$ таковы (так могут быть выбраны), что только изменение q определяет скольжение с возникновением сил трения и каждая из обобщенных сил трения Q_i^T зависит явно только от соответствующей (одной) обобщенной скорости $\dot q^i$ и нормальной реакции N_i (быть может, зависящей и от других обобщенных скоростей и ускорений). Согласно законам Кулона (см. [2, 3]) при движении с обобщенными скоростями $\dot q^s(t) \neq 0$, ($s = 1, ..., k_*$, $1 \le k_* \le k$), обобщенные силы трения скольжения Q_s^T выражаются формулами

$$Q_s^{T1} = -f_s |N_s| \operatorname{sgn} \dot q^s, \ \ (s = 1,\dots,k_*)$$

через коэффициенты трения (в движении) f_s и модули нормальных реакций $|N_s|$ в точках соприкосновения трущихся тел. Последние определяются [5] из уравнений Лагранжа с множителями λ_j, ($j = 1, ..., k^*$, $k^* \geq k_*$) для системы с кинетической энергией T_{a*} и дополнительными обобщенными координатами $q_* = (q_*^1, \ldots, q_*^{k^*})$, получающейся из исходной после мысленного освобождения от связей $q_*^1 = 0, \ldots, q_*^{k^*} = 0 (\dot{q}_* = 0, \ddot{q}_* = 0)$, вызывающих искомые реакции. При этом

$$\lambda_i = \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T_{a*}}{\partial \dot{q}_*^j} - \frac{\partial T_{a_*}}{\partial q_*^j} - Q_j^*(t, q, q_*, \dot{q}, \dot{q}_*) \right]_{q_*=0, \dot{q}_*=0, \ddot{q}_*=0} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_{k+ji}^*(t, q, 0)\ddot{q}^i - g_j^*(t, q, \dot{q}) - Q_j^*(t, q, \dot{q}), \quad (j = 1, \ldots, k^*)$$

Модули нормальных реакций определяются равенствами $|N_s| = |\lambda_s|$ при скольжении со скоростью $\dot{q}^s$ по поверхности $q_*^s = 0, s = 1, \ldots, k', 0 \leq k' \leq k_*$; $|N_s| = \sqrt{\lambda_j^2 + \lambda_{j'}^2}$, если N_s получается от сложения взаимно ортогональных реакций гладких связей $q_*^j = 0, q_*^{j'} = 0$ с модулями $|\lambda_j|, |\lambda_{j'}|$, $s = k'+1, \ldots, k_*, i, j = k'+1, \ldots, k^*$ при вращении тела вокруг оси $q^j = 0$, $q^{j'} = 0$ или при скольжении точки по пространственной кривой.

Заметим, что функции $|N_s|$ непрерывны по $\ddot{q}$, а при $|N_s| \neq 0$ непрерывно-дифференцируемы по $\ddot{q}$.

Итак, для обобщенных сил трения скольжения в движении имеем

$$Q_s^{T1} = -f_s(t, q^s, \dot{q}^s)|N_s(t, q, \dot{q}, \ddot{q})| \operatorname{sgn} \dot{q}^s \quad \text{при} \quad \dot{q}^s \neq 0, s = 1, \ldots, k_* \tag{2.1}$$

Коэффициент трения в движении $f_s(t, q^s, \dot{q}^s) > 0$ (для сухого трения обычно принимается равным положительной постоянной, но при наличии смазки или другой жидкости на соприкасающихся поверхностях, а также при изменении температуры поверхностей или при разной чистоте обработки на разных участках поверхностей и т.п. он может быть функцией переменных $t, q^s, \dot{q}^s$).

Для остальных $k_* < s \leq k$ полагаем трение отсутствующим:

$$f_s = 0, \ \ Q_s^T = 0 \ \ s = k_* + 1, \ldots, k$$

Уравнения движения (1.3), (2.1) в области $\dot{q}^s \neq 0$, $s = 1, ..., k_*$ приводятся к виду

$$\ddot{q} = A^{-1}(t, q)R(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, f)$$

где R – правая часть (1.3) с силой трения (2.1). При условии $f \stackrel{\Delta}{=} (f_1, \ldots, f_{k_*}) = 0$ последние однозначно разрешены относительно $\ddot{q}$. Учитывая вид функций $|N_s|$ и структуру правой части уравнений, можно утверждать, что при достаточно малых f_1, ..., f_{k_*} отображение $\ddot{q} = A^{-1}(t, q)R(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, f)$ – сжимающее. Простые вычисления с использованием принципа сжимающих отображений [8] показывают, что уравнения однозначно разрешимы относительно $\ddot{q}$ в некоторой окрестности каждой точки (t, q, $\dot{q}$) при достаточно малых f_1, ..., f_{k_*} и приводятся к виду

$$\ddot{q} = G(t, q, \dot{q}, f) \tag{2.2}$$

где G – непрерывная по совокупности своих аргументов функция.

На основании теоремы Пеано для любых начальных данных из рассматриваемой области существует локально классическое решение полученных уравнений. Таким образом, в области $\dot{q}^s \neq 0$, s= 1, ..., k_*, $\det A(t, q) > 0$ обобщенные силы трения можно доопределить функциями, не зависящими от ускорений $\ddot{q}^s$ (если коэффициенты трения достаточно малы):

$$Q_s^T(t,q,\dot{q}) = -f_s(t,q^s,\dot{q}^s)|N_s(t,q,\dot{q},G(t,q,\dot{q},f))|\text{sgn}\dot{q}^s$$

При $|N_s| \neq 0$, непрерывной дифференцируемости $|N_s(t,\cdot)|$ и других функций, входящих в правые части уравнений движения, относительно q, $\dot{q}$, $\ddot{q}$ функция G непрерывно-дифференцируема по этим переменным (согласно теореме о неявных функциях), а решения уравнения (2.2) единственны и определяют движения механической системы (1.1) [9].

Пусть теперь скорость скольжения трущегося тела в некоторый момент времени равна нулю. В соответствии с правилами классической механики ([3], с. 107) считаем, что коэффициенты трения $f_s^0(t,q^s)$ при относительном покое равны коэффициентам трения в движении, т.е.

$$f_s^0(t,q^s) = f_s(t,q^s,0),\ \ s = 1,\dots,k_*$$

Если $\dot{q}^s(t) = 0$ для некоторого индекса $1 \leq s \leq k_*$, то полагаем $\ddot{q}^s = 0$ и вычисляем обобщенную силу трения скольжения при относительном покое

$$Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q}) \overset{\Delta}{=} \sum_{j=1,j\neq s}^{k} a_{sj}(t,q)\ddot{q}^j - \left[g_s(t,q,\dot{q}) - Q_s^A(t,q,\dot{q})\right]_{\dot{q}^s=0}$$

Если выполняется неравенство

$$\left|Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q})\right| \leq f_s^0(t,q^s)\left|N_s(t,q,\dot{q},\ddot{q})\right|_{\dot{q}^s=\ddot{q}^s=0} \tag{2.3}$$

то действительно будет $\ddot{q}^s(t) = 0$ и

$$Q_s^T(t,q,\dot{q},\ddot{q}) = Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q})$$

Если же неравенство (2.3) не выполняется, то сделанное предположение (о $\ddot{q}^s = 0$) отбрасывается и считается

$$Q_s^T(t,q,\dot{q},\ddot{q}) = f_s(t,q^s,0)|N_s(t,q,\dot{q},\ddot{q})|\text{sgn}Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q}) \tag{2.4}$$

Тогда в действительном движении силы $\ddot{q}^s \neq 0$, так как при $\ddot{q}^s = 0$ получили бы

$$\left|Q_s^{T0}\right| = f_s^0\left|N_s\right|_{\dot{q}^s=\ddot{q}^s=0}.$$

В общем случае для обобщенной силы трения скольжения получается выражение [9]

$$Q_s^T(t,q,\dot{q},\ddot{q}) = \begin{cases} -f_s(t,q^s,\dot{q}^s)\left|N_s(t,q,\dot{q},\ddot{q})\right|\text{sgn}\dot{q}^s, \text{ если } \dot{q}^s \neq 0 \\ f_s(t,q^s,0)\left|N_s(t,q,\dot{q},\ddot{q})\right|\text{sgn}Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q}), \text{ если } \dot{q}^s = 0 \\ \qquad \left|Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q})\right| > f_s^0(t,q^s)\left|N_s(t,q,\dot{q},\ddot{q})\right|_{\ddot{q}^s=0} \\ Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q}), \text{ если } \dot{q}^s = 0, \\ \qquad \left|Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q})\right| \leq f_s^0(t,q^s)\left|N_s(t,q,\dot{q},\ddot{q})\right|_{\ddot{q}^s=0} \end{cases} \tag{2.5}$$

Из уравнений движения (1.3) системы с трением скольжения (2.5) сразу вытекают некоторые ограничения на область допустимых значений $\ddot{q}$ в R^k типа зависимостей значений $\ddot{q}$ от значений t, q, $\dot{q}$.

Однозначное доопределение правых частей системы уравнений (1.3) может тем не менее привести к неоднозначному доопределению правых частей уравнений движения в форме

$$\ddot{q} = G(t, q, \dot{q})$$

т.е. после разрешения (1.3) относительно $\ddot{q}$.

3. Преобразование уравнений движения. Уравнения движения (1.3) с доопределением (2.5) могут быть приведены к виду, не использующему в доопределении правых частей условий $\ddot{q}^s = 0$. Обозначим

$$N(\dot{q}) \overset{\Delta}{=} \left\{ s \in (1, \ldots, k_*) : \dot{q}^s = 0 \right\}$$

$$N_0(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \overset{\Delta}{=} \left\{ s \in N(\dot{q}) : \left| Q_s^{T0}(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \right| \leq f_s^0(t, q^s) \left| N_s(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \right| \right\}$$

В общей теории механических систем с трением Пэнлеве делается предположение о том, что силы трения F_μ^T могут быть выражены, как функции $t, q, \dot{q}$ и F_μ^N, причем F_μ^N "являются в свою очередь функциями $t, q, \dot{q}$ и F_μ^A, не зависящими от закона движения" (при $\dot{q}^i \neq 0$, $i = 1, \ldots, k_*$) ([1], с. 24). Если понимать это как возможность преобразования уравнений движения (1.3), (2.5) к виду, в котором N_s не зависят от обобщенных ускорений, то получим выполнение условий $\partial |N_s| / \partial \ddot{q}^s = 0$ для $s = 1, \ldots, k_*$.

Рассмотрим несколько менее жесткое предположение

$$f_s^0(t, q) \left| \partial \left| N_s(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \right| / \partial \ddot{q}^s \right| < a_{ss}(t, q) \tag{3.1}$$

для всех $s \in N(\dot{q}) \setminus N_0(t, q, \dot{q}, \ddot{q})$, $(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \in \Omega \times R^k : \left| N_s(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \right| \neq 0$.

Учитывая, что (см. [10]) диагональные элементы симметричной, положительно определенной матрицы $A(t,q)$ – положительные числа, заключаем, что неравенства (3.1) выполняются если $|N_s(t, q, \dot{q}, \ddot{q})|$ не зависят от $\ddot{q}^s$.

Лемма 1. Если выполняется условие (3.1), то система уравнений движения (1.3) с доопределением (2.5) эквивалентна (т.е. их решения в том или ином смысле совпадают) системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{k} a_{si}(t, q)\ddot{q}^i = Q_s^{T0}(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) + g_s(t, q, \dot{q}) + Q_s^A(t, q, \dot{q}), \quad s \in N_0(t, q, \dot{q}, \ddot{q})$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} a_{si}(t, q)\ddot{q}^i = {} & f_s(t, q^s, 0) \left| N_s(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \right| \operatorname{sgn} Q_s^{T0}(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) + \\ & + g_s(t, q, \dot{q}) + Q_s^A(t, q, \dot{q}), \quad s \in N(\dot{q}) \setminus N_0(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} a_{si}(t, q)\ddot{q}^i = {} & -f_s(t, q^s, \dot{q}^s) \left| N_s(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \right| \operatorname{sgn} \dot{q}^s + g_s(t, q, \dot{q}) + \\ & + Q_s^A(t, q, \dot{q}), \quad s \in (1, \ldots, k_*) \setminus N(\dot{q}) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_{si}(t, q)\ddot{q}^i = g_s(t, q, \dot{q}) + Q_s^A(t, q, \dot{q}), \quad s = k_* + 1, \ldots, k$$

Доказательство. Для того, чтобы доказать эквивалентность системы уравнений (1.3), доопределенной равенствами (2.5), и системы уравнений (3.2), достаточно показать, что в каждой точке $(t, q, \dot{q}) \in \Omega$ они определяют один и тот же набор векторов $\ddot{q}_*$.

Пусть $\ddot{q}_*$ удовлетворяет уравнениям (3.2) при фиксированных $(t,q,\dot{q}) \in \Omega$. Обозначим

$$F_s(\ddot{q}^s) \overset{\Delta}{=} \frac{1}{a_{ss}(t,q)}\left[\left|Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q})\right| - f_s^0(t,q)\left|N_s(t,q,\dot{q},\ddot{q})\right|\right]$$

с $\ddot{q}^i = \ddot{q}_*^i$ при $i \neq s$. Если $s \in N(\dot{q}) \setminus N_0(t,q,\dot{q},\ddot{q}_*)$ то $F_s(\ddot{q}_*^s) = -\ddot{q}_*^s \operatorname{sgn} Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q}_*)$ и

$$|Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q}_*)| > f_s^0(t,q)\left|N_s(t,q,\dot{q},\ddot{q}_*)\right| \tag{3.3}$$

Тогда $F_s(\ddot{q}_*^s) = \left|\ddot{q}_*^s\right|$. Согласно (3.1) при $\left|N_s(t,q,\dot{q},\ddot{q})\right| \neq 0$ функция $F_s(\ddot{q}^s)$ локально удовлетворяет условию Липшица с постоянной $L < 1$. Учитывая непрерывность F_s и то, что при $|N_s| = 0$ справедливо равенство $F_s(\ddot{q}^s) = \text{const}$, можно показать, что F_s удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[0, \ddot{q}_*^s]$ с постоянной $L < 1$. Тогда

$$|F_s(\ddot{q}_*) - F_s(0)| \leq L|\ddot{q}_*^s - 0| < |F_s(\ddot{q}_c^s)| \tag{3.4}$$

откуда следует, что $F_s(0) > 0$. Это означает, что

$$|Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q})| > f_s^0(t,q)\left|N_s(t,q,\dot{q},\ddot{q})\right|_{\ddot{q}^s = 0} \tag{3.5}$$

при условии $\ddot{q}^i = \ddot{q}_*^i$, если $i \neq s$. Поэтому правые части (3.2) и (3.1) с доопределением обобщенных сил трения (2.5) совпадают в точке $(t,q,\dot{q},\ddot{q}_*)$ для всех $s \in N(\dot{q}) \setminus N_0(t,q,\dot{q},\ddot{q}_*)$. Если $s \in N_0(t,q,\dot{q},\ddot{q}_*)$, то $\ddot{q}_*^s = 0$ и для $\ddot{q} = \ddot{q}_*$ выполняется неравенство (2.3). Следовательно, правые части систем уравнений (1.3), (2.5) и (3.2) совпадают для всех $s \in N_0(t,q,\dot{q},\ddot{q}_*)$. Для $s \in (1,...,k) \setminus N(\dot{q})$ уравнения (1.3) и (3.2), очевидно, совпадают. Поэтому $\ddot{q}_*$ – также решение системы уравнений (1.3), (2.5).

Обратно, пусть $\ddot{q}_*$ удовлетворяет (1.3), (2.5). Если $s \in N(\dot{q})$ и $\ddot{q}_*^s \neq 0$, то выполняется (3.5). Тогда $F_s(0) > 0$, $|F_s(q_*^s)| = |\ddot{q}_*^s \operatorname{sgn} Q_s^{T0}| = |\ddot{q}_*^s|$ и сохраняется (3.4). Следовательно, $F_s(\ddot{q}_*^s) > 0$, а это означает, что справедливо неравенство (3.3). Отсюда вытекает, что правые части систем (1.3), (2.5.) и (3.2) совпадают для всех $s \in N(\dot{q})$, таких, что $\ddot{q}_*^s \neq 0$. Если $s \in N(\dot{q})$ и $\ddot{q}_*^s = 0$, то выполняется неравенство (2.3) при $\ddot{q} = \ddot{q}_*$, и поэтому $s \in N_0(t,q,\dot{q},\ddot{q}_*)$. Отсюда вытекает, что правые части систем (1.3), (2.5) и (3.2) совпадают для всех $s \in N(\dot{q})$. Аналогично предыдущему заключаем, что $\ddot{q}_*$ – решение уравнений (3.2).

Лемма 2. Пусть $\ddot{q}_*$ определяется как решение системы уравнений (3.2) или (1.3), (2.5) в точке $(t,q,\dot{q}) \in \Omega$. Тогда для любого $s \in N(\dot{q})$ следующие утверждения эквивалентны:

1. $\ddot{q}_*^s \neq 0$, $\operatorname{sgn}\ddot{q}_*^s = -\operatorname{sgn} Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q}_*)$;
2. выполняется неравенство (3.3).

Доказательство. Пусть $\ddot{q}_*$ удовлетворяет системе (1.3), (2.5). Предположим, что справедливо утверждение 1. Если бы для $\ddot{q} = \ddot{q}_*$ выполнялось неравенство (2.3), то было бы $\ddot{q}_*^s = 0$, а поскольку $\ddot{q}_*^s \neq 0$, то (2.3) не выполняется. Поэтому

$$\ddot{q}_*^s = \frac{1}{a_{ss}(t,q)}\left[f_s(t,q^s,0)\left|N_s(t,q,\dot{q},\ddot{q}_*)\right| \operatorname{sgn} Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q}_*) - Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q}_*)\right] \tag{3.6}$$

Отсюда, учитывая, что $a_{ss}(t,q) > 0$, $\operatorname{sgn}\ddot{q}_*^s = -\operatorname{sgn} Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q}_*)$ получаем (3.3). Тем самым установлено, что из утверждения 1 следует утверждение 2.

Пусть теперь выполняется утверждение 2. Тогда для $\ddot{q} = \ddot{q}_*$ неравенство (2.3) не выполнено, так как, предположив его выполненным, нашли бы, что $\ddot{q}_*^s = 0$ и пришли бы к противоречию с (3.3). Следовательно, справедливо (2.4) (в точке $(t, q, \dot{q}, \ddot{q}_*)$) и $\ddot{q}_*^s \neq 0$. Поэтому имеет место равенство (3.6), откуда при учете (3.3) получаем $\operatorname{sgn}\ddot{q}_*^s = -\operatorname{sgn}Q_s^{T0}(t, q, \dot{q}, \ddot{q}_*)$. Поэтому из утверждения 2 следует утверждение 1.

Если $\ddot{q}_*$ удовлетворяет системе (3.2), то эквивалентность утверждений 1 и 2 следует из способа доопределения правых частей (3.2) и наличия соотношений (3.3), (3.6) для $s \in N(\dot{q}) \setminus N_0(t, q, \dot{q}, \ddot{q}_*)$ (соответственно $\ddot{q}_*^s = 0$ для $s \in N_0(t, q, \dot{q}, \ddot{q}_*)$).

Если $\ddot{q}_*$ удовлетворяет системе уравнений (1.3), (2.5) и выполняется условие (3.1), то, как следует из лемм 1 и 2, неравенство

$$|Q_s^{T0}(t, q, \dot{q}, \ddot{q}_*)| > f_s^0(t, q)|N_s(t, q, \dot{q}, \ddot{q}_*^1, \ldots, \ddot{q}_*^{s-1}, 0, \ddot{q}_*^{s+1}, \ldots, \ddot{q}_*^k)|$$

эквивалентно условиям

$$\ddot{q}_*^s \neq 0, \ \operatorname{sgn}\ddot{q}_*^s = -\operatorname{sgn}Q_s^{T0}(t, q, \dot{q}, \ddot{q}_*), \ (s \in N(\dot{q}))$$

Лемма 1 показывает важность уравнений (3.2). Будем называть их уравнениями динамики механических систем с трением скольжения.

4. Существование классических решений. Введем следующее определение: точка $(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \in \Omega \times R^k$ называется особой, если существует индекс $s \in (1, \ldots, k_*)$, такой, что $\dot{q}^s = 0$ и

$$|Q_s^{T0}(t, q, \dot{q}, \ddot{q})| = f_s(t, q^s, 0)|N_s(t, q, \dot{q}, \ddot{q})|$$

Пусть $(t_0, q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0)$ – решение системы (1.3), в правой части которой отсутствуют силы трения. Предположим, что в окрестности этой точки при любых достаточно малых f_s, s = 1, ..., k_* нет особых точек. Тогда уравнения (3.2) сохраняют свою структуру для точек $(t, q, \dot{q}, \ddot{q})$ из окрестности $(t_0, q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0)$ при малых f_s. Если при этом $|N_s(t, q, \dot{q}, \ddot{q})| \neq 0$, то, воспользовавшись теоремой о неявной функции, можно показать, что система уравнений (3.2) разрешима относительно $\ddot{q}$ при некоторых малых значениях f_s.

Для дальнейшего исследования уравнений (3.2) понадобится ряд обозначений.

Пусть $\beta \subset \{1, \ldots k_*\}$ – некоторый набор индексов. Через $A(\beta)$ обозначим ([10], с. 30) главную подматрицу матрицы A, т.е. матрицу, полученную из A выбрасыванием из нее строк и столбцов с номерами, принадлежащими β.

Для каждого s = 1, ..., k положим

$$\Delta_s = \begin{cases} -\operatorname{sgn}Q_s^{T0}(t, q, \dot{q}, \ddot{q}), & s \in N \setminus N_0 \\ \operatorname{sgn}\dot{q}^s, & s \in (1, \ldots, k_*) \setminus N \\ 0, & s \in (k_* + 1, \ldots, k) \cup N_0 \end{cases}$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \subset (1, \ldots, k_*)$ – мультииндекс. Примем следующие обозначения: $f_\alpha \stackrel{\Delta}{=} f_{\alpha_1} \ldots f_{\alpha_m}$, $\delta_\alpha \stackrel{\Delta}{=} \Delta_{\alpha_1} \ldots \Delta_{\alpha_m}$, $a_\alpha \stackrel{\Delta}{=} \{a_{\alpha_1} \ldots a_{\alpha_m}\}$, где a_{α_ϑ} – строки матрицы A; $\partial|N_\alpha| / \partial\ddot{q} \stackrel{\Delta}{=} \{\partial|N_{\alpha_1}| / \partial\ddot{q}, \ldots, \partial|N_{\alpha_m}| / \partial\ddot{q}\}$, где $\partial|N_{\alpha_\nu}| / \partial\ddot{q}$ – градиенты функций $|N_{\alpha_\nu}|$ относительно вектора $\ddot{q}$, $\left[\sigma^{a_\alpha}_{\partial|N_\alpha|/\partial\ddot{q}} A\right]$ – матрица, полученная из A после замены в ней строк a_α на $\partial|N_\alpha| / \partial\ddot{q}$.

Теперь можно установить формулу

$$\det\left[a_{s\nu}(t,q)-f_s(t,q^s,\dot q^s)\frac{\partial|N_s|}{\partial\ddot q^\nu}\Delta_s\right]_1^k(N_0)=\det A(t,q)(N_0)+ \tag{4.1}$$

$$+\sum_{m=1}^{k_*}\sum_{\alpha\in C_{k_*}^m}\det\left[\sigma^{a_\alpha}_{\partial|N_\alpha|/\partial\ddot q}A(t,q)\right](N_0)f_\alpha\delta_\alpha$$

где $C_{k_*}^m$ – множество всех сочетаний элементов из $\{1, ..., k_*\}$ по m. Так как главная подматрица положительно определенной матрицы сама положительно определена ([10], с. 472), то определитель, стоящий в левой части (4.1), будет отличен от нуля, если

$$\sum_{m=1}^{k_*}\sum_{\alpha\in C_{k_*}^m}\left|\det\left[\sigma^{a_\alpha}_{\partial|N_\alpha|/\partial\ddot q}A(t,q)\right](N_0)\right||f_\alpha|\delta_\alpha|<\det A(t,q)(N_0) \tag{4.2}$$

Неравенство (4.2) всегда будет выполняться для достаточно малых f_s.

Предположим, что функции Q_s^A, Q_s^*, f_s, $|N_s|$ непрерывны по совокупности своих аргументов, а матрица $F(t,q)$ и функции a_{si}, g_i удовлетворяют предположениям из разд. 1.

Теорема. Пусть в некоторой неособой точке $(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)$: $|N_s(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)|\neq 0$ уравнения (3.2) разрешены относительно $\ddot q_0$ и в ней выполняется неравенство (4.2) для множеств индексов $N(\dot q_0)$, $N_0(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)$. Тогда существует классическое решение $q(t)$ задачи Коши (3.2), $q(t_0)=q_0$, $\dot q(t_0)=\dot q_0$, определенное на некотором промежутке $[t_0, t_0+\delta)$ (при $t=t_0$ уравнениям (3.2) удовлетворяет правая производная $D^+\dot q(t)$). Если при этом выполняется условие (3.1), то существует локальное классическое решение (выходящее из этой точки) уравнений движения (1.3) механической системы с трением скольжения (2.5).

Доказательство. Выберем окрестность $S_0\subset\Omega\times R^k$ точки $(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)$ так, чтобы для всех $(t, q, \dot q, \ddot q)\in S_0$ выполнялись следующие условия:

$\dot q^s$ сохраняют знак $\dot q_0^s\neq 0$ для любых $s\in(1, ..., k_*)\setminus N(\dot q_0)$, $Q_s^{T0}(t, q, \dot q, \ddot q)$ для сохраняют знак $Q_s^{T0}(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)$ $s\in N(\dot q_0)\setminus N(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)$, $|Q_s^{T0}(t, q, \dot q, \ddot q)|>f_s^0(t,q^s)|N_s(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)|$ для $s\in N(\dot q_0)\setminus N(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)$, $Q_s^{T0}(t, q, \dot q, \ddot q)|<f_s^0(t,q^s)$ $|N_s(t, q, \dot q, \ddot q)|$ для $s\in N_0(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)$.

Структура правой части (3.2), порожденная точкой $(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)$, зафиксирована на S_0. Это возможно в силу предположений непрерывности рассматриваемых функций и неособенности точки $(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)$.

В первой группе уравнений (3.2) (т.е. для $s\in N_0$) получается $\ddot q^s=0$. Рассмотрим остальные уравнения (3.2) как систему функциональных уравнений, определяющих неявные функции

$$\ddot q^s=G^s(t,q,\dot q),\quad s\in(1,\dots,k)\setminus N_0 \tag{4.3}$$

По теореме о неявной функции в силу (4.2) и других предположений функции G^s в (4.3) существуют, определены однозначно и непрерывны в некоторой окрестности $\Omega_0\subset\Omega$ точки $(t_0,q_0, \dot q_0)$.

Рассмотрим систему уравнений (4.3), добавив к ней уравнения $\ddot q^s=G^s(t, q, \dot q)\equiv 0$, $s\in N_0$ с начальными условиями $q(t_0)=q_0$, $\dot q(t_0)=\dot q_0$ В соответствии с теоремой Пеано существует классическое решение $q(t)$ этой задачи Коши, определенное на некотором интервале $(t_0 - \tau, t_0 + \delta)$.

Осталось проверить, что на промежутке $[t_0, t_0 + \delta]$ функция $q(t)$ удовлетворяет системе уравнений (3.2). Для первой группы уравнений это известно, для третьей и четвертой групп уравнений (3.2) это очевидно.

Для второй группы в силу леммы 2 $\operatorname{sgn}\ddot{q}^s(t_0) = -\operatorname{sgn}Q_s^{T0}(t_0, q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0)$, $s \in N\backslash N_0$. Следовательно, $\dot{q}^s(t) \neq 0$, $\operatorname{sgn}\dot{q}^s(t) = -\operatorname{sgn}Q_s^{T0}(t_0, q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0)$, для $t \in (t_0, t_0 + \delta)$, $s \in N\backslash N_0$. Вторая группа уравнений (3.2), определяющая неявную функцию G, вдоль решения $q(t)$ переходит в третью группу уравнений (3.2) при $t \in (t_0, t_0 + \delta)$. Тем самым доказано, что $q(t)$ – решение системы уравнений (3.1) с непрерывной на $(t_0, t_0 + \delta)$ второй производной $\ddot{q}(t)$, а поскольку $\ddot{q}(t_0) = G(t_0, q_0, \dot{q}_0) = D^+\dot{q}(t_0)$, то $D^+\dot{q}(t_0)$, также удовлетворяет (3.1).

Таким образом, доказано существование решения системы уравнений (3.2). Если выполняется условие (3.1), то согласно лемме 1 это решение будет одновременно решением системы уравнений (1.3), (2.5). Теорема доказана.

Замечание. Преимуществом уравнений динамики (3.2) являются более простые условия определения их правых частей (по сравнению с доопределением (2.5) уравнений движения (1.3) в соответствии с правилами классической механики), которые оказываются непрерывными по $\ddot{q} \in R^k$ при любых фиксированных $(t, q, \dot{q}) \in \Omega$. Кроме того, лемма 2 показывает, что вектор обобщенных ускорений $\ddot{q}_*$, рассматриваемый как неявная функция $(t, q, \dot{q})$, определенная из (3.2), обладает важным свойством

$$s \in N(\dot{q}),\ \ddot{q}_*^s \neq 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}\ddot{q}_*^s = -\operatorname{sgn}Q_s^{T0}(t, q, \dot{q}, \ddot{q}_*)$$

которое обеспечивает непрерывность $\ddot{q}_*$ по $(t, q, \dot{q})$ вдоль специальным образом выбранных множеств. Поэтому (имея в виду лемму 1) в дальнейшем будем рассматривать уравнения (3.2) динамики механических систем с трением скольжения.

5. Пример Пэнлеве ([1], см. также [3]). Рассматриваются две тяжелые материальные точки единичной массы, связанные невесомым стержнем длины $r > 0$. Одна из них скользит с трением по неподвижной горизонтальной прямой Ox (ее координата x, реакция оси (N_1, F_1^T)), другая движется без внешнего сопротивления в вертикальной плоскости Oxy под действием силы тяжести g (и реакции стержня). Ось Oy направлена вниз, θ – угол отклонения стержня от положительного направления Ox по часовой стрелке. Уравнения движения системы в форме Лагранжа записываются в виде

$$\begin{aligned} &2\ddot{x} - r\sin\theta\ddot{\theta} = r\dot{\theta}^2\cos\theta + Q_1^T \\ &-r\sin\theta\ddot{x} + r^2\ddot{\theta} = rg\cos\theta \end{aligned} \tag{5.1}$$

Обобщенные силы нормальной реакции и трения покоя таковы:

$$|N_1(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})| = |r(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) - 2g|$$

$$Q_1^{T0}(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) = -r\sin\theta\ddot{\theta} - r\dot{\theta}^2\cos\theta$$

Согласно законам Кулона для силы сухого трения в движении при $\dot{x} \neq 0$

$$Q_1^T(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) = -f|N_1(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})|\, sgn\dot{x} \tag{5.2}$$

где $f > 0$ – коэффициент трения в движении. Уравнения движения приводятся к виду

$$\left\|\begin{matrix}\ddot{x}\\ \ddot{\theta}\end{matrix}\right\| = A^{-1}(\theta)\left\|\begin{matrix} r\dot{\theta}^2\cos\theta - f|r(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) - 2g|\operatorname{sgn}\dot{x} \\ rg\cos\theta \end{matrix}\right\| \tag{5.3}$$

При достаточно малом $f > 0$ они разрешимы относительно $\ddot{x}, \ddot{\theta}$:

$$\ddot{x} = G_1(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}, f), \quad \ddot{\theta} = G_2(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}, f) \tag{5.4}$$

и правые части G_1, G_2 непрерывны по $\theta, \dot{x}, \dot{\theta}, f$. Для любых $t_0, x_0, \theta_0, \dot{x}_0 \neq 0, \dot{\theta}_0$ существует локальное классическое решение уравнений (5.4), а значит, и уравнений (5.1), (5.2). Достаточным условием разрешимости уравнений (5.3) относительно $\ddot{x}, \ddot{\theta}$ будет

$$f < (1 + \cos^2\theta) / |\sin\theta\cos\theta| \tag{5.5}$$

Пусть теперь в некоторые моменты $t > t_0$ может выполняться равенство $\dot{x}(t) = 0$. В соответствии с законом Кулона условиями равновесия точки на прямой Ox будут

$$\ddot{\theta} = gr^{-1}\cos\theta, \quad \ddot{x} = 0, \quad |Q_1^{T0}(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})| \leq f|N_1(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})|$$

Если $|Q_1^{T0}(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})| > f|N_1(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})|$, то условия равновесия нарушаются и $Q_1^T = -f|N_1|\operatorname{sgn}\ddot{x}$. Учитывая, что при $\dot{x}(t) = 0$ будет $\operatorname{sgn}\ddot{x} = -\operatorname{sgn}Q_1^{T0}$, получаем

$$Q_1^T(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) = \begin{cases} Q_1^{T0}(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}), \text{ если } \dot{x} = 0 \text{ и} \\ \qquad |Q_1^{T0}(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})| \leq f|N_1(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})| \\ -f|N_1(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})|\operatorname{sgn}Q_1^{T0}(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}), \text{ если } \ddot{x} = 0 \text{ и} \\ \qquad |Q_1^{T0}(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})| > f|N_1(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})| \\ -f|N_1(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})|\operatorname{sgn}\dot{x}, \text{ если } \dot{x} \neq 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

Множества

$$N = \begin{cases} \{1\}, \text{ если } \dot{x} = 0 \\ \emptyset, \text{ если } \dot{x} \neq 0 \end{cases}$$

$$N_0 = \begin{cases} \{1\}, \text{ если } \dot{x} = 0, |Q_1^{T0}| \leq f|N_1| \\ \emptyset, \text{ если } (\dot{x} \neq 0) \vee (\dot{x} = 0, |Q_1^{T0}| > f|N_1|) \end{cases}$$

В рассматриваемые неравенства не входит $\ddot{x}$. Поэтому уравнения динамики (типа (3.2)) рассматриваемой системы совпадают с уравнениями движения (5.1) с доопределением (5.6). Условие (3.1) удовлетворяется, так как $\partial|N_1|/\partial\ddot{x} = 0$.

Рассмотрим формулу (4.2) применительно к уравнениям (5.1). Здесь

$k_* = 1, m = 1, \Delta_2 = 0$

$$\Delta_1 = \begin{cases} -\operatorname{sgn}Q_1^{T0}, & \dot{x} = 0, N_0 = \emptyset \\ \operatorname{sgn}\dot{x}, & \dot{x} \neq 0 \\ 0 & N_0 = \{1\} \end{cases}$$

$$\det A(t,q)(N_0) = \det A(\theta)(N_0) = \begin{Bmatrix} r^2(1+\cos^2\theta), & N = \emptyset \\ r^2, & N_0 = \{1\} \end{Bmatrix}$$

$$\sum_{m=1}^{k_*} \sum_{\alpha \in C_{k_*}^m} \det\left[\sigma_{\partial|N_\alpha|/\partial\ddot{q}}^{a_\alpha} A(t,q)\right](N_0)|f_\alpha|\delta_\alpha| =$$

$$= \left|\det\begin{Vmatrix} 0, & \partial|N_1|/\partial\ddot{\theta} \\ -r\sin\theta, & r^2 \end{Vmatrix}(N_0)\right| f|\Delta_1| = \begin{cases} 0, & \text{если } N_0 = \{1\} \\ r^2 f|\cos\theta\sin\theta|, & \text{если } N_0 = \emptyset \end{cases}$$

Формула (4.2) имеет вид

$r^2 > 0$, если $N_0 = \{1\}$:

$1 + \cos^2\theta > f|\sin\theta\cos\theta|$, если $N_0 = \emptyset$

Первое из полученных неравенств, очевидно, выполняется, а второе совпадает с (5.5) и дает достаточное условие существования локального классического решения задачи (5.1) для каждой неособой начальной точки $(x_0, \theta_0, \dot{x}_0, \dot{\theta}_0, \ddot{x}_0, \ddot{\theta}_0)$, удовлетворяющей (5.1) и такой, что $\ddot{\theta}_0 \cos\theta_0 \neq \dot{\theta}_0^2 \sin\theta_0 + 2g / r$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16295).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Painleve P.* Lecons sur le frottement. Pariis: Hermann. 1895. 111 p. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
2. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 1. М.: Физматгиз, 1960. 515 с.
3. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
4. *Четаев Н.Г.* О некоторых связях с трением // ПММ. 1960 Т. 24. Вып. 1. С. 35–38.
5. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
6. *Румянцев В.В.* О системах с трением // ПММ, 1961. Т, 25. Вып. 6. С. 969–977.
7. *Пожарицкий Г.К.* Распространение принципа Гаусса на системы с сухим трением // ПММ. 1961. Т.25. Вып. 3. С. 391–406.
8. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
9. *Матросов В.М.* О теории дифференциальных уравнений и неравенств с разрывными правыми частями // Годишник Висш. учебн. завед. Приложен. мат., София, 1982. Т. 17. № 4. С. 6–35.
10 .*Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.

Москва, Иркутск

Поступила в редакцию
1.XII.1993