Первое условие (3.7) учтено в (3.5) также первым условием, а второе условие в (3.7) в решении трехмерной задачи следовало бы учесть заменой условия $u_y = 0$ в (3.5) на

$$\tau_{xy} = 0 \tag{3.8}$$

Но, как отмечается в [1], первые два условия (3.5) и условие (3.8) на контуре x = const при решении трехмерной задачи приводят к появлению притягивающих сил.

Вообще, говоря независимо от того, как моделировать свободное опирание, в рамках теории упругости, определение реакций принципиально неточно. Это обусловлено тем, что в зонах локального приложения нагрузки напряженно-деформированное состояние быстро меняется во всех направлениях, и потому КТП неприменима. То же относится и к уточненным теориям пластин как следствие приближенного характера теории, а не ее внутренней противоречивости. Может быть, некоторым утешением в инженерных расчетах является то, что амплитуды опорных реакций, определенные по КТП, завышены по сравнению с действительными (см. [3]), а потому ошибка идет в запас прочности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев В.В.* О теории тонких пластин // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 26–47.
2. *Жилин П.А.* О теориях тонких пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 48–64.
3. *Алфутов Н.А.* О некоторых парадоксах теории тонких упругих пластин // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 65–72.
4. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 365 с.
5. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
6. *Пановко Я.Г.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1985. 287 с.
7. *Лукаш П.А.* Основы нелинейной строительной механики. М.: Стройиздат, 1978. 208 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.VII.1993

УДК 539.3:534.1

© 1994 г. А.А. Локшин

О НЕЛИНЕЙНОМ ОТРАЖЕНИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Выводятся точные формулы для отраженной и преломленной волн, возннкающих при наклонном падении плоской горизонтально поляризованной поперечной волны произвольного профиля на горизонтальную границу раздела двух упругих полупространств, испытывающих нелинейное трение при движении друг относительно друга. В качестве функции трения выбрана гладкая функция общего вида, зависящая от разности горизонтальных скоростей элементов границ рассматриваемых полупространств. Показано, что если функция трения зависит от относительной скорости смещения берегов разреза немонотонным образом, то даже в случае, когда профиль падающей волны гладкий, отраженная и преломленная волны могут содержать сильные разрывы.

До некоторой степени сходная задача решалась [1, 2] для случая кусочно-постоянного трения с возможным проскальзыванием; при этом основное внимание уделялось случаю, когда падающая волна представляет собой импульс прямоугольной формы.

Пусть пространство xyz состоит из двух полупространств: $z > 0$ (среда 1 с модулем сдвига μ_1 и плотностью ρ_1) и $z < 0$ (среда 2 с модулем сдвига μ_2 и плотностью ρ_2).

Рассматриваются только плоские горизонтально поляризованные поперечные волны (SH-волны). Без ограничения общности считаем, что векторы нормалей к фронтам всех распространяющихся волн лежат в плоскости xz; следовательно, ненулевой является только y-компонента перемещения.

Напомним следующее известное соотношение между напряжениями и перемещениями $\mathbf{u} = (0, u, 0)$ в плоской SH-волне, распространяющейся в линейно упругой среде с модулем сдвига, равным μ:

$$(\sigma_{zx}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}) = (0, \mu \partial u / \partial z, 0) \tag{1}$$

Будем считать, что полупространства $z > 0$ и $z < 0$ испытывают нелинейное трение при горизонтальном скольжении друг относительно друга. А именно, предположим, что сила трения $\mathbf{F}_{\mathrm{fr}}^1$, действующая на единицу площади граничной поверхности полупространства $z > 0$, имеет вид

$$\mathbf{F}_{\mathrm{fr}}^1 = (0, -F(\partial(u^+ - u^-)/\partial t), 0); \; u^{\pm} = u|_{z=0\pm} \tag{2}$$

где F – произвольная гладкая монотонно возрастающая функция, такая, что $F(0) = 0$. Силу трения, действующую на единицу площади граничной поверхности полупространства $z < 0$, обозначим $\mathbf{F}_{\mathrm{fr}}^2$. По третьему закону Ньютона имеем

$$\mathbf{F}_{\mathrm{fr}}^2 = -\mathbf{F}_{\mathrm{fr}}^1 \tag{3}$$

Ясно, что условие равенства нулю суммы сил, действующих на бесконечно тонкий элемент среды 1, примыкающий к границе $z = 0$, имеет вид $\sigma_{yz} + (\mathbf{F}_{\mathrm{fr}}^1)_y = 0$, откуда в силу (1), (2)

$$\mu_1 \partial u / \partial z|_{z=0+} = F(\partial(u^+ - u^-)/\partial t) \tag{4}$$

Аналогичное условие для среды 2 дает

$$\mu_2 \partial u / \partial z|_{z=0-} = F(\partial(u^+ - u^-)/\partial t) \tag{5}$$

Запишем, наконец, падающую SH-волну перемещений $\mathbf{u}^{\mathrm{in}} = (0, u^{\mathrm{in}}, 0)$ в виде

$$u^{\mathrm{in}} = f\left(t - \frac{\sin j}{\beta_1}x + \frac{\cos j}{\beta_1}z\right), \; z > 0 \tag{6}$$

Здесь $\beta_s = (\mu_s/\rho_s)^{1/2}$ – скорость сдвиговых волн в среде s ($s = 1,2$); j – острый угол между направлением распространения волны и осью z; $f(\xi)$ – произвольная гладкая функция, равная нулю при $\xi < 0$. Задача состоит в том, чтобы из (4) – (6) определить отраженную и преломленную волны. Для определенности ограничимся случаем, когда

$$\beta_1 > \beta_2 \tag{7}$$

(Условие (7) исключает возможность полного внутреннего отражения в задаче (4) – (6).)

Ясно, что в поставленной задаче у отраженной и преломленной волны отличной от нуля будет только y-компонента, т.е.

$$\mathbf{u}^{\mathrm{ref}} = (0, u^{\mathrm{ref}}, 0), \; \mathbf{u}^{\mathrm{tr}} = (0, u^{\mathrm{tr}}, 0)$$

Будем искать u^{ref} и u^{tr} в виде

$$u^{\mathrm{ref}} = \varphi\left(t - \frac{\sin j}{\beta_1}x - \frac{\cos j}{\beta_1}z\right), \; z > 0 \tag{8}$$

$$u^{\mathrm{tr}} = \psi\left(t - \frac{\sin k}{\beta_2}x + \frac{\cos k}{\beta_2}z\right), \; z < 0 \tag{9}$$

где k – заранее неизвестный острый угол между направлением распространения волны и осью z.

Чтобы определить неизвестные функции φ и ψ, воспользуемся граничными условиями (4), (5), где при $z = 0+$, следует положить $u = u^{in} + u^{ref}$, а при $z = 0$ – положить $u = u^{tr}$.

Итак, имеем из (4)

$$[f'(\xi)-\varphi'(\xi)]\mu_1\beta_1^{-1}\cos j = F(f'(\xi)+\varphi'(\xi)-\psi'(\eta)) \tag{10}$$

$$\xi = t - x\beta_1^{-1}\sin j,\ \ \eta = t - x\beta_2^{-1}\sin k$$

а из (5) имеем аналогичное соотношение

$$\psi'(\eta)\mu_2\beta_2^{-1}\cos k = F(f'(\xi)+\varphi'(\xi)-\psi'(\eta)) \tag{11}$$

Очевидно, что для тождественного выполнения (10), (11) при всех t, x необходимо, чтобы было

$$\beta_1^{-1}\sin j = \beta_2^{-1}\sin k \tag{12}$$

В силу (7) равенство (12) определяет вещественное значение угла k, $0 \leqslant k < \pi/2$, при всех j, $0 \leqslant j < \pi/2$.

Теперь при учете (12) соотношения (10) и (11) запишем в виде системы

$$\begin{aligned}&[f'(\xi)-\varphi'(\xi)]\mu_1\beta_1^{-1}\cos j = F(f'(\xi)+\varphi'(\xi)-\psi'(\xi))\\ &\psi'(\xi)\mu_2\beta_2^{-1}\cos k = F(f'(\xi)+\varphi'(\xi)-\psi'(\xi))\end{aligned} \tag{13}$$

содержащей две неизвестные функции φ' и ψ'. Заметим однако, что система (13) может быть сведена к одному функциональному уравнению относительно одной неизвестной функции. Действительно, вычитая первое уравнение (13) из второго и подставляя результат в первое уравнение (13), получаем уравнение относительно φ':

$$\mu_1\beta_1^{-1}\cos j f'(\xi) = \mu_1\beta_1^{-1}\cos j\varphi'(\xi) + F(f'(\xi)[1-\kappa]+\varphi'(\xi)[1+\kappa]), \tag{14}$$

$$\kappa = \mu_1\beta_2\cos j\,/\,(\mu_2\beta_1\cos k)$$

Так как $1+\kappa > 0, \mu_1\beta_1^{-1}\cos j > 0$, то правая часть равенства (14) представляет собой строго возрастающую гладкую функцию от φ' (при любой гладкой монотонно возрастающей функции F). Следовательно, уравнение (14) однозначно разрешимо относительно φ', причем $\varphi'(\xi)$ оказывается гладкой функцией (одновременно с $f'(\xi)$). Обозначим соответствующее решение через

$$\varphi'(\xi) = G(f'(\xi)) \tag{15}$$

Очевидно, следует положить

$$\varphi(\xi) = \int_0^\xi G(f'(\xi))d\xi \tag{16}$$

поскольку в области, куда падающая волна еще не пришла, перемещение предполагается равным нулю. Теперь из (16), (13) имеем

$$\psi(\xi) = \left[f(\xi) - \int_0^\xi G(f'(\xi))d\xi\right]\kappa \tag{17}$$

Функция $\psi(\xi)$, определяемая равенством (15), очевидно, также оказывается гладкой. Формулы (16), (17) представляют собой искомое решение поставленной задачи.

Замечание. Пусть функция $f(\xi)$ отлична от нуля только при $0 < \xi < A$; $A > 0$. Тогда если функция F ни на каком участке не совпадает с линейной, то, вообще говоря,

$$\varphi(A)=\int_0^A G(f'(\xi))d\xi\neq 0 \qquad (18)$$

Поэтому на луче $[A, \infty)$ имеем $\varphi(\xi)\equiv\varphi(A)$ и $\psi(\xi)\equiv\psi(A)=-\kappa\varphi(A)$ (см. (17)). Таким образом, величины $\varphi(A)$ и $\psi(A)$ – остаточные постоянные смещения полупространств $z>0$ и $z<0$, возникающие после прохождения падающей волны.

Интересен также случай, когда функция F немонотонна. Введем обозначение $g(\xi)=$ $=f(\xi)[1-\kappa]+\varphi'(\xi)[1+\kappa]$, тогда (14) перепишется в виде

$$2\nu f'(\xi)=\nu g(\xi)+F(g(\xi)) \qquad (19)$$

$(\nu=\mu_1\mu_2\cos j\cos k/(\mu_1\beta_2\cos j+\mu_2\beta_1\cos k))$

Ясно, что правая часть равенства (19) может быть как монотонной, так и немонотонной функцией от $g(\xi)$, в зависимости от поведения функции F. Если функция F такова, что правая часть (19) монотонна (как функция от $g(\xi)$), то, очевидно, справедливы все заключения, сделанные выше.

Пусть теперь правая часть (19) – немонотонная функция от $g(\xi)$. Тогда если диапазон значений $f(\xi)$ достаточно велик (т.е. профиль падающей волны достаточно крутой), то для некоторых ξ уравнение (19) будет иметь более одного решения. Кроме того, геометрически очевидно, что в этой ситуации всякая однозначная ветвь $\tilde{g}(\xi)$ решения уравнения (19) неизбежно оказывается разрывной. Тем самым разрывными окажутся также функции $\varphi'(\xi)$ и $\psi'(\xi)$, т.е. отраженная и преломленная волны перемещений несут на себе разрывы первых производных.

Таким образом, в случае немонотонной функции трения, нелинейное отражение и преломление на границе двух линейных сред может представлять собой механизм формирования разрывов в волновых задачах.

Заметим, что наличие сильных разрывов у функции трения вовсе не обязательно влечет за собой образование сильных разрывов у отраженной и преломленной волн. Например, если $F(g)=k\,\mathrm{sign}\,g$, $k>0$, то при гладкой функции $f(\xi)$, очевидно, существует непрерывное решение $g(\xi)$ уравнения (19), поскольку правая часть (19) оказывается монотонной функцией от g. Таким образом, механизмом, формирующим разрывы отраженной и преломленной волн является именно немонотонность функции трения, а не наличие у нее сильных разрывов. Нетрудно видеть также, что разрывы, образующиеся вследствие немонотонности функции трения, устойчивы относительно малых изменений этой функции, а также малых изменений профиля падающей волны. Отметим, наконец, что немонотонность функции трения приводит при определенных условиях к возникновению автоколебаний в некоторых родственных задачах геофизики [3].

Метод, предложенный в данной работе, переносится на случай горизонтально слоистых сред, когда каждый из слоев однородный, изотропный, линейно упругий и испытывает нелинейное трение при горизонтальном смещении относительно соседнего слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зволинский Н.В., Шхинек К.Н., Чумиков Н.И.* Взаимодействие плоской волны с разрезом в упругой среде // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1983. № 4. С. 36–46.
2. *Зволинский Н.В., Симонов И.В.* Взаимодействие плоской волны с разрезом в упругой среде при транссейсмическом режиме // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 172–177.
3. *Зволинский Н.В.* Фрикционные автоколебания упругого слоя // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1990. № 9. С. 3–13.

Москва

Поступила в редакцию
7.VII.1993