УДК 531.36

© 1994 г. А.А. Воронин

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается движение механических систем под действием гироскопических и позиционных сил, характеризуемых большим параметром в соответствующих уравнениях движения. Периодические решения таких уравнений изучались ранее [1, 2]. Ниже доказывается существование решений этих уравнений, определенных на интервале, длина которого – монотонно возрастающая неограниченная функция большого параметра, и переходящих в решения соответствующих вырожденных систем при стремлении большого параметра к бесконечности. При дополнительных предположениях о свойствах системы и характере действующих сил вид этой функции может конкретизироваться.

Подобная задача рассматривалась ранее [3] в случае периодической зависимости сил от времени. Случай больших потенциальных сил рассматривался [4] в предположении устойчивости вырожденной системы в первом приближении.

1. Рассмотрим механическую систему с l степенями свободы, характеризуемую кинетической энергией

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l} a_{ij}(\mathbf{x})\dot{x}_i\dot{x}_j+\sum_{i=1}^{l} a_i(\mathbf{x})\dot{x}_i+h\sum_{i=1}^{2m} b_i(x_1,\ldots,x_{2m})\dot{x}_i+a_o(\mathbf{x})$$

и обобщенными силами

$$hQ_i(t,\mathbf{x})\quad (i=1,\ldots,n),\qquad Q_i(t,\mathbf{x})\quad (i=n+1,\ldots,l)$$

Здесь $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_l)^{\mathrm{T}}$ – обобщенные координаты системы, точкой обозначено дифференцирование по времени t, h – положительный большой параметр, симметричная матрица $(a_{ij})_{i,j=1}^{l}$ положительно определена, $0<2m\leqslant n\leqslant l$.

В рассматриваемой механической системе большие позиционные силы действуют по координатам $x_1,\ldots,x_n$; большие гироскопические силы – по координатам $x_1,\ldots,x_{2m}$ и описываются слагаемыми с множителем h.

Уравнения Лагранжа для этой системы можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(A_{11}\dot{\boldsymbol{\xi}}+A_{12}\dot{\boldsymbol{\eta}}+A_{13}\dot{\boldsymbol{\zeta}})+h(G\dot{\boldsymbol{\xi}}+\mathbf{Q}^{(1)})=\mathbf{F}_1\\
&\frac{d}{dt}(A_{21}\dot{\boldsymbol{\xi}}+A_{22}\dot{\boldsymbol{\eta}}+A_{23}\dot{\boldsymbol{\zeta}})+h\mathbf{Q}^{(2)}=\mathbf{F}_2 \qquad (1.1)\\
&\frac{d}{dt}(A_{31}\dot{\boldsymbol{\xi}}+A_{32}\dot{\boldsymbol{\eta}}+A_{33}\dot{\boldsymbol{\zeta}})=\mathbf{F}_3
\end{aligned}$$

Здесь

$$\boldsymbol{\xi} = (x_1,\dots,x_{2m})^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\eta} = (x_{2m+1},\dots,x_n)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\zeta} = (x_{n+1},\dots,x_l)^{\mathrm{T}}$$

$$G(\boldsymbol{\xi}) = (g_{ij}(\boldsymbol{\xi}))_{i,j=1}^{2m}, \quad g_{ij} = \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - \frac{\partial b_j}{\partial x_i}$$

$$\mathbf{Q}^{(1)} = (Q_1,\dots,Q_{2m})^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{Q}^{(2)} = (Q_{2m+1},\dots,Q_n)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(t, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}, \dot{\boldsymbol{\xi}}, \dot{\boldsymbol{\eta}}, \dot{\boldsymbol{\zeta}}) \quad (j = 1,2,3)$$

$$\mathbf{F}_1 \in R^{2m}, \quad \mathbf{F}_2 \in R^{n-2m}, \quad \mathbf{F}_3 \in R^{l-n}$$

Матрицы $A_{ij} = A_{ij}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta})$ определены соотношением $(A_{ij})_{i,j=1}^{3} = (a_{ij})_{i,j=1}^{l}$ и имеют размеры A_{11} – $(2m \times 2m)$, A_{22} – $((n-2m) \times (n-2m))$, A_{33} – $((l-n) \times (l-n))$ и т.д. Предположим, что $\det G(\boldsymbol{\xi}) \neq 0$ и матрица $\partial \mathbf{Q}^{(2)}/\partial \boldsymbol{\eta}$ положительно определена при всех значениях аргументов.

Преобразуем систему (1.1) к виду, разрешенному относительно старших производных. Преобразования выполним в форме трех последовательных замен переменных

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} \to \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \dot{\boldsymbol{\zeta}} + A_{33}^{-1}(A_{31}\dot{\boldsymbol{\xi}} + A_{32}\dot{\boldsymbol{\eta}})$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} \to \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = \dot{\boldsymbol{\eta}} + (A'_{22})^{-1} A'_{21}\dot{\boldsymbol{\xi}}$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} \to \mathbf{p}, \quad P\mathbf{p} = \dot{\boldsymbol{\xi}} + G^{-1}(\mathbf{Q}^{(1)} - A'_{12}(A'_{21})^{-1}\mathbf{Q}^{(2)})$$

где $A'_{ij} = A_{ij} - A_{i3}A_{33}^{-1}A_{3j}$ $(i, j = 1, 2)$, $P = P(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta})$ – невырожденная $(2m \times 2m)$ – матрица, удовлетворяющая соотношениям

$$P^{\mathrm{T}}(A'_{11} - A'_{12}(A'_{22})^{-1}A'_{21})P = E_{2m}$$

$$P^{\mathrm{T}}GP = -\boldsymbol{\Gamma} = \mathrm{diag}(\gamma_1 J,\dots,\gamma_m J), \quad J = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{1.2}$$

Здесь и далее E_k – единичная $(k \times k)$-матрица. (Будем полагать, что P и $\gamma_i = \gamma_i(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta})$ при всех допустимых $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\zeta}$ – достаточно гладкие функции.) Умножив полученную систему слева на P^{T}, при учете (1.2) получим уравнения

$$\dot{\mathbf{p}} = h\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{p} + \mathbf{F}'_1, \quad \dot{\mathbf{q}} = -h(A'_{22})^{-1}\mathbf{Q}^{(2)} + \mathbf{F}'_2, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}'_3 \tag{1.3}$$

которые вместе с уравнениями замен переменных

$$\begin{gathered} \dot{\boldsymbol{\xi}} = P\mathbf{p} - G^{-1}(\mathbf{Q}^{(1)} - A'_{12}(A'_{22})^{-1}\mathbf{Q}^{(2)}) \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{q} - (A'_{22})^{-1}A_{21}\dot{\boldsymbol{\xi}}, \quad \dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{r} - A_{33}^{-1}(A_{31}\dot{\boldsymbol{\xi}} + A_{32}\dot{\boldsymbol{\eta}}) \end{gathered} \tag{1.4}$$

образуют замкнутую систему, эквивалентную уравнениям (1.1).

Пусть уравнение $\mathbf{Q}^{(2)}(t, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) = 0$ допускает решение $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^0(t, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta})$. Введем функции:

$$\Phi_\xi(t,\xi,\zeta) = -G^{-1}(\xi)\mathbf{Q}^{(1)}(t,\xi,\boldsymbol{\eta}^0,\zeta)$$

$$\mathbf{q}^0 0(t,\xi,\zeta,\mathbf{r}) = \left(E_{n-2m} + \frac{\partial\boldsymbol{\eta}^0}{\partial\xi}A_{33}^{-1}A_{32}\right)^{-1} \times$$

$$\times\left(((A'_{22})^{-1}A'_{21} - \frac{\partial\boldsymbol{\eta}^0}{\partial\zeta}A_{33}^{-1}\left(A_{31} - A_{32}(A'_{22})^{-1}A'_{21}\right) + \frac{\partial\boldsymbol{\eta}^0}{\partial\xi}\right)\Phi_\xi + \frac{\partial\boldsymbol{\eta}^0}{\partial\zeta}\mathbf{r} + \frac{\partial\boldsymbol{\eta}^0}{\partial t}\right)$$

$$\Phi_\zeta(t,\xi,\zeta,\mathbf{r}) = \mathbf{r} - A_{33}^{-1}(A_{31}\Phi_\xi + A_{32}(\mathbf{q}^0 - (A'_{22})^{-1}A'_{21}\Phi_\xi))$$

$$\Phi_r = \mathbf{F}'_3(t,\xi,\boldsymbol{\eta}^{(0)},\zeta,\mathbf{0},\mathbf{q}^0,\mathbf{r})$$

$$(A_{3i} = A_{3i}(\xi,\boldsymbol{\eta}^{(0)},\zeta),\quad A'_{2j} = A'_{2j}(\xi,\boldsymbol{\eta}^{(0)},\zeta))$$

$$(i = 1, 2, 3;\;\; j = 1, 2)$$

При $h = \infty$ уравнения (1.3), (1.4) имеют решения, в которых $\mathbf{p} = 0$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}^0$, $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^0$, а переменные ξ, ζ, $\mathbf{r}$ определяются системой

$$\dot{\xi} = \Phi_\xi,\quad \dot{\zeta} = \Phi_\zeta,\quad \dot{\mathbf{r}} = \Phi_r \tag{1.5}$$

Рассматриваемая механическая система совершает сложное движение, в котором можно выделить быстрые колебания двух типов: нутационные (с частотами $\sim h$), обусловленные большими гироскопическими силами и обусловленные большими позиционными силами колебания с частотами $\sim h^{1/2}$. Введение квазискоростей $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$ по формулам (1.4) позволяет выделить эти составляющие в явном виде ("гироскопические" – $\mathbf{p}$ и "позиционные" – $\mathbf{q} - \mathbf{q}^0$).

Вырожденная система (1.5) описывает прецессионное движение по переменным $x_1,\dots, x_{2m}$ под действием сил hQ_i ($i = 1,\dots, 2m$), движение по многообразию $\mathbf{q} = \mathbf{q}^0$, $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^0$, обусловленное действием сил hQ_i ($i = 2m + 1,\dots, n$) по переменным $x_{2m+1},\dots, x_n$, а также согласованное с ними движение по переменным $x_{n+1},\dots, x_l$, описываемое последними двумя уравнениями (1.5).

Докажем существование решений уравнений движения рассматриваемой механической системы, определенных на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \chi(h)$, где χ – некоторая непрерывная неотрицательная монотонно возрастающая неограниченная функция, и переходящих при $h \to +\infty$ в соответствующие решения вырожденной системы.

Пусть $\xi = \varphi_1(t)$, $\zeta = \varphi_2(t)$, $\mathbf{r} = \varphi_3(t)$ – некоторое решение системы (1.5), определенное при $0 \leqslant t < +\infty$. Обозначим $\varphi_4(t) = \boldsymbol{\eta}^0(t, \varphi_1, \varphi_2)$, $\varphi_5(t) = \mathbf{q}^0(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. В силу сделанных выше предположений существует невырожденная матрица $S(t)$, такая, что

$$S^{\mathrm{T}}A'_{22}(\varphi_1,\varphi_4,\varphi_2)S = E_{n-2m}$$

$$S^{\mathrm{T}}\frac{\partial\mathbf{Q}^{(2)}(t,\varphi_1,\varphi_4,\varphi_2)}{\partial\boldsymbol{\eta}}S = \mathrm{diag}(\omega_1^2(t),\dots,\omega_{n-2m}^2(t)) = \Omega(t)$$

Будем считать, что $S(t)$, $\omega_i(t)$ ($i = 1,\dots, n - 2m$) – достаточно гладкие функции и матрица $\Gamma(\varphi_1, \varphi_4, \varphi_2)$ невырождена при всех $0 \leqslant t < +\infty$. Обозначим $\varphi_i^0 = \varphi_i(0)$ ($i = 1,\dots, 5$).

Теорема 1. Для любых положительных чисел $B_1,\dots, B_6$ и $\alpha \in (0, \alpha_0)$ ($\alpha_0 = 1/6$) существуют такие положительные постоянные $C_1,\dots, C_6$, H и такая непрерывная монотонно возрастающая неограниченная при $h \to +\infty$ функция $\chi(h)$, что при $h \geqslant H$ всякое решение системы (1.3), (1.4) $\mathbf{p}(t, h)$, $\mathbf{q}(t, h)$, $\mathbf{r}(t, h)$, $\xi(t, h)$, $\boldsymbol{\eta}(t, h)$, $\zeta(t, h)$ с начальными условиями, удовлетворяющими неравенствам

$$\|\mathbf{p}(0,h)\| \leqslant B_1 h^{-1}, \quad \|\mathbf{q}(0,h)-\varphi_5^0\| \leqslant B_2 h^{-1}$$

$$\|\mathbf{r}(0,h)-\varphi_3^0\| \leqslant B_3 h^{\alpha-1}, \quad \|\boldsymbol{\xi}(0,h)-\varphi_1^0\| \leqslant B_4 h^{2\alpha-2}$$

$$\|\boldsymbol{\eta}(0,h)-\varphi_4^0-\mathbf{M}h^{-1}\| \leqslant B_5 h^{4\alpha-2}, \ \|\boldsymbol{\zeta}(0,h)-\varphi_2^0\| \leqslant B_6 h^{\alpha-1}$$

где $\mathbf{M}=\Omega^{-1}(0)(\mathbf{F}_2'(0,\varphi_1^0,\varphi_4^0,\varphi_2^0,0,\varphi_5^0,\varphi_3^0)-\dot{\varphi}_5^0)$, определено на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \chi(h^\alpha)$ и удовлетворяет на нем оценкам

$$\|\mathbf{p}(t,h)\| \leqslant C_1 h^{\alpha-1}, \quad \|\mathbf{q}(t,h)-\varphi_5(t)\| \leqslant C_2 h^{\alpha-1}$$

$$\|\mathbf{r}(t,h)-\varphi_3(t)\| \leqslant C_3 h^{2\alpha-1}, \quad \|\boldsymbol{\xi}(t,h)-\varphi_1(t)\| \leqslant C_4 h^{\alpha-1}$$

$$\|\boldsymbol{\eta}(t,h)-\varphi_4(t)\| \leqslant C_5 h^{\alpha-1}, \quad \|\boldsymbol{\zeta}(t,h)-\varphi_2(t)\| \leqslant C_6 h^{2\alpha-1}$$

Если в рассматриваемой механической системе отсутствуют большие позиционные силы, то $n = 2m$, и в уравнениях (1.1) отсутствуют переменные $\mathbf{q}$ и $\boldsymbol{\eta}$, а $\varphi_1(t) = \text{const}$. В этом случае вырожденная система описывает покой по "гироскопическим" переменным $x_1,\ldots, x_{2m}$. При этом в формулировку теоремы 1 необходимо внести следующие изменения:

$$\alpha_0 = 1/3, \quad B_1 h^{-1} \to B_1 h^{\alpha-2}, \quad B_3 h^{\alpha-1} \to B_2 h^{\alpha-2}$$

$$B_4 h^{2\alpha-2} \to B_3 h^{\alpha-2}, \quad B_6 h^{\alpha-1} \to B_4 h^{\alpha-2}$$

$$C_3 h^{2\alpha-1} \to C_2 h^{\alpha-1}, \quad C_6 h^{2\alpha-1} \to C_4 h^{\alpha-1}$$

Если к тому же $l = n = 2m$, то в системе (1.1) отсутствуют также и переменные $\mathbf{r}$ и $\boldsymbol{\zeta}$. Тогда все переменные являются "гироскопическими", и в качестве вырожденной системы можно взять прецессионные уравнения. Выбрав в качестве независимой переменной $\tau = h^{-1}t$ и сделав в системе (1.1) преобразования, аналогичные приведенным выше (аналогичные преобразования выполнены в [1]), получим уравнения вида (1.3), (1.4) с заменой $h \to h^2$. Тогда в теорему 1 необходимо внести следующие изменения:

$$\alpha_0 = 2/3, \quad B_1 h^{-1} \to B_1 h^{-2}, \quad B_4 h^{2\alpha-2} \to B_2 h^{\alpha-4}, \quad C_1 h^{\alpha-1} \to C_1 h^{\alpha-1}, \quad C_4 h^{\alpha-1} \to C_4 h^{\alpha-2}$$

2. Для доказательства теоремы 1 рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{U}(t,\mathbf{u},\mathbf{v}), \quad \dot{\mathbf{v}} = h\mathbf{V}_0(t,\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mathbf{V}_1(t,\mathbf{u},\mathbf{v}) \tag{2.1}$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по t, $\mathbf{u} \in R^n$, $\mathbf{v} \in R^m$ ($n \geqslant m$); $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}_0$, $\mathbf{V}_1$ – непрерывно-дифференцируемые вектор-функции соответствующей размерности, $h \gg 1$ – некоторая постоянная.

Пусть $(m \times (n + m))$-матрица $(\partial \mathbf{V}_0/\partial \mathbf{v}; \partial \mathbf{V}_0/\partial \mathbf{u})$ при всех t, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ имеет полный ранг. Для определенности предположим, что невырожденными при всех t, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ являются матрицы $(\partial \mathbf{V}_{0i}/\partial \mathbf{v}_j)$ $(i, j = m - p + 1,\ldots, m)$ и $(\partial \mathbf{V}_{0i}/\partial \mathbf{u}_j)$ $(i = 1,\ldots, m - p; j = n - m + p + 1,\ldots, n)$ $(0 < p \leqslant m)$. Введем векторы

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}},\ldots,\mathbf{x}_4^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{x}_1 = (u_1,\ldots,u_{n-m+p})^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{x}_2 = (u_{n-m+p+1},\ldots,u_n)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{x}_3 = (v_1,\ldots,v_{m-p})^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{x}_4 = (v_{m-p+1},\ldots,v_m)^{\mathrm{T}}$$

и соответствующие им вектор-функции $\mathbf{X}^0 = (0,0,\mathbf{X}_3^{0\mathrm{T}},\mathbf{X}_4^{0\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^{\mathrm{T}},\ldots\mathbf{X}_4^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ и перепишем систему (2.1) в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = h\mathbf{X}^0(t, \mathbf{x}) + \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) \tag{2.2}$$

При $h = \infty$ система (2.2) переходит в систему

$$\mathbf{X}^0(t, \mathbf{x}) = 0 \tag{2.3}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{X}_i(t, \mathbf{x}) \quad (i = 1, 2) \tag{2.4}$$

Систему (2.3), (2.4) назовем вырожденной. Пусть система (2.3) имеет изолированное решение $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2^0(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3)$, $\mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_4^0(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3)$. Подставляя эти функции во второе уравнение (2.3), получим соотношение

$$\frac{\partial \mathbf{x}_2^0}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}_2^0}{\partial \mathbf{x}_1}\mathbf{X}_1 + \frac{\partial \mathbf{x}_2^0}{\partial \mathbf{x}_3}\mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_2$$

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_i(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2^0, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4^0) \quad (i = 1, 2, 3)$$

Предположим, что это уравнение (относительно $\mathbf{x}_3$) имеет изолированное решение $\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_3^0(t, \mathbf{x}_1)$. Подставляя функции $\mathbf{x}_2^0, \mathbf{x}_3^0$ и $\mathbf{x}_4^0$ в первое уравнение (2.4), получим

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{X}_1(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2^0, \mathbf{x}_3^0, \mathbf{x}_4^0) \tag{2.5}$$

Пусть $\mathbf{x}_1 = \varphi_1(t)$ – некоторое решение этой системы, определенное при $0 \leqslant t < +\infty$. Обозначим

$$\varphi(t) = (\varphi_1^{\mathrm{T}}(t), \ldots, \varphi_4^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}}, \quad \varphi_3(t) = \mathbf{x}_3^0(t, \varphi_1)$$

$$\varphi_2(t) = \mathbf{x}_2^0(t, \varphi_1, \varphi_3), \quad \varphi_4(t) = \mathbf{x}_4^0(t, \varphi_1, \varphi_3)$$

Сделаем в системе (2.2) замену переменной $\mathbf{x} = \varphi(t) + \boldsymbol{\omega}$ и в получившихся уравнениях выделим в явном виде некоторые члены. В результате получим систему

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = (hA(t) + B(t))\boldsymbol{\omega} + \mathbf{f}_0^{(0)}(t) + \mathbf{f}_0^{(1)}(t, \boldsymbol{\omega}, h) \tag{2.6}$$

Здесь

$$A(t) = (A_{ij}(t))_{i,j=1}^4, \quad A_{ij}(t) = \partial \mathbf{X}_i^0(t, \varphi) / \partial \mathbf{x}_j; \quad B(t) = (B_{ij}(t))_{i,j=1}^4, \quad B_{ij}(t) = \partial \mathbf{X}_i(t, \varphi) / \partial \mathbf{x}_j$$

$$\mathbf{f}_0^{(0)} = (0, 0, \mathbf{f}_{03}^{(0)\mathrm{T}}, \mathbf{f}_{04}^{(0)\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{f}_0^{(1)} = (\mathbf{f}_{01}^{(1)\mathrm{T}}, \ldots, \mathbf{f}_{04}^{(1)\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{f}_{0j}^{(0)} = \mathbf{X}_j(t, \varphi) - \dot{\varphi}_j \quad (j = 3, 4)$$

Для функций $\mathbf{f}_{0j}^{(1)}$ ($j = 1, \ldots, 4$) при $\boldsymbol{\omega}, h^{-1} \to 0$ справедливы оценки

$$\|\mathbf{f}_{0j}^{(1)}(t, \boldsymbol{\omega}, h)\| = O(\|\boldsymbol{\omega}\|^2) \quad (j = 1, 2), \quad \|\mathbf{f}_{0j}^{(1)}(t, \boldsymbol{\omega}, h)\| = O(h\|\boldsymbol{\omega}\|^2) \quad (j = 3, 4)$$

В системе (2.6) сделаем замену переменной $\boldsymbol{\omega} \to \boldsymbol{\omega} + \mathbf{s}h^{-1}$, $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1^{\mathrm{T}}, \ldots, \mathbf{s}_4^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. Векторные компоненты $\mathbf{s}_2$ и $\mathbf{s}_4$ определяются как функции s_1 и $\mathbf{s}_3$ из системы $A\mathbf{s} = \mathbf{f}_0^{(0)}$, а компоненты $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_3$ определяются первыми двумя уравнениями системы $\dot{\mathbf{s}} = B\mathbf{s}$ и начальным условием $\mathbf{s}_1(0) = 0$ после подстановки в них выражений для $\mathbf{s}_2$ и $\mathbf{s}_4$. (Условия разрешимости этих систем те же, что и для системы (2.3), (2.4) относительно переменных $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_4$.)

В результате получим систему

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = (hA(t) + C(t))\boldsymbol{\omega} + \mathbf{f}_1^{(0)}(t, h^{-1}) + \mathbf{f}_1^{(1)}(t, \boldsymbol{\omega}, h) \tag{2.7}$$

где

$$C(t) = (C_{ij}(t))_{i,j=1}^4, \quad C_{ij} = B_{ij} \quad (i = 1, 2; \ j = 1, \ldots, 4)$$

$$C_{ij} = B_{ij} + \partial \mathbf{f}_{0i}^{(1)}(t, \mathbf{s}, h) / \partial \boldsymbol{\omega}_j \quad (i = 3, 4; \ j = 1, \ldots, 4)$$

Для функций $\mathbf{f}_1^{(0)}$ и $\mathbf{f}_1^{(1)}$ при $\boldsymbol{\omega}, h^{-1} \to 0$ справедливы оценки

$$\|\mathbf{f}_{1i}^{(0)}(t, h^{-1})\| = O(h^{-2}), \quad \|\mathbf{f}_{1i}^{(1)}(t, \boldsymbol{\omega}, h)\| = O(h^{-1}\|\boldsymbol{\omega}\| + \|\boldsymbol{\omega}\|^2)$$

$$\|\mathbf{f}_{1j}^{(0)}(t, h^{-1})\| = O(h^{-1}), \quad \|\mathbf{f}_{1j}^{(1)}(t, \boldsymbol{\omega}, h)\| = O(h^{-1}\|\boldsymbol{\omega}\| + h\|\boldsymbol{\omega}\|^2) \quad (i = 1, 2; \ j = 3, 4)$$

В системе (2.7) сделаем замену переменной $\boldsymbol{\omega} \to \boldsymbol{\omega} + \mathbf{q}h^{-1}$, $\mathbf{q} = (0, \mathbf{q}_2^{\mathrm{T}}, 0, \mathbf{q}_4^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. Векторные компоненты q_2 и q_4 определяются системой $A\mathbf{q} = (0, 0, \mathbf{f}_{13}^{(0)\mathrm{T}}, \mathbf{f}_{14}^{(0)\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

В результате получим систему

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = (hA(t) + D(t))\boldsymbol{\omega} + \mathbf{f}_2^{(0)}(t, h^{-1}) + \mathbf{f}_2^{(1)}(t, \boldsymbol{\omega}, h) \tag{2.8}$$

$$(D(t) = C(t) + \partial \mathbf{f}_1^{(1)}(t, \mathbf{q}, h) / \partial \boldsymbol{\omega})$$

Оценка для функции $\mathbf{f}_2^{(1)}$ при $\boldsymbol{\omega}, h^{-1} \to 0$ не изменилась, а для $\mathbf{f}_2^{(0)}$ она имеет вид

$$\|\mathbf{f}_2^{(0)}(t, h^{-1})\| = O(h^{-2})$$

В силу этих оценок существуют такие положительные числа δ, H_1 и такая функция $\Phi_0(t)$, что при всех t, $\boldsymbol{\omega}$, $\overline{\boldsymbol{\omega}}$, h, удовлетворяющих неравенствам $h \geqslant H_1$, $\max(\| \boldsymbol{\omega} \|, \| \overline{\boldsymbol{\omega}} \|) \leqslant \delta$, выполнены соотношения

$$\begin{gathered}\|\mathbf{f}_2^{(0)}(t, h^{-1})\| \leqslant \Phi_0(t) h^{-2}, \quad \|\mathbf{f}_2^{(1)}(t, \boldsymbol{\omega}, h)\| \leqslant \Phi_0(t)(h^{-1}\|\boldsymbol{\omega}\| + h\|\boldsymbol{\omega}\|^2) \\ \|\mathbf{f}_2^{(1)}(t, \boldsymbol{\omega}, h) - \mathbf{f}_2^{(1)}(t, \overline{\boldsymbol{\omega}}, h)\| \leqslant \Phi_0(t)(h^{-1}\|\boldsymbol{\omega} - \overline{\boldsymbol{\omega}}\| + h(\|\boldsymbol{\omega}\| + \|\overline{\boldsymbol{\omega}}\|)\|\boldsymbol{\omega} - \overline{\boldsymbol{\omega}}\|)\end{gathered} \tag{2.9}$$

Введем множество $I = \{(t, s, h)\colon 0 \leqslant s \leqslant t < +\infty, h \geqslant H_1\}$.

Обозначим $W(t, s, h)$ фундаментальную матрицу неоднородной линейной системы, соответствующей (2.8), определенную на множестве I.

Теорема 2. Пусть матрица-функция $W(t, s, h)$ при всех $(t, s, h) \in I$ удовлетворяет соотношению

$$\| W(t, s, h) \| \leqslant \Phi_1(t) \tag{2.10}$$

где $\Phi_1(t)$ – некоторая непрерывная функция. Тогда для любых положительных чисел B и $\alpha \in (0, \alpha_0)$ ($\alpha_0 = 1/2$) существуют такие положительные постоянные C и H и такая непрерывная неотрицательная монотонно возрастающая неограниченная при $h \to +\infty$ функция $\chi(h)$, что при $h \geqslant H$ решение системы (2.8) $\boldsymbol{\omega}(t, h)$ с начальным условием, удовлетворяющим неравенству

$$\| \boldsymbol{\omega}(0, h) \| \leqslant Bh^{-2} \tag{2.11}$$

определено на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \chi(h^\alpha)$ и удовлетворяет на нем оценке

$$\| \boldsymbol{\omega}(t, h) \| \leqslant Ch^{\alpha - 2} \tag{2.12}$$

Для доказательства теоремы 2 строится система интегральных уравнений, эквивалентная начальной задаче $\boldsymbol{\omega}(0, h) = \boldsymbol{\omega}_0$ для системы (2.8). Существование решения последней, удовлетворяющего на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \chi(h^\alpha)$ условиям (2.11), (2.12), доказывается методом последовательных приближений. При этом $\chi = \Phi_2^{-1}$, где $\Phi_2(t)$ – монотонно возрастающая неотрицательная неограниченная при $t \to +\infty$ непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству $\Phi_2(t) \geqslant t\Phi_0(t)\Phi_1(t)$.

На основании теоремы 2 и сделанных замен переменных можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. Пусть для некоторого решения $\mathbf{x} = \varphi(t)$ вырожденной системы (2.3), (2.4) выполнено соотношение (2.10). Тогда для любых положительных чисел B и $\alpha \in (0, \alpha_0)$ ($\alpha_0 = 1/2$) существуют такие положительные постоянные C и H и такая непрерывная неотрицательная монотонно возрастающая неограниченная при $h \to +\infty$ функция $\chi(h)$, что при $h \geqslant H$ всякое решение системы (2.2) $\mathbf{x}(t, h)$ с начальным условием, удовлетворяющим неравенству

$$\| \mathbf{x}(0, h) - \varphi(0) - \mathbf{Q}h^{-1} \| \leqslant Bh^{-2} \tag{2.13}$$

где $\mathbf{Q} = (\mathbf{0}, \mathbf{Q}_2^{\mathrm{T}}, \mathbf{Q}_3^{\mathrm{T}}, \mathbf{Q}_4^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ – постоянный вектор, определяемый с помощью правой части системы (2.2) и начальных условий $\varphi(0)$ и $\dot{\varphi}(0)$, определено на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \chi(h^\alpha)$ и удовлетворяет на нем оценке

$$\| \mathbf{x}(0, h) - \varphi(t) \| \leqslant C h^{\alpha - 1}$$

Можно несколько изменить схему преобразований системы (2.6) с целью упрощения линейной части системы (2.8).

Поскольку $\operatorname{rank}(\partial \mathbf{V}_0 / \partial \mathbf{v}) = p \leqslant m$, будем полагать, что при всех $0 \leqslant t < +\infty$ существует действительная невырожденная непрерывно-дифференцируемая ограниченная $(m \times m)$ – матрица-функция $S(t)$, удовлетворяющая соотношению $S^{-1} A' S = \operatorname{diag}(0, A_{44}'')$, где $A' = (A_{ij})$ $(i, j = 3, 4)$. Тогда замены переменных

$$(\boldsymbol{\omega}_3^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\omega}_4^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \to S(\boldsymbol{\omega}_3^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\omega}_4^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\omega} \to L(t, h^{-1}) \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{l}(t, h^{-1})$$

где матрица L и вектор $\mathbf{l}$ определяются с помощью правой части системы (2.6) и удовлетворяют соотношениям $\det L = 1 + O(h^{-2})$, $\| \mathbf{l} \| = O(h^{-1})$, приводит систему (2.6) к виду, аналогичному (2.8) с линейной частью в виде трех независимых подсистем (соответствующих "медленным" и двум типам "быстрых" движений). Это упрощает проверку условия (2.10), но приводит к некоторому изменению α_0 и показателей степени в неравенстве (2.13).

Уравнения движения гироскопических систем являются частным случаем системы (2.1). В силу невырожденности матрицы кинетической энергии, а также в силу осциллирующего характера быстрых движений для этих систем выполнены все условия теорем 2 и 3. Специальный вид функции $\mathbf{V}_0$ в этих системах позволяет положить некоторые (или все) векторные компоненты $\mathbf{Q}_i$ $(i = 2, 3, 4)$ равными нулю (изменив α_0 и показатели степени в неравенстве (2.13)).

Доказательство соответствующих утверждений проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 3.

При конкретизации вида механической системы и характера действующих сил вид функции χ может уточняться. Так, например, для уравнений вращательного движения спутника-гиростата под действием аэродинамического и гравитационного моментов на круговой орбите [5] можно принять

$$\chi(h) = T h^{\alpha/2} \quad (T = \mathrm{const} > 0)$$

Автор благодарит В.В. Сазонова за обсуждения при выполнении работы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке в рамках программы "Университеты России".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воронин А.А., Сазонов В.В.* Периодические движения гироскопических систем // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 5. С. 719–729.
2. *Воронин А.А., Сазонов В.В.* Периодические колебания обобщенно-консервативных механических систем под действием больших гироскопических и потенциальных сил // Изв. АН. МТТ. 1992. № 6. С. 17–29.
3. *Стрыгин В.В., Соболев В.А.* Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988. 256 с.
4. *Сазонов В.В.* О зависимости решений уравнений движения механических систем от большого параметра // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 709–716.
5. *Сазонов В.В., Воронин А.А.* Периодические колебания спутника-гиростата относительно центра масс под действием аэродинамического и гравитационного моментов // Космич. исследования. 1988. Т. 26. Вып. 4. С. 492–507.

Волжский

Поступила в редакцию
21.V.1993