УДК 531.36:62–50

© 1994 г. Г.Н. Мильштейн, О.Э. Соловьева

ПОСТРОЕНИЕ ФИЛЬТРОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

Методом невязки (см., например, [1–3]) решается задача оценивания с помехами как в объекте, так и в наблюдениях; рассматривается задача о восстановлении входного воздействия [3–5]. Решение этих задач оценивания сводится к минимизации функционала, что приводит для каждого текущего момента времени к краевой задаче. В зависимости от способа рекуррентного решения возникающего при этом семейства краевых задач получаются различные представления оптимальных нелинейных фильтров для оцениваемых величин. Выбор того или иного представления связан с обусловленностью объекта, с помощью которого конструируется фильтр. Построен локально-оптимальный фильтр, близкий по своей реализации к фильтрам в линейных задачах.

Метод невязки использовался [6] для оценивания состояний и параметров систем с помехами в наблюдениях.

1. Описание состояния и входного воздействия. Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$X' \doteq f(s, X, \upsilon) \tag{1.1}$$

с наблюдениями

$$y(s) \doteq \varphi(s, X(s), \upsilon(s)), \quad t_0 \leqslant s \leqslant t \tag{1.2}$$

Штрих означает производную по s, X, y – векторы-столбцы соответственно с n- и m-компонентами; уравнения движения зависят от входного воздействия $\upsilon = \upsilon(s)$ размерности k; приближенные равенства в (1.1) и (1.2) свидетельствуют о наличии неизвестных помех в объекте и в наблюдениях. Требуется по наблюдениям на промежутке $[t_0, t]$ наряду с оценкой состояния $X(s)$ оценить входное воздействие $\upsilon(s)$, $t_0 \leqslant s \leqslant t$.

Предполагается, что функции $f(s, x, \upsilon)$, $\varphi(s, x, \upsilon)$, а также функции, возникающие в дальнейшем, таковы, что допустимы все последующие действия, использующие продолжимость по времени решений систем дифференциальных уравнений и дифференцируемость этих решений по начальным данным и параметрам. Эти требования обеспечиваются, например, известными условиями гладкости f и φ и ограниченности роста f.

Введем систему с управлением $u = (\upsilon, w)$

$$X' = f(s, X, \upsilon) + D(s)w \tag{1.3}$$

и функционал вдоль решений системы (1.3)

$$J = \frac{1}{2}(X(t_0) - \bar{x})^T P(X(t_0) - \bar{x}) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} [(y(s) - \varphi(s, X, \upsilon(s)))^T Q(s)(y(s) - \varphi(s, X(s), \upsilon(s)) +$$
$$+(\upsilon(s) - \bar{\upsilon}(s))^T S(s)(\upsilon(s) - \bar{\upsilon}(s)) + w^T(s)R(s)w(s)]ds \tag{1.4}$$

В (1.3), (1.4) w – вектор-столбец с r-компонентами; D – $(n \times r)$-матрица; $(n \times n)$-матрица P и $(r \times r)$-матрица R и $(k \times k)$-матрица S – положительно определенные; $(m \times m)$-матрица Q – неотрицательно определенная; $\bar{x}$ – известный вектор. Функция $\bar{\upsilon}(s)$, подобно тому как $\bar{x}$ для состояния $X(t_0)$, является априорной оценкой для входного воздействия $\upsilon(s)$. Выбор матриц D, Q, R связан с имеющейся информацией о структуре и интенсивности помех, P и S с априорной информацией о начальных данных и входном воздействии.

Оценку состояния $X(s)$, $t_0 \leq s \leq t$ по наблюдениям на промежутке $[t_0, t]$ обозначим $\hat{x}_{s/t}$ ($\hat{x}_{s/t}$ обозначим $\hat{x}_t$). Будем ее искать в качестве оптимальной траектории в задаче минимизации функционала (1.4) вдоль решений системы (1.3).

Отметим, что содержательный смысл управлений υ и w различен: если оптимальное управление w обеспечивает минимизацию невязки в системе (1.1) (в частности, когда равенства (1.1) выполняются точно, полагаем D, R и w нулевыми), то оптимальное управление υ служит оценкой для искомого входного воздействия.

2. Рекуррентное решение оптимальных задач. Рассмотрим достаточно общую для круга исследуемых здесь проблем задачу оптимального управления

$$X' = f(s, X, u) \tag{2.1}$$

$$J = \frac{1}{2}(X(t_0) - \bar{x})^T P(X(t_0) - \bar{x}) + \int_{t_0}^{t} f_0(s, X(s), u(s))ds \to \min \tag{2.2}$$

Минимум в (2.2) берется по определенному классу допустимых управлений. Предположим, что функции $f(s, x, u)$ и $f_0(s, x, u)$ и ограничения на u таковы, что управление, найденное из условия максимума функции Понтрягина:

$$h(s, x, p, u) = p^T f(s, x, u) - f_0(s, x, u) \to \max$$

представимо в виде достаточно гладкой функции

$$u = u(s, x, p) \tag{2.3}$$

Суперпозиция $h(s, x, p, u)$ функции Понтрягина с (2.3) дает функцию Гамильтона задачи (2.1), (2.2), которую обозначим $H(s, x, p)$. Необходимые условия оптимальности в задаче (2.1), (2.2) выразятся в виде краевой задачи

$$X' = f(s, X, u(s, X, p)) = H_p(s, X, p) \tag{2.4}$$

$$p' = -f_x^T(s, X, u(s, X, p))p + f_{0_x}(s, X, u(s, X, p)) = -H_x(s, X, p)$$

$$p(t_0) = P(X(t_0) - \bar{x}), \quad p(t) = 0 \tag{2.5}$$

В (2.4) и далее употребляются следующие обозначения. Пусть $y(x)$ – некоторая скалярная функция, а $z(x) = (z_1(x), \dots, z_2(x))$ – вектор-функция, зависящие от k переменных $x = (x_1, \dots, x_k)$. Тогда y_x – вектор-столбец (градиент) с компонентами $\partial y/\partial x_j$, $j = \overline{1,k}$, z_x – $(l \times k)$-матрица (якобиан) с элементами $\partial z_i/\partial x_j$, $j = \overline{1,k}$, $i = \overline{1,l}$ в i-й строке, j-м столбце.

В предположении существования решения оптимальной задачи (2.1), (2.2) (в связи с задачей оценивания будем по-прежнему обозначать его $\hat{x}_{s/t}$, $t_0 \leq s \leq t$, и называть оценкой) и единственности решения краевой задачи (2.4), (2.5) оценка найдется в качестве компоненты X решения этой краевой задачи.

С изменением t на некотором промежутке $[t_0, t_0 + T]$ для отыскания $\hat{x}_{s/t}$ (даже при фиксированном s) потребуется решение новых краевых задач для каждого t. Этого можно избежать с помощью рекуррентного решения возникающего семейства краевых задач (2.7), что приводит к построению фильтра, например для $\hat{x}_{t_0/t}$ или для $\hat{x}_t$.

В следующей теореме дается рекуррентный по времени t способ отыскания оценки $\hat{x}_{t_0/t}$, являющейся левым концом оптимальной траектории в задаче (2.1), (2.2) (и вместе с тем левым концом $X(s)$ в краевой задаче (2.4), (2.5)).

Пусть $X(s; x)$, $p(s; x)$ – решение задачи Коши для системы (2.4) с начальными данными

$$X(t_0) = x, \quad p(t_0) = P(x - \bar{x}) \tag{2.6}$$

В теореме 1 фигурирует условие невырожденности матрицы $p_x(t; x)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$. Отметим, что благодаря обратимости $p_x(t_0; x) = P$, матрица $p_x(t; x)$ обратима для всех t, достаточно близких t_0.

Теорема 1. Пусть при $t \in [t_0, t_0 + T]$ существует матрица $p_x^{-1}(t; x)$. Тогда оценка $\hat{x}_{t_0/t}$ удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{d\hat{x}_{t_0/t}}{dt} = -p_x^{-1}(t;\hat{x}_{t_0/t})f_{0_x}(t, X(t;\hat{x}_{t_0/t}), u(t, X(t;\hat{x}_{t_0/t}, 0)), \quad \hat{x}_{t_0/t_0} = \bar{x} \tag{2.7}$$

где $X(s; x)$ (вместе с $p(s; x)$) находится в качестве решения задачи Коши (2.4), (2.6); $p_x(s; x)$ (вместе $X_x(s; x)$) – из задачи Коши для системы в вариациях

$$\begin{aligned} X_x' &= H_{px}(s, X(s;x), p(s;x))X_x + H_{pp}(s, X(s;x), p(s;x))p_x \\ p_x' &= -H_{xx}(s, X(s;x), p(s;x))X_x - H_{xp}(s, X(s;x), p(s;x))p_x \\ X_x(t_0;x) &= I_{n\times n}, \quad p_x(t_0;x) = P \end{aligned} \tag{2.8}$$

Доказательство теоремы получается путем дифференцирования по t тождества

$$p(t;\hat{x}_{t_0/t}) \overset{t}{\equiv} 0$$

и очевидного равенства при $t = t_0$: $X(t_0) = \hat{x}_{t_0/t_0} = \bar{x}$.

Системы (2.4), (2.6), (2.8) используются для вычисления правой части (2.7) при реализации того или иного численного метода.

Поясним сказанное на методе Эйлера. Пусть $x^{(k)}$ – приближение для $\hat{x}_{t_0/t_k}$. Тогда $x^{(k+1)}$ находится следующим образом. На промежутке $[t_0, t_k]$ решаются системы (2.4), (2.8) с начальными данными

$$X(t_0)x^{(k)}, \quad p(t_0 = P(x^{(k)} - \bar{x}), \quad X_x(t_0) = I, \quad p_x(t_0) = P$$

В результате находятся $X(t_k; x^{(k)})$, $p_x(t_k; x^{(k)})$ и, наконец,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta t[-p_x^{-1}(t_k;x^{(k)})f_{0_x}(t_k, X(t_k;x^{(k)}), u(t_k, X(t_k;x^{(k)}), 0))]$$

Таким образом, для интегрирования системы (2.7) требуется многократное интегрирование указанных систем на удлиняющихся промежутках времени $[t_0, t_k]$.

Понятно, что после отыскания $\hat{x}_{t_0/t}$ оптимальная траектория $\hat{x}_{s/t}$ задачи (2.1), (2.2) найдется в качестве части решения $X(s;\hat{x}_{t_0/t})$ системы (2.4), а оптимальное управление $\hat{u}_{s/t}$ найдется с помощью соотношения (2.3):

$$\hat{u}_{s/t} = u(s, X(s;\hat{x}_{t_0/t}), p(s;\hat{x}_{t_0/t})) = u(s, \hat{x}_{s/t}, \hat{p}_{s/t})$$

Обратимся теперь к уравнению для $\hat{x}_t = \hat{x}_{t/t}$ (будем называть его уравнением фильтра).

Теорема 2. Уравнение фильтра для $\hat{x}_t$ имеет вид

$$d\hat{x}_t / dt = f(t, \hat{x}_t, u(t, \hat{x}_t, 0)) - K(t; \hat{x}_{t_0/t}) f_{0_x}(t, \hat{x}_t, u(t, \hat{x}_t, 0)), \quad \hat{x}_{t_0} = \bar{x} \tag{2.9}$$

где $K(s; x)$ находится в качестве решения задачи Коши

$$K' = KH_{xx}(s, X(s; x), p(s; x))K + KH_{xp}(s, X(s; x), p(s; x)) +$$
$$+ H_{px}(s, X(s; x), p(s; x))K + H_{pp}(s, X(s; x), p(s; x)) \tag{2.10}$$
$$K(t_0) = P^1$$

Доказательство. Уравнение (2.9) с $K(s; x) = X_x(s; x)p_x^{-1}(s; x)$ выводится из тождества $\hat{x}_t = X(t; \hat{x}_{t_0/t})$ с использованием (2.7). Уравнение (2.10) получается путем дифференцирования соотношения $K = X_x p_x^{-1}$.

Уравнение (2.9) благодаря (2.10) приводит к несколько более экономичному алгоритму оценивания по сравнению с (2.7), (2.4), (2.6), (2.8). Именно, зная $\hat{x}_t$ и $K(t; \hat{x}_{t_0/t})$, найдем, например, по методу Эйлера $\hat{x}_{t+\Delta t}$ из (2.9). Затем проинтегрируем (2.4) в обратном направлении с начальными данными $X(t + \Delta t) = \hat{x}_{t+\Delta t}$, $p(t + \Delta t) = 0$. Полученное решение $X(s)$ при $s = t_0$ дает $\hat{x}_{t_0/t+\Delta t}$. Теперь можно проинтегрировать (2.10) при $x = \hat{x}_{t_0/t+\Delta t}$ на промежутке $[t_0, t + \Delta t]$ и получить $K(t + \Delta t;\ \hat{x}_{t_0/t+\Delta t})$, что вместе с уже известным $\hat{x}_{t+\Delta t}$ позволит осуществить следующий шаг численного интегрирования фильтра (2.9).

Обратимся к решению задачи из разд. 1. Задача (1.3), (1.4) входит в класс задач (2.1), (2.2) и поэтому для ее решения можно воспользоваться результатами, полученными в данном разделе. Пусть из условия максимума $\upsilon = \upsilon(s, x, p)$, $w = w(s, x, p)$. Выписав соответствующие системы для X, p, можно затем воспользоваться либо уравнением (2.7) для $\hat{x}_{t_0/t}$ (и тогда понадобятся системы для X_x и p_x), либо уравнениями (2.9) для $\hat{x}_t$ и (2.10) для $K(t; \hat{x}_{t_0/t})$. Получив, например, $\hat{x}_t$, найдем $\hat{x}_{s/t}$, $\hat{p}_{s/t}$, $t_0 \leqslant s \leqslant t$ в качестве решения задачи Коши для системы вида (2.4) с начальными данными на правом конце промежутка $[t_0, t]$: $X(t) = \hat{x}_t$, $p(t) = 0$. Это решение дает как оптимальную оценку $\hat{x}_{s/t}$ состояния $X(s)$, так и оптимальную оценку входного воздействия $\upsilon(s)$

$$\hat{\upsilon}_{s/t} = \upsilon(s, \hat{x}_{s/t}, \hat{p}_{s/t}), \quad t_0 \leqslant s \leqslant t \tag{2.11}$$

по наблюдениям на промежутке $[t_0, t]$.

Приведем уравнения фильтра для оценивания состояния системы в задаче

$$X' \doteq f(s, X), \quad y(s) \doteq C(s)X(s) \tag{2.12}$$

где в отличие от (1.1), (1.2) функции f и φ не зависят от υ и наблюдения для простоты полагаются линейными. В этом случае в соответствующей задаче оптимального управления (1.3), (1.4) в качестве искомого управления остается лишь вектор w. Из условия максимума имеем $w = R^{-1}(s)D^T(s)p$, и необходимые условия выписываются в виде следующей краевой задачи:

$$X' = f(s, X) + D(s)R^{-1}(s)D^T(s)p \tag{2.13}$$

$$p' = -f_x^T(s, X)p - C^T(s)Q(s)(y(s) - C(s)X)$$

$$p(t_0) = P(X(t_0) - \bar{x}), \quad p(t) = 0 \tag{2.14}$$

Выпишем также для этой задачи уравнения фильтра (2.9), (2.10):

$$\frac{dx_t^\wedge}{dt} = f(t,x_t^\wedge) - K(t;x_{t_0/t}^\wedge)C^T(t)Q(t)(y(t)-C(t)x_t^\wedge), \quad x_{t_0}^\wedge = \bar{x} \tag{2.15}$$

$$K' = -K\left[C^T(s)Q(s)C(s) - \left\{\frac{\partial f_x^T}{\partial x_j}(s,X(s;x))p(s;x)\right\}\right]K +$$

$$+f_x(s,X(s;x))K + Kf_x^T(s,X(s;x)) + D(s)R^{-1}(s)D^T(s) \tag{2.16}$$

$$K(t_0;x) = P^{-1}$$

В (2.16) в фигурных скобках – $(n \times n)$-матрица со столбцами $(\partial f_x^T/\partial x_j)p,\ j = \overline{1,n}$.

Когда в исходном объекте помехи отсутствуют [6], приведенный фильтр (2.15), (2.16) упрощается: первое уравнение в (2.13) не зависит от p, а в (2.16) нет последнего слагаемого.

В линейном случае $X_x(s;x)$, $p_x(s;x)$, $K(s;x)$ не зависят от x. Благодаря этому все алгоритмы существенно упрощаются и полученные уравнения (2.9), (2.10) совпадают с детерминированным вариантом фильтра Калмана–Бьюси.

Рассмотрим подробнее задачу о рекуррентном восстановлении входного воздействия в линейной системе

$$X' \doteq A(s)X + B(s)\upsilon(s) \tag{2.17}$$

$$y(s) \doteq C(s)X(s) + G(s)\upsilon(s), \quad t_0 \leqslant s \leqslant t \tag{2.18}$$

Задачу оценивания состояния X и входного воздействия υ свяжем с задачей минимизации функционала (1.4) (с заменой $\varphi(s, X, \upsilon)$ на $C(s)X(s) + G(s)\upsilon(s)$) вдоль траекторий системы

$$X' \doteq A(s)X + B(s)\upsilon + D(s)w \tag{2.19}$$

В случае, когда при отсутствии органичений на υ равенство в (2.17) точное, такая задача при $D(s) = 0$, $R(s) = 0$ и фиксированном t рассматривалась ранее [8].

Задача (2.19), (1.4) может, например, возникнуть в случае линеаризации системы (1.1) в окрестности "номинальных" значений $X(t_0) = \bar{x}$, $\upsilon(s) \doteq \bar{\upsilon}(s)$. Система относительно приращений ΔX, $\Delta\upsilon$, которые, не боясь путаницы, обозначим X, υ, приобретает вид (2.17), (2.18), а значения $\bar{x}$, $\bar{\upsilon}$ в функционале (1.4) будут нулевыми. Отметим, что даже когда в исходной системе (1.1) не содержится помех (равенство (1.1) точное), в системе линейного приближения (2.17) равенство уже будет неточным.

Выведем уравнения фильтра для рассматриваемой задачи (2.19), (1.4). Из условия максимума получим равенства

$$\upsilon = F^{-1}(s)(S(s)\bar{\upsilon}(s) + B^T(s)p + G^T(s)Q(s)(y(s) - C(s)x)) \tag{2.20}$$

$$w = R^{-1}(s)D^T(s)p, \quad F = S + G^TQG$$

С учетом этих соотношений находим уравнения фильтра

$$dx_t^\wedge / dt = A(t)x_t^\wedge + B(t)\upsilon_t^\wedge + KC^T(t)Q(t)[y(t) - C(t)x_t^\wedge - G(t)\upsilon_t^\wedge], \quad x_{t_0}^\wedge = \bar{x}$$

$$\upsilon_t^\wedge = F^{-1}(t)(S(t)\bar{\upsilon}(t) + G^T(t)Q(t)(y(t) - C(t)x_t^\wedge))$$

$$dK / dt = -KC^T(Q - QGF^{-1}G^TQ)CK + (A - BF^{-1}G^TQC)K +$$

$$+K(A^T - C^TQGF^{-1}B^T) + BF^{-1}B^T + DR^{-1}D^T, \quad K(t_0) = P^{-1}$$

Для отыскания оценки $\hat{x}_{s/t}$, $t_0 \leqslant s \leqslant t$ (одновременно будет найдено и $\hat{p}_{s/t}$) следует решить в обратном направлении систему

$$X' = A(s)X + B(s)\upsilon(s, X, p) + D(s)R^{-1}(s)D^T(s)p, \quad X(t) = x_t^1$$
$$p' = -A^T(s)p - C^T(s)Q(s)(y(s) - C(s)X - G(s)\upsilon(s, X, p)), \quad p(t) = 0$$

где вместо υ подставлена функция из (2.20). Оценка входного воздействия $\upsilon^{\wedge}_{s/t}$ согласно (2.11) и (2.20) найдется с помощью соотношения

$$\upsilon^{\wedge}_{s/t} = F^{-1}(s)(S(s)\overline{\upsilon}(s) + B^T(s)p^{\wedge}_{s/t} + G^T(s)Q(s)(y(s) - C(s)x^{\wedge}_{s/t}))$$

Замечание 1. В качестве терминального члена в (2.2) можно взять строго выпуклую по $X(t_0)$ нелинейную функцию.

Замечание 2. Был рассмотрен [6] случай, отвечающий отсутствию априорной информации о начальных данных (т.е. $P = 0$), а также случай, когда часть компонент начального вектора известна точно. Для этих задач возможны соответствующие обобщения.

3. Локально-оптимальный фильтр. Как уже отмечалось, реализация фильтра (2.9), (2.10) для нелинейных систем связана с многократными пересчетами. Локально-оптимальное оценивание позволяет их избежать. Суть такого оценивания состоит в последовательном решении локальных оптимальных задач, когда оценка на промежутке $[t, t + \Delta t]$ формируется на основе минимизации функционала

$$\frac{1}{2}(X(t) - x_t^{\vee})^T P(t)(X(t) - x_t^{\vee}) + \int\limits_t^{t+\Delta t} f_0(s, X(s), u(s))ds \tag{3.1}$$

где $x_t^{\vee}$ – оценка (для новой оценки вводится обозначение $x_t^{\vee}$), полученная к моменту t, а $P(t)$ – специальным образом формируемая положительно определенная матрица, $P(t_0) = P$.

Выведем уравнение для $x_t^{\vee}$ и $L(t) = P^{-1}(t)$. Пусть $t_{k+1} = t_k + \Delta t$; $x_t^{\vee}, L_k$ – приближенные значения соответственно для $x_{t_k}^{\vee}$, $L(t_k)$ $(k = 0, 1,...)$. Решая задачу минимизации (3.1) на промежутке $[t_0, t_0 + \Delta t]$, найдем, что оптимальная оценка $x_{t_1}^{\vee}$ равна $x_1^{\vee} + O(\Delta t^2)$, где

$$x_{t_0}^{\vee} = x_0^{\vee} = \overline{x}, \quad L(t_0) = L_0 = P^{-1}$$
$$x_1^{\vee} = x_0^{\vee} + [f(t_0, x_0^{\vee}, u(t_0, x_0^{\vee}, 0)) - L_0 f_{0_x}(t_0, x_0^{\vee}, u(t_0, x_0^{\vee}, 0))]\Delta t$$

Для матрицы коэффициентов усиления $K(t_1; x_{t_0/t_1}^{\vee})$ справедливо равенство (см. (2.10))

$$K(t_1; x_{t_0/t_1}^{\vee}) = L_0 + [L_0 H_{xx}(t_0, X(t_0; x_{t_0/t_1}^{\vee}), p(t_0; x_{t_0/t_1}^{\vee}))L_0 +$$
$$+ L_0 H_{xp}(t_0, X(t_0; x_{t_0/t_1}^{\vee}), p(t_0; x_{t_0/t_1}^{\vee})) + H_{px}(t_0, X(t_0; x_{t_0/t_1}^{\vee})$$
$$p(t_0; x_{t_0/t_1}^{\vee}))L_0 + H_{pp}(t_0, X(t_0; x_{t_0/t_1}^{\vee}), p(t_0, x_{t_0/t_1}^{\vee}))]\Delta t + O(\Delta t^2)$$

Поскольку $X(t_0; x_{t_0/t_1}^{\vee}) = x_0^{\vee} + O(\Delta t)$, а $p(t_1; x_{t_0/t_1}^{\vee}) = 0$ и, следовательно, $p(t_0; x_{t_0/t_1}^{\vee}) = O(\Delta t)$, то

$$K(t_1; x_{t_0/t_1}^{\vee}) = L_1 + O(\Delta t^2)$$

где

$$L_1 = L_0 + [L_0 H_{xx}(t_0, x_0^{\vee}, 0)L_0 + H_{px}(t_0, x_0^{\vee}, 0)L_0 +$$
$$+ L_0 H_{xp}(t_0, x_0^{\vee}, 0) + H_{pp}(t_0, x_0^{\vee}, 0)]\Delta t$$

Вычислив $x_1^{\vee}$ и L_1, перейдем к оцениванию на промежутке $[t_1, t_1 + \Delta t]$, взяв в (3.1) в качестве терминального члена выражения $(X(t_1) - x_1^{\vee})^T L_1^{-1}(X(t_1) - x_1^{\vee})$, а интеграл – в пределах от t_1 до $t_1 + \Delta t$. Поступая так дальше, получим последовательность

$$x_{k+1}^{\vee} = x_k^{\vee} + [f(t_k, x_k^{\vee}, u(t_k, x_k^{\vee}, 0)) - L_k f_{0_x}(t_k, x_k^{\vee}, u(t_k, x_k^{\vee}, 0))]\Delta t$$

$$L_{k+1} = L_k + [L_k H_{xx}(t_k, x_k^{\vee}, 0)L_k + L_k H_{xp}(t_k, x_k^{\vee}, 0) +$$

$$+H_{px}(t_k, x_k^{\vee}, 0)L_k + H_{pp}(t_k, x_k^{\vee}, 0)]\Delta t$$

Устремляя Δt к нулю, придем к локально-оптимальному фильтру в виде следующей системы дифференциальных уравнений

$$dx_t^{\vee} / dt = f(t, x_t^{\vee}, u(t, x_t^{\vee}, 0)) - Lf_{0_x}(t, x_t^{\vee}, u(t, x_t^{\vee}, u(t, x_t^{\vee}, 0)), \quad x_{t_0}^{\vee} = \bar{x} \tag{3.2}$$

$$dL / dt = LH_{xx}(t, x_t^{\vee}, 0)L + LH_{xp}(t, x_t^{\vee}, 0) +$$

$$+H_{px}(t, x_t^{\vee}, 0)L + H_{pp}(t, x_t^{\vee}, 0), \quad L(t_0) = P^{-1} \tag{3.3}$$

Покажем, что если функция $f_0(s, x, u)$ выпукла по переменным (x, u) и строго выпукла по u; решение $L(t)$ уравнения (3.3) является положительно определенной матрицей. Для этого при учете равенства $H_{px} = H_{px}^T$ достаточно, чтобы матрицы $H_{pp}(t, x, 0)$ и $-H_{xx}(t, x, 0)$ были неотрицательно определенными.

Вычислим $-H_{xx}(t, x, 0)$ и $H_{pp}(t, x, 0)$ для случая, когда ограничения на управление u отсутствуют. Имеем

$$-H_{xx} = -\left\{\frac{\partial f_x^T}{\partial x_j} p\right\} - \left\{\frac{\partial f_x^T}{\partial u_k} p\right\} u_x + f_{0_{xx}} + f_{0_{xu}} u_x$$

Отсюда при $p = 0$ получим

$$-H_{xx}(t, x, 0) = f_{0_{xx}}(t, x, u(t, x, 0)) + f_{0_{xu}}(t, x, u(t, x, 0))u_x(t, x, 0) \tag{3.4}$$

Далее из условия максимума вытекает тождество $f_u^T p - f_{0_u} \equiv 0$. Продифференцировав его по x, получим соотношение

$$\left\{\frac{\partial f_u^T}{\partial x_j} p\right\} + \left\{\frac{\partial f_u^T}{\partial u_k} p\right\} u_x - f_{0_{ux}} - f_{0_{uu}} u_x = 0$$

приводящее при $p = 0$ к равенству

$$u_x(t, x, 0) = -f_{0_{uu}}^{-1}(t, x, u(t, x, 0)) f_{0_{ux}}(t, x, u(t, x, 0)) \tag{3.5}$$

Подставив (3.5) в (3.4) и учитывая равенство $f_{0_{xu}} = f_{0_{ux}}^T$, получим выражение

$$-H_{xx}(t, x, 0) = f_{0_{xx}}(t, x, u(t, x, 0)) -$$

$$-f_{0_{ux}}^T(t, x, u(t, x, 0)) f_{0_{uu}}^{-1}(t, x, u(t, x, 0)) f_{0_{ux}}(t, x, u(t, x, 0)) \tag{3.6}$$

Можно убедиться, что при сделанных предположениях относительно f_0 матрица, стоящая в правой части (3.6) действительно является неотрицательно определенной.

Выкладки, аналогичные приведенным выше, дают равенство

$$H_{pp}(t, x, 0) = f_u(t, x, u(t, x, 0)) f_{0_{uu}}^{-1}(t, x, u(t, x, 0)) f_u^T(t, x, u(t, x, 0))$$

которое вместе с (3.6) обосновывает положительную определенность матрицы коэффициентов усиления $L(t)$ в случае, когда ограничения на управление отсутствуют.

Можно доказать, что когда на управление наложены ограничения (разумеется, по-прежнему предполагается, что функция $u(s, x, p)$ достаточно гладкая), матрица $L(t)$ является также положительно определенной.

Фильтр (3.2), (3.3) для своей реализации в отличие от оптимального фильтра уже не требует пересчетов и не нуждается в хранении всей предыдущей информации о наблюдениях. Его размерность та же, что и в линейном фильтре. Но матрица коэффициентов усиления не может быть подсчитана заранее: она зависит от текущей оценки $\overset{\vee}{x}_t$, т.е. в конечном итоге зависит от наблюдений.

Следует отметить, что приведенная процедура локальнооптимального оценивания для линейных систем с квадратичным критерием дает оптимальную оценку для исходной задачи.

Локально-оптимальный фильтр, соответствующий фильтру (2.15), (2.16) имеет вид

$$d\overset{\vee}{x}_t / dt = f(t, \overset{\vee}{x}_t) + LC^T(t)Q(t)(y(t) - C(t)\overset{\vee}{x}_t), \quad \overset{\vee}{x}_{t_0} = \bar{x} \tag{3.7}$$

$$dL / dt = -LC^T(t)Q(t)C(t)L + f_x(t, \overset{\vee}{x}_t)L +$$
$$+ Lf_x^T(t, \overset{\vee}{x}_t) + D(t)R^{-1}(t)D^T(t), \quad L(t_0) = P^{-1} \tag{3.8}$$

Отметим, что конструкция, подобная (3.7), (3.8), была получена при построении приближенного нелинейного фильтра в стохастической задаче оценивания (см. [9]).

4. О различных представлениях фильтра. Для простоты ограничимся задачей оценивания состояний системы (2.12), фильтр в которой дается уравнением (2.15). Основным объектом в построении этого фильтра является решение $X(s; x)$, $p(s; x)$ задачи Коши для системы (2.13) с начальными данными на левом конце промежутка $[t_0, t]$: $X(t_0) = x$, $p(t_0) = P(x - \bar{x})$.

Свяжем построение фильтра с другой задачей Коши для системы (2.13). Именно, обозначим $X(s; t, x)$, $p(s; t, x)$ – решение (2.13) с начальными данными на правом конце промежутка $[t_0, t]$: $X(t) = x$, $p(t) = 0$. Для искомого $x = \hat{x}_t$ получится уравнение

$$p(t_0; t, \hat{x}_t) \overset{t}{\equiv} P(X(t_0; t, \hat{x}_t) - \bar{x}) \tag{4.1}$$

откуда вытекает

Теорема 3. Пусть при $t \in [t_0, t_0 + T]$ существует матрица $(PX_x(t_0; t, x) - p_x(t_0; t, x))^{-1}$. Тогда оценка $\hat{x}_t$ текущего состояния $X(t)$ в системе (2.12), оптимальная в задаче (1.3), (1.4), удовлетворяет задаче Коши

$$d\hat{x}_t / dt = -(PX_x(t_0; t, \hat{x}_t) - p_x(t_0; t, \hat{x}_t))^{-1}(PX_t(t_0; t, \hat{x}_t) -$$
$$- p_t(t_0; t, \hat{x}_t)), \quad \hat{x}_{t_0} = \bar{x} \tag{4.2}$$

где матрицы $X_x(s; t, x)$, $p_x(s; t, x)$ удовлетворяют системе уравнений в вариациях (2.8) при

$$H(s, x, p) = p^T(f(s, x) + D(s)R^{-1}(s)D^T(s)p) - (y(s) - C(s)x)^TQ(s)(y(s) - C(s)x) \tag{4.3}$$

с начальными данными

$$X_x(t; t, x) = I, \quad p_x(t; t, x) = 0 \tag{4.4}$$

Векторы $X_t(s; t, x)$, $p_t(s; t, x)$ удовлетворяют системе

$$X_t' = H_{px}X_t + H_{pp}p_t, \quad p_t' = -H_{xx}X_t - H_{xp}p_t \tag{4.5}$$

с начальными данными

$$X_t(t; t, x) = -f(t, x), \quad p_t(t; t, x) = C^T(t)Q(t)(y(t) - C(t)x) \tag{4.6}$$

В теореме 3 фигурирует условие невырожденности матрицы $PX_x(t_0; t, x) - p_x(t_0; t, x)$

при $t \in [t_0; t_O + T]$. Отметим, что благодаря обратимости матрицы $PX_x(t_0; t_0, x) - -p_x(t_0; t_0, x) = P$ обратная матрица существует и для всех t достаточно близких t_0.

Может оказаться, что задача Коши для системы (2.13) как с начальными данными на левом конце, так и на правом конце плохо обусловлена (так, например, получается на больших промежутках времени, когда исходная система (2.12) асимптотически устойчива). В этом случае в качестве основного объекта для построения фильтра естественно взять краевую задачу.

Введем, например, для системы (2.13) задачу с краевыми условиями

$$X(t_0) = x, \quad p(t) = 0 \tag{4.7}$$

Обозначим ее решение $X(s; t, x), p(s; t, x)$. Отметим, что каждый раз в обозначение решения входят лишь варьируемые аргументы, имеющие различный смысл: если в (4.1), (4.2) $X(s; t, x), p(s; t, x)$ – решение задачи Коши для системы (2.13) с $X(t) = x$, $p(t) = 0$, то здесь – решение краевой задачи (2.13), (4.7).

Теорема 4. Пусть для $t \in [t_0; t_0 + T]$ существует матрица $(P - p_x(t_0; t, x)^{-1}$. Тогда оптимальная оценка $x^\wedge_{t_0/t}$ начального состояния $X(t_0)$ в системе (2.12) удовлетворяет задаче Коши

$$dx^\wedge_{t_0/t} / dt = (P - p_x(t_0; t, x^\wedge_{t_0/t}))^{-1} p_t(t_0; t, x^\wedge_{t_0/t}), \quad x^\wedge_{t_0/t_0} = \bar{x} \tag{4.8}$$

где $p_x(s; t, x)$ (вместе с $X_x(s; t, x)$) – решение краевой задачи для системы (2.8), (4.3):

$$X_x(t_0; t, x) = I, \quad p_x(t; t, x) = 0 \tag{4.9}$$

а $p_t(s; t, x)$ (вместо с $X_t(s; t, x)$) – решение краевой задачи для системы (4.5), (4.3):

$$X_t(t_0; t, x) = 0, \quad p_t(t; t, x) = C^T(t)Q(t)(y(t) - C(t)X(t; t, x)) \tag{4.10}$$

Доказательство получается путем дифференцирования по t тождества

$$P(x^\wedge_{t_0/t} - \bar{x}) \overset{t}{\equiv} p(t_0; t, x^\wedge_{t_0/t})$$

Возможная процедура реализации фильтра (4.8) состоит в следующем. Зная $x^\wedge_{t_0/t}$ и решение $X(s; t, x^\wedge_{t_0/t})$, $p(s; t, x^\wedge_{t_0/t})$, находим (например, методами дифференциальной или разностной прогонки) решения $X_x(s; t, x^\wedge_{t_0/t})$, $p_x(s; t, x^\wedge_{t_0/t})$ и $X_t(s; t, x^\wedge_{t_0/t})$, $p_t(s; t, x^\wedge_{t_0/t})$ линейных краевых задач (2.8), (4.3), (4.9) и (4.5), (4.3), (4.10) при $x = x^\wedge_{t_0/t}$ для $t_0 \leqslant s \leqslant t$. После этого, выбрав шаг Δt продвижения по времени, из (4.8) методом Эйлера получим $x^\wedge_{t_0/t+\Delta t}$ с одношаговой точностью до $O(\Delta t^2)$. Обозначим $\Delta x^\wedge_t = x^\wedge_{t_0/t+\Delta t} - x^\wedge_{t_0/t}$. Тогда можно записать

$$X(s; t + \Delta t, x^\wedge_{t_0/t+\Delta t}) = X(s; t, x^\wedge_{t_0/t}) + X_t(s; t, x^\wedge_{t_0/t})\Delta t +$$
$$+ X_x(s; t, x^\wedge_{t_0/t})\Delta x^\wedge_t + O(\Delta t^2), \quad t_0 \leqslant s \leqslant t$$

Аналогичное соотношение записывается для $p(s; t + \Delta t, x^\wedge_{t_0/t+\Delta t})$. Полученное на промежутке $[t_0, t]$ решение продолжается на промежуток $[t_0, t + \Delta t]$, например, путем решения задачи Коши на малом промежутке времени $[t, t + \Delta t]$. В итоге имеем $x^\wedge_{t_0/t+\Delta t}$, $X(s; t + \Delta t, x^\wedge_{t_0/t+\Delta t})$, $p(s; t + \Delta t, x^\wedge_{t_0/t+\Delta t})$, $t_0 \leqslant s \leqslant t + \Delta t$, что дает возможность сделать следующий шаг в продвижении.

Во избежание накопления ошибки следует через определенные промежутки времени производить (например, методом Ньютона) уточнения решения краевой задачи (2.13), (2.14).

Отметим, что в отсутствие помех в системе (2.12), рассмотренные только что краевые задачи из-за независимости X от p сводятся к последовательным задачам Коши: для X слева направо, а затем для p справа налево.

Помимо уже отмеченных представлений фильтра можно указать и многие другие. Например, если взять в качестве основного объекта краевую задачу для (2.13) с краевыми условиями для X на левом и правом концах, то исходные краевые условия (2.14) дают $2n$ тождеств для рекуррентного по t отыскания $x^{\wedge}_{t_0/t}$ и $x^{\wedge}_t$. В принципе, в качестве основного объекта можно рассмотреть любую краевую задачу для (2.13), согласующуюся с исходными краевыми условиями (2.14). Такая краевая задача может содержать k, $0 \leqslant k \leqslant 2n$, неизвестных, относительно которых всегда можно составить на основании (2.14) k тождеств по t. В итоге получится соответствующее представление фильтра.

Рассмотрим фильтр, который получается в результате выбора в качестве основного объекта самой краевой задачи (2.13), (2.14). В этом случае $k = 0$ и решение этой задачи $X(s; t), p(s; t), t_0 \leqslant s \leqslant t$, зависит лишь от t. Ясно, что $x^{\wedge}_{s/t} = X(s; t)$.

Теорема 5. Уравнение фильтра для $x^{\wedge}_t$ имеет вид

$$dx^{\wedge}_t \,/\, dt = f(t, x^{\wedge}_t) + X_t(t;t), \quad x^{\wedge}_{t_0} = \bar{x} \tag{4.11}$$

где $X_t(s; t), p_t(s; t)$ – решение системы (4.5), (4.3) с краевыми условиями

$$p_t(t_0; t) = PX_t(t_0; t), \quad p_t(t; t) = C^T(t)Q(t)(y(t) - C(t)X(t; t)) \tag{4.12}$$

Доказательство (аналогично предыдущим теоремам) вытекает из тождества $x^{\wedge}_t \equiv X(t; t)$.

По критерию размерности вспомогательной системы дифференциальных уравнений, необходимых для формирования характеристик фильтра, выбор в качестве основного объекта исходной задачи (2.13), (2.14) является наиболее рациональным.

Отметим, что, например, характеристики фильтра формировались, например [1, 2], на основе решения $X(s; t, c), p(s; t, c)$ краевой задачи для системы (2.13) с краевыми условиями $p(t_0) = P(X(t_0) - \bar{x}), p(t) = c$. Эта задача, в отличие от рассмотренных, не согласована (при $c \neq 0$) с краевыми условиями исходной задачи, и для реализации фильтра требуется помимо X_t, p_t вычислить X_c, p_c.

Замечание 3. Вопрос о выборе того или иного представления фильтра связан со спецификой исходной задачи. Соответствующие рекомендации должны, по-видимому, существенно опираться на свойства экспоненциальной дихотомии системы.

Здесь ([6], см. также [1–3]) использовалась априорная информация о состоянии в начальный момент времени. Такая информация не всегда регуляризирует задачу оценивания (в качестве примера можно привести уравнение $x'' = a^2x$ при больших a). В подобных случаях естественно привлечь дополнительную информацию уже о краевых условиях, что приводит к другим алгоритмам оценивания, также допускающим различные представления фильтров. Понятно, что вопросы, затронутые в этом замечании, требуют отдельного исследования.

5. Численные эксперименты. В качестве (1.1), (1.2) рассмотрим систему

$$X' \doteq \lambda X(4 - X^2), \quad \lambda > 0 \tag{5.1}$$
$$y(s) \doteq X(s), \quad t_0 \leqslant s \leqslant t$$

((5.1) – это уравнение для первого приближения амплитуды решения уравнения Ван-дер-Поля). Взяв в (1.3), (1.4) $D(s) \equiv 1, Q(s) \equiv 1, R(s) \equiv 1$, найдем оптимальную оценку для $X(s)$ из решения краевой задачи (см. разд. 2)

$$X' = \lambda X(4 - X^2) + p, \tag{5.2}$$
$$p' = -\lambda(4 - 3X^2)p - (y(s) - X)$$

$$p(t_0) = P(X(t_0) - \bar{x}), \quad p(t) = 0 \tag{5.3}$$

Δ	λ = 0,1	0,5	1,0
	2,310	1,986	1,591
0,1	2,312	2,010	2,000
	2,309	2,010	2,000
	2,320	1,836	1,141
0,5	2,329	2,011	2,000
	2,325	2,010	2,000

Выпишем два представления фильтра, опирающиеся на различные основные объекты. В первом используется задачи Коши; фильтр имеет вид

$$dx^{\wedge}_{t_0/t} / dt = p_x^{-1}(t; x^{\wedge}_{t_0/t})(y(t) - X(t; x^{\wedge}_{t_0/t})) \tag{5.4}$$

$$x_t^{\wedge} = X(t; x^{\wedge}_{t_0/t})$$

Для реализации потребуется решение начальных задач (см. разд. 2) на удлиняющихся промежутках $[t_0, t]$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, для системы (5.2) и системы в вариациях

$$X'_x = \lambda(4 - 3X^2)X_x + p_x, \tag{5.5}$$

$$p'_x = (1 + 6\lambda X_p)X_x - \lambda(4 - 3X^2)p_x$$

Второй фильтр опирается на краевую задачу (5.2), (5.3); он имеет вид

$$dx_t^{\wedge} / dt = \lambda x_t^{\wedge}(4 - (x_t^{\wedge})^2) + X_t(t;t), \quad x^{\wedge}_{t_0/t} = X(t_0; t) \tag{5.6}$$

Для реализации (5.6) потребуется решение вспомогательной линейной краевой задачи (см. разд. 4) для системы

$$X'_t = \lambda(4 - 3X^2)X_t + p_t, \quad p'_t = (1 + 6\lambda X_p)X_t - \lambda(4 - 3X^2)p_t \tag{5.7}$$

на удлиняющихся промежутках $[t_0, t]$ и решение задачи Коши для (5.2) на промежутках $[t, t + \Delta t]$. Обратим внимание, что начальная задача для систем (5.2), (5.5) в вычислительном отношении неустойчива (уже при сравнительно небольших $\lambda > 0$), в то время как краевая задача для системы (5.7) устойчива. Хотя точные решения уравнений различных фильтров дают одну и ту же оптимальную оценку, результаты численного интегрирования могут существенно различаться.

В численных экспериментах $X(t_0) = 3$, $\bar{x} = 3(1 + \Delta)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, шумы в системе и наблюдениях представляют собой сумму высокочастотных колебаний.

В таблице приведены результаты экспериментов при различных λ и Δ в сравнении с оптимальной оценкой. Оптимальная оценка $x_t^{\wedge}$ вычислялась при использовании методов высокого порядка точности с малым шагом численного интегрирования. При реализации фильтров (5.4) и (5.6) для решения задач Коши применялся метод Эйлера, линейная краевая задача для (5.7) решалась методом разностной прогонки. В таблице первая строка при каждом значении Δ относится к фильтру (5.4), вторая – к фильтру (5.6), в третьей приведена оптимальная оценка.

Анализ численных результатов показал, что при малых значениях параметра λ (см. $\lambda = 0{,}1$) оба алгоритма дают близкие значения оценки независимо от погрешностей в системе и наблюдениях, а также от степени близости априорного значения $\bar{x}$ к $X(t_0)$. С ростом λ (см. $\lambda = 0{,}5$) неустойчивость начальных задач усиливается, и это сказывается на качестве численного решения (5.4), особенно при далеких $\bar{x}$. При определенных значениях λ (см. $\lambda = 1{,}0$) применение первого фильтра приводит к значительным отклонениям численного значения текущей оценки от оптимальной $x_t^{\wedge}$ даже на коротких промежутках наблюдения. В то же время численное решение, опирающееся на краевую задачу, обеспечивает оценку, близкую к оптимальной.

Оптимальная оценка $x^{\wedge}_{t_0/t}$ начального состояния $X(t_0)$ в рассматриваемом эксперименте быстро устанавливается. При численной реализации фильтра с ростом промежутка наблюдения оценка для $X(t_0)$ разве лишь ухудшается из-за внесения вычислительных погрешностей. Более сильно это сказывается на результатах интегрирования первого фильтра. При этом влияние вычислительной погрешности проявляется уже на достаточно коротких промежутках при увеличении параметра λ.

Таким образом, для системы (5.1) более приемлемым с вычислительной точки зрения является второе представление фильтра (5.6).

Отметим, что во всех экспериментах для данного примера локально-оптимальный фильтр дает оценку $\check{x}_t$, близкую к оптимальной оценке $\hat{x}_t$.

Авторы благодарят Б.И. Ананьева и А.В. Кряжимского за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kagiwada H.H.* System identification. Methods and applications. London: Addison-Wesley, 1974. 293 p.
2. *Касти Дж., Калаба Р.* Методы погружения в прикладной математике. М.: Мир, 1976. 223 с.
3. *Гусев М.И., Куржанский А.Б.* Обратные задачи динамики управляемых систем // Механика и научно-технический прогресс. Т. 1. Общая и прикладная механика. М.: Наука, 1987. С. 187–195.
4. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* Обратные задачи динамики и управляемые модели // Механика и научно-технический прогресс. Т. 1. Общая и прикладная механика. М.: Наука, 1987. С. 196–211.
5. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. 2. С. 51–60.
6. *Мильштейн Г.Н., Соловьева О.Э.* Рекуррентное оценивание и идентификация параметров в нелинейных детерминированных системах // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 39–47.
7. *Суханов А.А.* Метод решения нелинейных двухточечных краевых задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1983. Т. 23. № 1. С. 228–231.
8. *Аникин С.А., Гусев М.И.* Оценивание возмущающих сил по измерениям параметров движения // Гарантированное оценивание и задачи управления. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. С. 19–30.
9. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. Оценивание параметров и состояния. М.: Мир, 1975. 683 с.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
16.III.1993