

О КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИН

В традиционном изложении классической теории пластин (КТП) поперечные силы, по определению, являются интегралами по толщине пластины от трансверсальных касательных напряжений. Это приводит к нарушению закона Гука для указанных напряжений, несогласованности уравнений равновесия КТП с принципом возможных перемещений, появлению противоречий типа, существующих в задаче о балке, изгибаемой статически эквивалентными нагрузками. Отмеченные недостатки традиционного изложения можно устранить, если считать поперечными силами, по определению, статически эквивалентно "повернутые" изгибающие и крутящие моменты (что в случае КТП не связано с принципом Сен-Венана). Такая трактовка поперечных сил лежит в основе предлагаемого варианта изложения КТП. Дается также анализ работ, в которых высказаны сомнения в корректности КТП. Показано, что приводимая авторами этих работ аргументация не может служить основанием для отказа от использования КТП.

II. Принцип возможных перемещений (виртуальных работ) и уравнения равновесия. Для сплошного деформируемого тела, занимающего объем V и ограниченного поверхностью O , при малых деформациях в прямоугольных декартовых координатах x, y, z принцип возможных перемещений записывается в виде

$$\delta'U = \delta'U_1 + \delta'U_2 = 0 \quad (1.1)$$

где

$$\delta'U_1 = \iiint_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dV \quad (1.2)$$

$$\delta'U_2 = -\iiint_V (F_x^* \delta u + F_y^* \delta v + F_z^* \delta w) dV - \iint_O (P_x^* \delta u + P_y^* \delta v + P_z^* \delta w) dO \quad (1.3)$$

$$\epsilon_x = \partial u / \partial x, \quad \epsilon_y = \partial v / \partial y, \quad \epsilon_z = \partial w / \partial z$$

$$\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x, \quad \gamma_{xz} = \partial w / \partial x + \partial u / \partial z, \quad \gamma_{yz} = \partial w / \partial y + \partial v / \partial z \quad (1.4)$$

Здесь F_x^*, F_y^*, F_z^* и P_x^*, P_y^*, P_z^* – объемные и поверхностные силы. Звездочка означает, что эти величины заданы. Для обозначения виртуальных работ используется символ δ' , чтобы подчеркнуть, что речь не идет о вариации функционала.

Принцип возможных перемещений (1.1) является фундаментальным вариационным (не в смысле вариации функционала, а в смысле работы на вариациях перемещений) принципом, и уравнения равновесия получаются из него путем тождественных преобразований без введения каких-либо связей между деформациями и напряжениями.

Получим уравнения равновесия для тела в виде пластины толщиной h . Для этого сначала преобразуем формулы (1.2) и (1.3) в соответствии с принимаемыми в КТП кинематическими допущениями:

$$\epsilon_z = 0, \quad \gamma_{xz} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0$$

При учете этих допущений из (1.4) вытекает

$$w = w(x, y), \quad u = \vartheta_x(x, y)z, \quad v = \vartheta_y(x, y)z \quad (1.5)$$

где $\vartheta_x = -\partial w / \partial x$, $\vartheta_y = -\partial w / \partial y$ – углы поворота нормалей к срединной плоскости.

При получении формул (1.5) использовались условия $u(z=0) = 0$, $v(z=0) = 0$. Это, однако, не является дополнительным допущением, поскольку можно показать, что уравнения равновесия в КТП полностью разделяются на плоскую задачу и задачу изгиба. Ниже рассматривается только последняя.

В соответствии с введенными допущениями формулы (1.2) и (1.3) преобразуются к виду

$$\delta'U_1 = \iiint_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dV \quad (1.6)$$

$$\delta'U_2 = -\iint_{\Omega} (q \delta w + m_x \delta \vartheta_x + m_y \delta \vartheta_y) d\Omega - \int_S (Q^* \delta w - M_v^* \delta w_{,v} - M_s^* \delta w_{,s}) dS \quad (1.7)$$

где

$$q = \int F_z^* dz + \sigma_z^*(h/2) - \sigma_z^*(-h/2)$$

$$m_x = h[\tau_{xz}^*(h/2) - \tau_{xz}^*(-h/2)], \quad m_y = h[\tau_{yz}^*(h/2) - \tau_{yz}^*(-h/2)]$$

$$Q^* = \int \tau_{vz}^* dz, \quad M_v^* = \int \sigma_v^* z dz, \quad M_s^* = \int \tau_{sv}^* z dz$$

Здесь Ω – площадь срединной плоскости пластины, ограниченной контуром S . Нормаль к контуру v задается направляющими косинусами $\cos(x,v) = \cos\varphi$, $\cos(y,v) = \sin\varphi$. Поскольку согласно наложенным кинематическим связям $\delta \epsilon_z = \delta \gamma_{xz} = \delta \gamma_{yz} = \delta u(z=0) = \delta v(z=0) = 0$, то соответствующие слагаемые в формулах (1.6), (1.7) опущены.

Можно сразу заметить, что во всех дальнейших преобразованиях не участвуют слагаемые, содержащие τ_{xz} , τ_{yz} , σ_z , а потому эти напряжения не будут входить в уравнения равновесия.

Преобразуем (1.6) следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta'U_1 &= \iiint_V \left\{ \sigma_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right\} dV = \\ &= \iiint_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x \delta u) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y \delta v) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} \delta u) + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy} \delta v) \right\} dV - \\ &= \iiint_V \left\{ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta u + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \delta v + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \delta u + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \delta v \right\} dV \end{aligned} \quad (1.8)$$

Подставляем сюда (1.5), аналогичным образом избавляемся от вариации под знаком производной. Далее интегрируем по толщине и, используя формулу Гаусса – Остроградского, получаем окончательное выражение для виртуальной работы:

$$\begin{aligned} \delta'U &= -\iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + q \right\} \delta w d\Omega - \\ &= -\int_S \left\{ (M_v - M_v^*) \delta w_{,v} + (M_s - M_s^*) \delta w_{,s} - (Q - Q^* + m) \delta m \right\} ds = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$M_x = \int \sigma_x z dz, \quad M_y = \int \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int \tau_{xy} z dz, \quad m = m_x \cos\varphi + m_y \sin\varphi$$

$$M_v = M_x \cos^2 \varphi + M_y \sin^2 \varphi + M_{xy} \sin 2\varphi, \quad M_s = \frac{1}{2} (M_y - M_x) \sin 2\varphi + M_{xy} \cos 2\varphi$$

$$Q = \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \cos\varphi + \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \sin\varphi$$

Поскольку (1.9) – уравнение работы внешних и внутренних сил на возможных перемещениях, то множитель перед δw в первом интеграле является проекцией на ось z внешних и внутренних сил, действующих на элемент пластины $hd\Omega$. Условие равновесия этого элемента имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) = -q - \frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_y}{\partial y} \quad (1.10)$$

Рассмотрим теперь контурный интеграл в (1.9). Обозначим подынтегральное выражение L . Поскольку задание δw на контуре полностью определяет $\delta w_{,s}$, то третье слагаемое должно быть преобразовано интегрированием по частям

$$-\int L ds = -\int \Phi ds - (M_s - M_s^*) \delta w \Big|_{C_1^-}^{C_1^+} \quad (1.11)$$

$$\Phi = (M_v - M_v^*) \delta w_{,v} - \left(Q + \frac{\partial M_s}{\partial s} - Q^* + m - \frac{\partial M_s^*}{\partial s} \right) \delta w$$

Внеинтегральное слагаемое вычисляется как разность значений соответствующей функции на концах контура C_1 , где заданы силовые условия.

Рассмотрим теперь случай угловой точки s^* на контуре, когда φ меняется скачком

$$-\int_{C_1} L ds = \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ -\int_{C_1^-}^{s^*-a} L ds - \int_{s^*+a}^{C_1^+} L ds - \int_{s^*+a}^{C_1^+} L ds \right\} - Q^*(s^*) \delta w(s^*) \quad (1.12)$$

Появление последнего слагаемого обусловлено возможностью наличия в угловой точке сосредоточенного воздействия, учет которого в L осуществляется с помощью дельта-функции. Окончательно получим

$$-\int_{C_1} L ds = -\int_{C_1^-}^{s^*-0} \Phi ds - \int_{s^*+0}^{C_1^+} \Phi ds - (M_s - M_s^*) \delta w \Big|_{C_1^-}^{C_1^+} + \\ + \left[M_s(s^*+0) - M_s(s^*-0) + M_s^*(s^*-0) - M_s^*(s^*+0) - Q^*(s^*) \right] \delta w(s^*) \quad (1.13)$$

Приравняв нулю выражение в квадратных скобках, получим условия на разрыве. Аналогичные условия, приводимые в [2,5], не имеют слагаемого $Q^*(s^*)$ вследствие неучета возможности приложения сосредоточенных сил.

Таким образом, на гладкой части контура задаются условия

$$w = w^* \leftrightarrow Q + \frac{\partial M_s}{\partial s} = Q^* + \frac{\partial M_s^*}{\partial s} - m, \quad w_{,v} = w_{,v}^* \leftrightarrow M_v = M_v^* \quad (1.14)$$

а в точке излома контура – условие на разрыве

$$w(s^*) = w^*(s^*) \leftrightarrow M_s(s^*+0) - M_s(s^*-0) = M_s^*(s^*+0) - M_s^*(s^*-0) + Q^*(s^*) \quad (1.15)$$

Поскольку входящие в формулу (1.13) слагаемые имеют ясный физический смысл, а именно представляют собой работу по деформированию контура пластины, то и множители перед возможными обобщенными перемещениями являются соответствующими обобщенными контурными силами. Таким образом, на контуре действует внешняя поперечная контурная сила $K^* = Q^* + \partial M_s / \partial s - m$ и момент M_v^* , которым соответствуют внутренние силовые факторы: $K = Q + \partial M_s / \partial s$ и M_v . Для угловой точки поперечные контурные силы K^v и K^{v*} определяются соответственно левой и правой частями равенства (1.15). Как видим, одна и та же поперечная контурная сила K^* может быть по-разному задана в терминах Q^* , M_s^* .

Полученные уравнения равновесия внутренних (1.10) и контурных (1.14), (1.15) элементов пластины верны для любых связей между напряжениями и деформациями, в том числе и в случаях, когда напряжения нельзя выразить непосредственно как функцию деформаций, например, в теории пластического течения и т.п.

В случае изотропно-упругого тела имеем

$$\sigma_x = E(\epsilon_x + \mu \epsilon_y) / (1 - \mu^2), \quad \sigma_y = E(\epsilon_y + \mu \epsilon_x) / (1 - \mu^2), \quad \tau_{xy} = E \gamma_{xy} / 2(1 + \mu) \quad (1.16)$$

В законе Гука учтено, что $\sigma_z = 0$. Подставляя (1.16) в (1.10), (1.14), (1.15) при учете (1.4),

(1.5), получим уравнение Жермен – Лагранжа и силовые контурные условия в перемещениях. Отметим, что ни о каком нарушении закона Гука для τ_{xz}, τ_{yz} не идет и речи.

Необходимо обратить внимание на два аспекта представленного вывода краевой задачи КТП.

Во-первых, трансверсальные касательные напряжения τ_{xz}, τ_{yz} не участвуют в уравнивании элемента пластины, поскольку не совершают работы на нулевых деформациях γ_{xz}, γ_{yz} . Кирхгоф, Буссинеск, Клебш, Сен-Венан, Кельвин и Тэт [1] также полагали $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, хотя и не связывали это с принципом возможных перемещений. Однако эти авторы не пытались объяснить, как в таком случае осуществляется уравнивание внешней поперечной нагрузки, что, по-видимому, и привело к современному (традиционному) изложению КТП, когда в качестве внутренних поперечных сил, уравнивающих внешнюю нагрузку, рассматриваются интегралы по толщине от трансверсальных касательных напряжений $Q_x = \int \tau_{xz} dz (x \rightleftharpoons y)$ где $\tau_{xz} \neq 0, \tau_{yz} \neq 0$. Такая трактовка поперечных сил приводит к недостаткам в изложении, перечисленным в аннотации. Попытка установить механизм уравнивания внешних поперечных нагрузок, не отказываясь от отсутствия касательных напряжений τ_{xz}, τ_{yz} , делается в следующем разделе.

Во-вторых, для неконтурного элемента пластины имеется только одно уравнение равновесия (1.10) – в проекции на ось z , собственно уравнений баланса моментов относительно осей x, y нет. Это не означает, что баланс моментов нарушен. Подробное объяснение дается ниже. Заметим лишь, что такая ситуация не является необычной. Так, уравнения классической теории упругости в перемещениях – это три уравнения равновесия в проекциях на оси x, y, z . Хотя уравнений баланса моментов относительно этих осей в явном виде нет, баланс моментов учтен через "закон парности" касательных напряжений автоматически.

2. Об интерпретации поперечных сил. Согласно принятым допущениям, в рамках КТП пластину можно считать соединением бесконечно большого числа абсолютно жестких и бесконечно малых в плане призм высотой h .

Говоря, что призмы являются абсолютно жесткими, мы имеем в виду возможность статически эквивалентных преобразований, описываемых далее, но это не значит, что отсутствуют деформации $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ в плоскостях параллельных срединной плоскости пластины и нарушаются условия неразрывности деформаций.

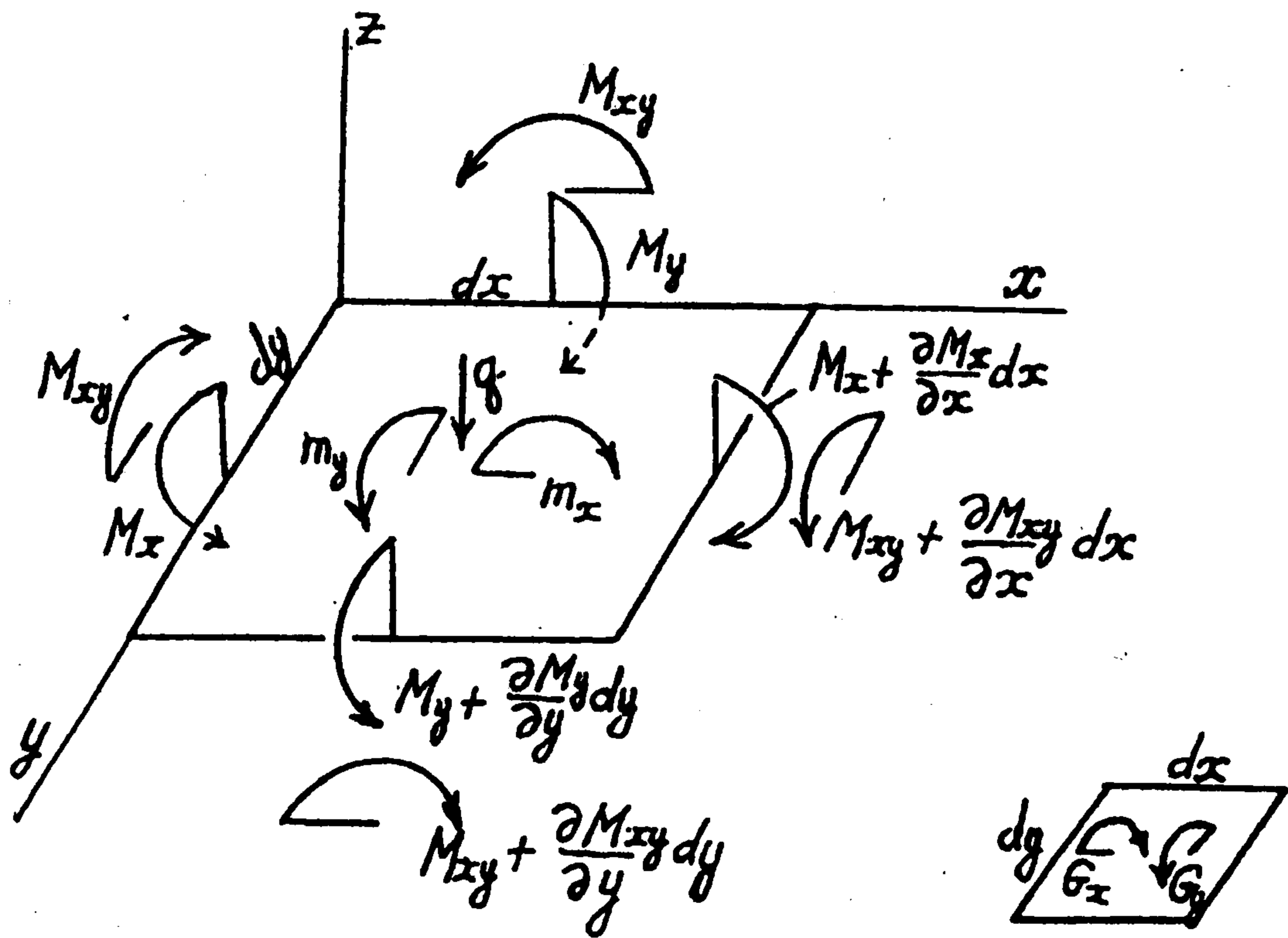
На призмы действуют изгибающие моменты M_x, M_y , крутящие моменты M_{xy} , распределенные внешние моменты m_x, m_y , распределенная внешняя нагрузка q (фиг. 1). Суммируя моменты, вращающие призму вокруг осей x и y , и отбрасывая величины более высокого порядка малости, получим выражение для равнодействующих моментов

$$\begin{aligned} G_x dxdy &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial M_x}{\partial x} dxdy + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dxdy + m_x dxdy \\ G_y dxdy &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial M_y}{\partial x} dxdy + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dxdy + m_y dxdy \end{aligned} \quad (2.1)$$

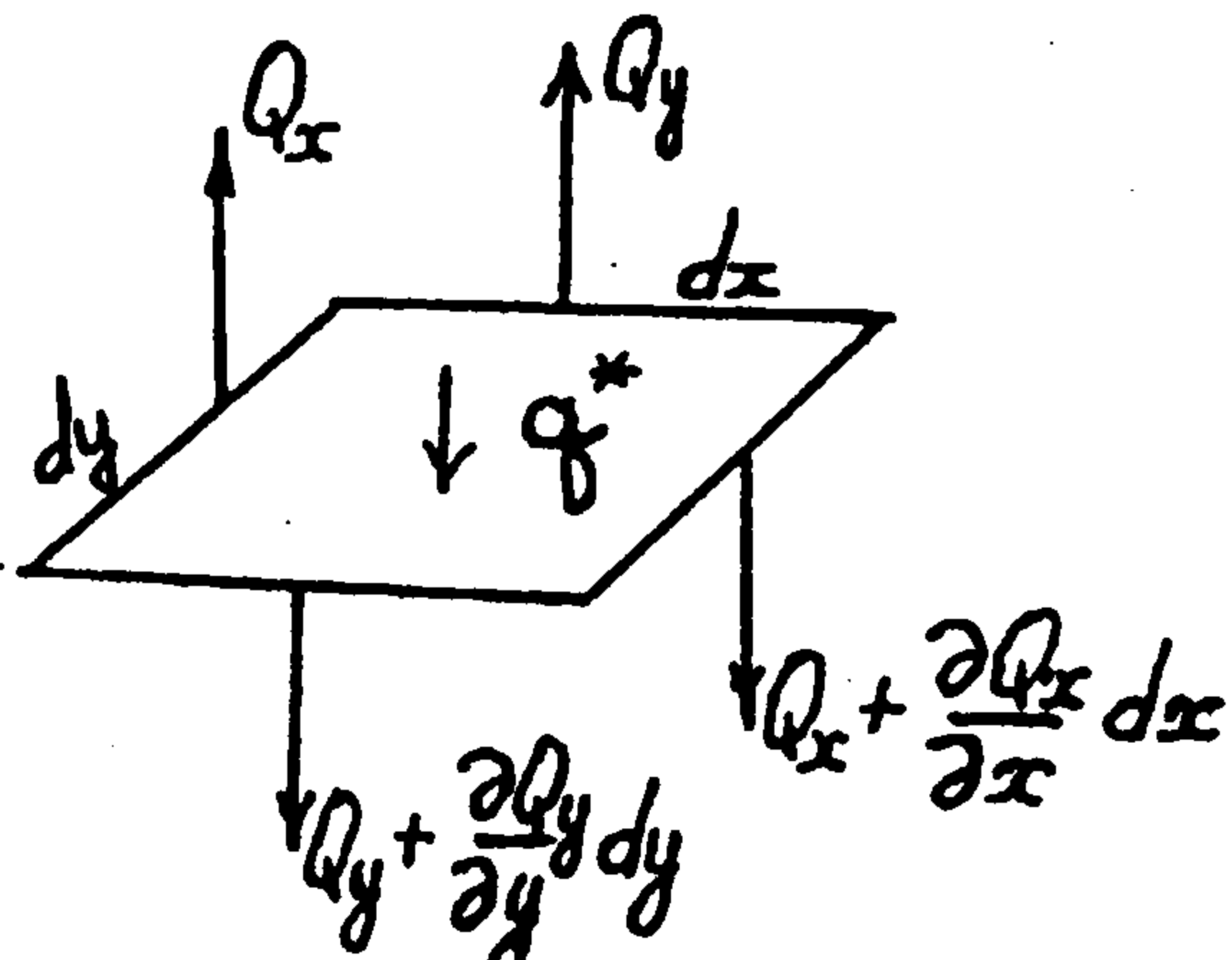
Поскольку каждая призма – абсолютно "жесткое тело", для нее правомерно статически эквивалентное преобразование моментов, которое иллюстрирует фиг. 2. При преобразовании в направлении x следует считать $H \stackrel{\text{def}}{=} G_x, l \stackrel{\text{def}}{=} x$, а в направлении y – $H \stackrel{\text{def}}{=} G_y, l \stackrel{\text{def}}{=} y$. Таким образом, нагрузка уравнивается распределенными силами $\partial G_x / \partial x$ и $\partial G_y / \partial y$ во внутренней области пластины

$$\partial G_x / \partial x + \partial G_y / \partial y + q = 0 \quad (2.2)$$

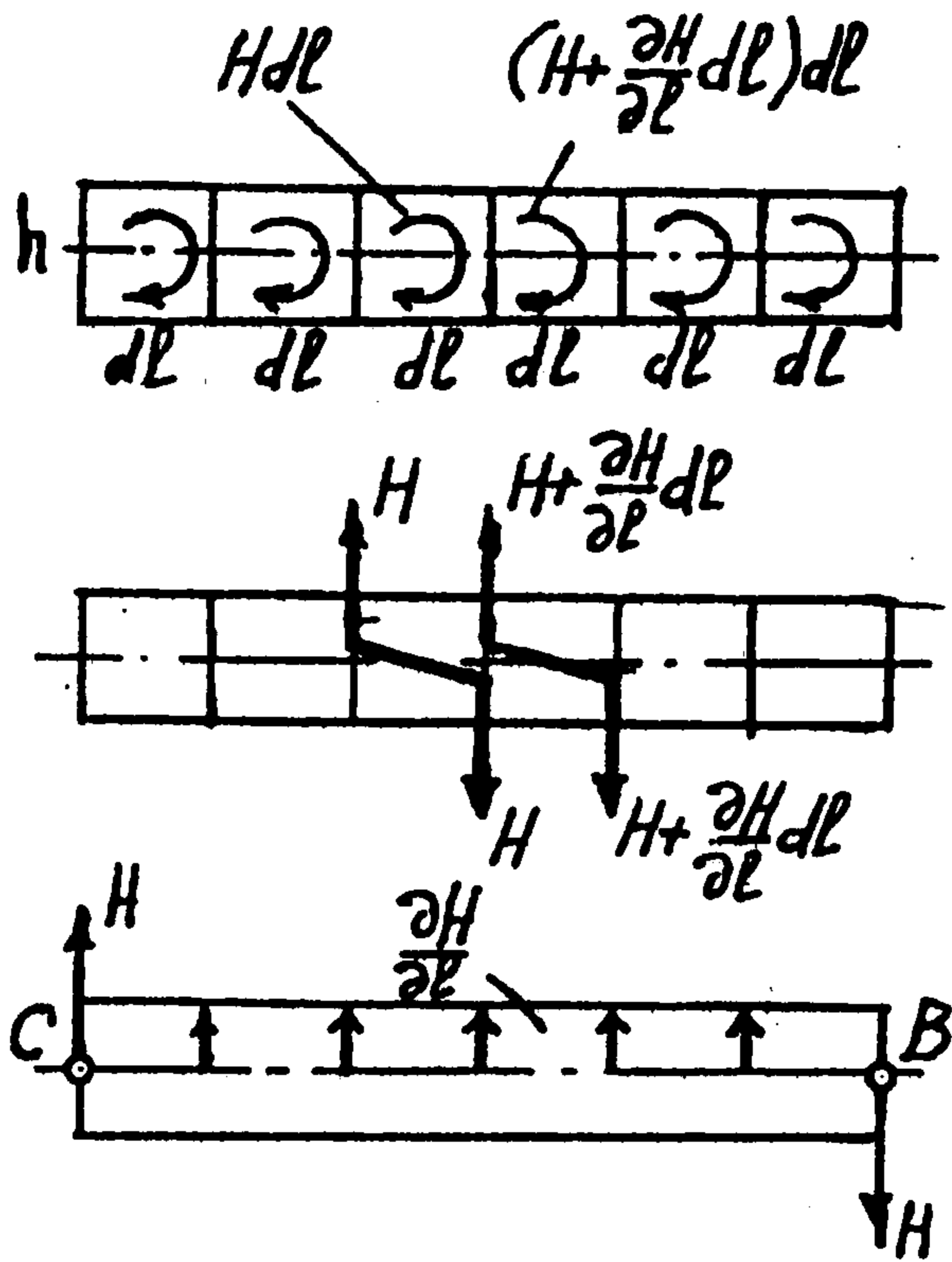
или, отделяя осредненный внутренний момент $Q_x dxdy, Q_y dxdy$ от внешнего момента $m_x dxdy, m_y dxdy$, получим уравнение равновесия элемента пластины, на который действует внешняя поперечная нагрузка q^* , уравниваемая внутренними поперечными силами Q_x, Q_y в



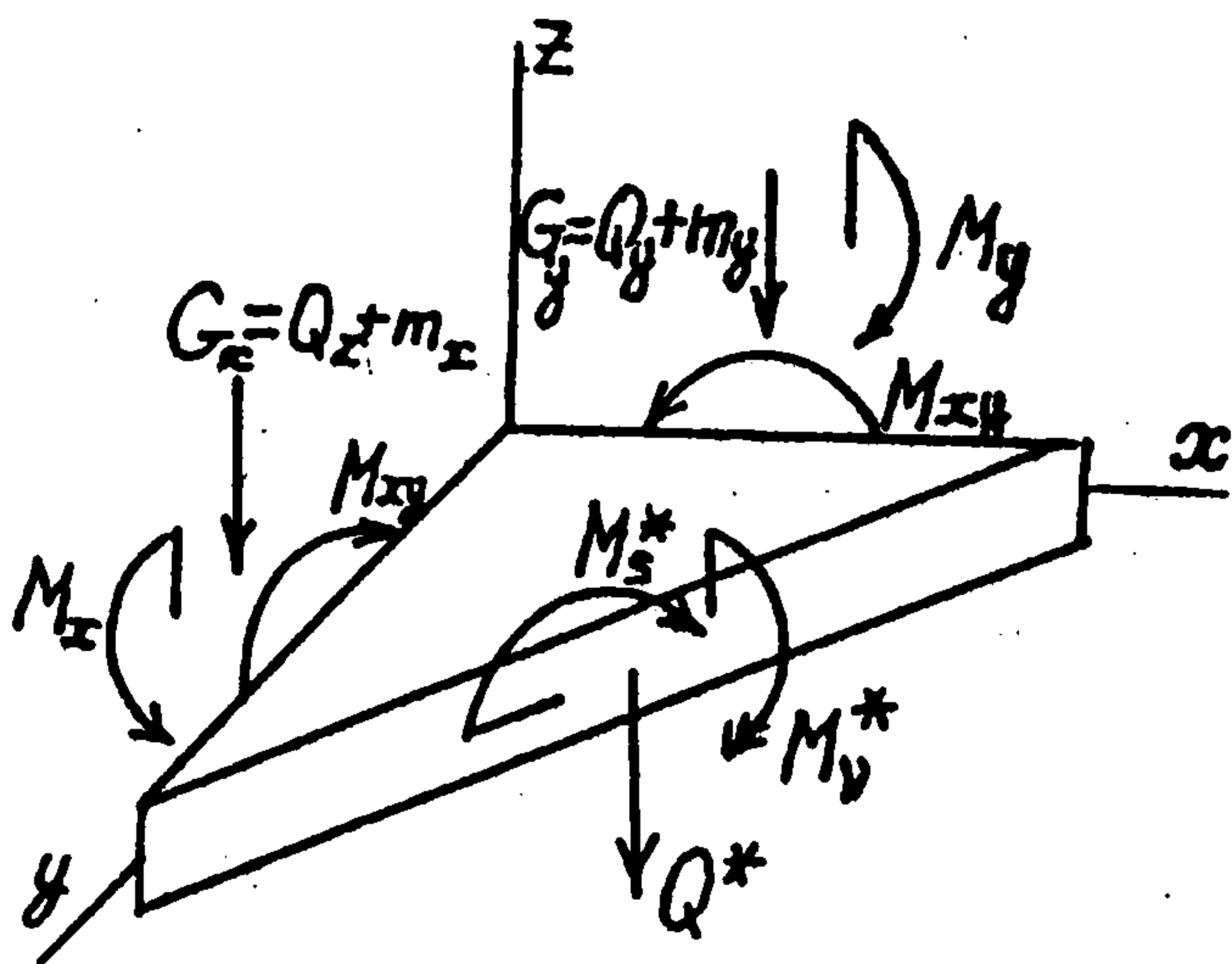
Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2



Фиг. 4

проекции на ось z (фиг. 3)

$$\partial Q_x / \partial x + \partial Q_y / \partial y + q^* = 0 \quad (2.3)$$

Здесь

$$Q_x^{\text{def}} = \partial M_x / \partial x + \partial M_{xy} / \partial y, \quad Q_y^{\text{def}} = \partial M_y / \partial y + \partial M_{xy} / \partial x \quad (2.4)$$

$$q^*^{\text{def}} = q + \partial m_x / \partial x + \partial m_y / \partial y$$

– определения поперечных сил как "повернутых" моментов. Соотношения (2.4) не являются уравнениями баланса моментов, они – равенства по определению. После того как все моменты, внутренние и внешние, действующие на элемент пластины, "повернуты", необходимость в отдельном рассмотрении условий баланса отпадает.

Уравнение (2.3) является необходимым и достаточным условием самоуравновешенности элемента пластины. Условие уравновешенности без применения преобразования моментов имели бы вид

$$G_x = 0, \quad G_y = 0, \quad q = 0 \quad (2.5)$$

который не представляет практического интереса, хотя и является достаточным для самоуравновешенности элементов. Отметим, что аналогичные рассуждения об условиях самоуравновешенности цепочки жестких крестообразных элементов были использованы [6], (с. 69–71) для иллюстрации преобразования Кельвина – Тэта, о котором пойдет речь ниже.

Рассмотрим теперь условия на контуре s . Из равновесия контурных элементов (фиг. 4) получим

$$M_v = M_v^*, \quad Q = Q^* - m, \quad M_s = M_s^* \quad (2.6)$$

причем M_v, Q, M_s определяются формулами (1.9). Применяя далее статически эквивалентное преобразование для $M_s^{\text{def}}(H = M_s^{\text{def}}, l = s)$, впервые предложенное Кельвином и Тэтом, получаем краевые условия (1.14), (1.15).

Необходимо обратить внимание на то, что по граням контурных элементов приложены не только моменты, но и поперечные силы $G_x = Q_x + m_x$ и $G_y = Q_y + m_y$. Это следствие того, что данные грани – конечные точки для статически эквивалентных преобразований во внутренней области, т.е. точки B или C на фиг. 2.

Подчеркнем различия предложенной трактовки КТП с традиционной. Во-первых, поперечными силами в предлагаемой трактовке являются "повернутые" моменты (2.4); в традиционной же трактовке поперечные силы – это интегралы от касательных напряжений

$$Q_x^{\text{def}} = \int \tau_{xz} dz, \quad Q_y^{\text{def}} = \int \tau_{yz} dz \quad (2.7)$$

Во-вторых, в традиционной трактовке уравнения (2.4) после замены знака равенства по определению ($=$) на знак простого равенства являются уравнениями баланса моментов. Таким образом, в традиционной трактовке КТП имеем уравнения равновесия. В предложенной же выше трактовке КТП необходимость в отдельном рассмотрении уравнений баланса моментов отпадает.

Из приведенных рассуждений видно, что предложенная в этом разделе трактовка КТП хорошо согласуется с принципом возможных перемещений. Заметим также, что принятие в КТП гипотезы недеформируемых нормалей приводит к необходимости статически эквивалентных преобразований. Эти преобразования никак не связаны с принципом Сен-Венана, а вызваны только принятыми кинематическими допущениями. Вопрос о статически эквивалентных преобразованиях на контуре решен давно, а наиболее исчерпывающее его изложение содержится в [6] (с. 58–71). Предложенный выше путь построения КТП, по существу, заключается в распространении преобразования Кельвина – Тэта на внутреннюю область пластины.

3. О некоторых задачах КТП. Перейдем к рассмотрению примеров [1–3], которые

явились причиной утверждений о том, что КТП "не позволяет получить корректного решения некоторых задач, которые по постановке не выходят за рамки принятых гипотез", а следовательно, "возникают естественные сомнения в ее завершенности как физической теории" [1].

Задача о кручении пластины. "Вообще не имеет решения в рамках КТП задача о свободном кручении прямоугольной пластины, поперечные края которой нагружены крутящими моментами, а продольные края свободны. Как известно, в соответствии с решением Сен-Венана в нагруженной таким образом пластине отсутствуют нормальные напряжения, а следовательно, изгибающие моменты и кривизны. В результате ее прогиб принимает форму $w = cxy$ (c – постоянная), соответствующий крутящим моментам, действующим как на поперечных, так и на продольных краях. Обеспечить отсутствие этих моментов на продольных краях, т.е. удовлетворить заданные граничные условия в рамках КТП оказывается невозможным" [1].

Подставляя $w = cxy$ в контурные условия (1.14), (1.15) при учете закона Гука, найдем

$$K^* = Q^* + \frac{\partial M_s^*}{\partial s} - m = 0, \quad M_v^* = 0 \quad (3.1)$$

Для угловой точки

$$K^{v*} = M_s^*(s^* + 0) - M_s^*(s^* - 0) + Q^*(s^*) = -2(1 - \mu)cD, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \quad (3.2)$$

Формулы (3.1), (3.2) однозначно определяют внешние контурные силовые нагрузки, которым соответствует заданное значение прогиба. А именно, пластина изгибается по поверхности $w = cxy$ путем приложения сосредоточенных попарно противоположных сил в углах пластины. Из формулы (3.2) ясно, что заданное значение K^{v*} можно по-разному выразить в терминах M_s^* и Q^* . Так, можно считать, что на пластину действуют одинаковые крутящие моменты M_s^* по всем сторонам, а внешние крутящие моменты M_s^* действуют только по противоположным сторонам и т.д. Все эти варианты приложения внешних нагрузок статически эквивалентны. Поэтому понятие "крутящего момента" на контуре бессмысленно в рамках КТП: его невозможно выделить из поперечной кирхгофсовской силы на контуре. Нельзя говорить о наличии или отсутствии крутящего момента на контуре, можно лишь сказать о наличии или отсутствии кирхгофовских сил. Различные в постановке трехмерной теории упругости задачи кручения пластины попарно противоположными угловыми силами или крутящими моментами по противоположным сторонам или другие задачи, для которых выполнены условия (3.1), (3.2), в рамках КТП "сливаются" в одну. В этом проявляется приближенный характер КТП, но не ее внутренняя противоречивость.

О порядке уравнений КТП. "...в механике порядок уравнения n и число краевых условий m тесно связаны с числом используемых законов сохранения k , а именно $n = 2k, m = k$. В теории изгиба пластин используются три закона сохранения: баланс поперечных сил и два уравнения баланса моментов. Это означает, что теория пластин должна описываться уравнениями 6-го порядка с тремя краевыми условиями." В КТП же, "описывающейся уравнениями 4-го порядка с двумя краевыми условиями, один закон сохранения потерян: уравнение баланса поперечных сил, строго говоря, не выполняется" [2].

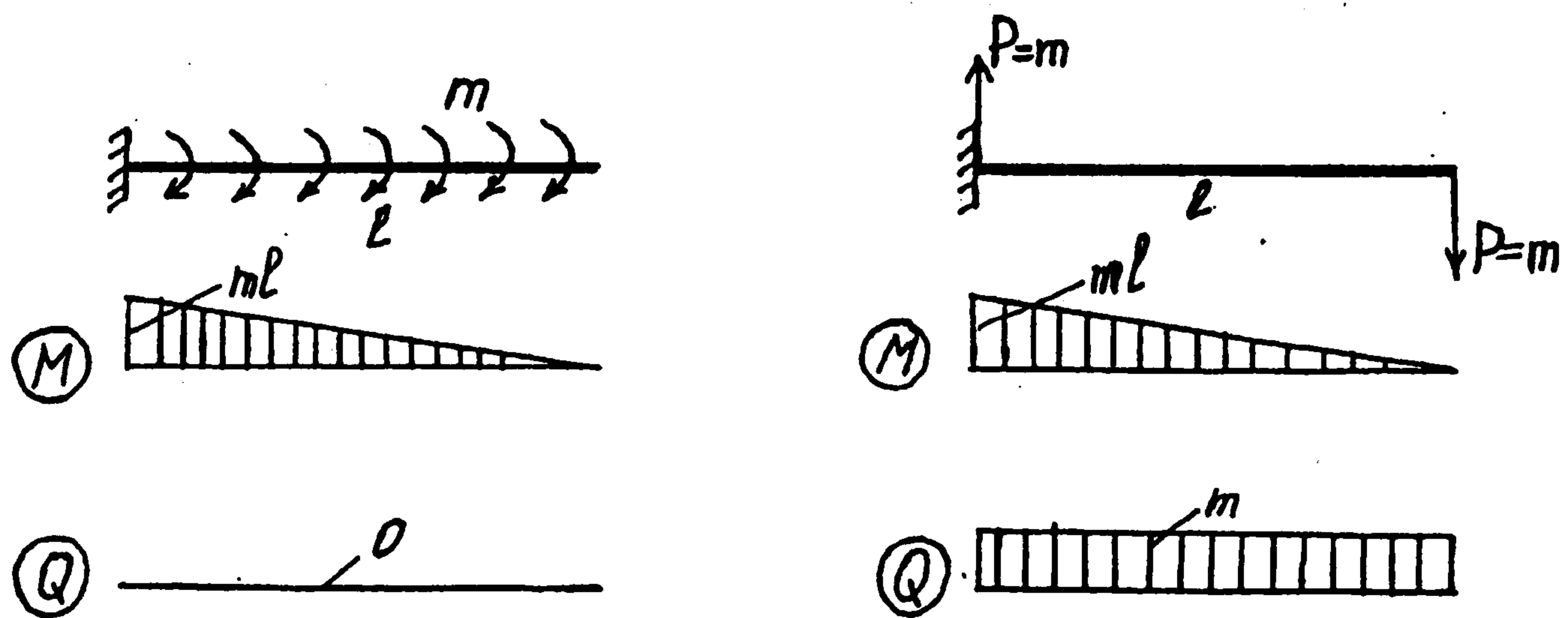
По-видимому, применимость гипотезы о связи порядка уравнений с числом законов сохранения ограничена в большей степени, чем это предполагается в приведенной цитате.

Как показано в разделе 2, все условия равновесия в КТП полностью выполняются.

Приведем другой пример, опровергающий цитированную гипотезу. Уравнения теории упругости в перемещениях имеют шестой порядок. Хотя по логике автора [2] им следовало бы иметь двенадцатый порядок: три уравнения равновесия в проекциях на оси x, y, z плюс три уравнения баланса моментов относительно этих осей, и все это умножить на два.

Вообще, говоря сомнительна сама идея нахождения некоторого принципа, жестко связывающего физические модели (сплошная среда, равновесие и т.п.) и математические модели (тип и порядок уравнений и т.п.). Одна и та же физическая модель – сплошная упругая пластина может иметь различные математические модели – мембрана (уравнение 2-го порядка), КТП (уравнение 4-го порядка), теория пластин типа Рейсснера (6-й порядок).

В качестве иллюстрации невыполнения условия баланса поперечных сил рассмат-



Фиг. 5

ривалась [2] задача о кручении пластины силами в углах (см. выше). "Рассмотрим теперь четверть пластины $0 \leq x \leq a/2$, $0 \leq y \leq b/2$. Получим пластину, на которую действует только сила $2Q$, сосредоточенная в угле. Других поперечных сил на нее не действует. Баланс поперечных сил очевидным образом нарушен" [2]. Автор, однако, упускает, из вида что при вырезании четверти создаются новые три угла, в которых действуют те же сосредоточенные силы, что и в исходной пластине.

Задача о балке. Суть противоречия, отмеченного в [2], состоит в том, что для задач изгиба балок статически эквивалентными нагрузками получаются одинаковые прогибы, но различные прерывающие силы. На фиг. 5 приведены эпюры Q , M для такого случая. В традиционном изложении КТП поперечные силы Q и изгибающие моменты M при наличии распределенной моментной нагрузки m связаны между собой формулой

$$Q = \partial M / \partial x + m \quad (3.3)$$

и противоречие очевидно.

Формула (3.3) получается из рассмотрения равновесия элемента стержня, на который действует распределенная моментная нагрузка. При этом поскольку $Q \stackrel{\text{def}}{=} \int \tau_{xz} dz$, то Q , M считают действующими одновременно. Если же опираться на предложенную в разделе 2 интерпретацию поперечной силы как "повернутого" момента, то вместо (3.3) имеем

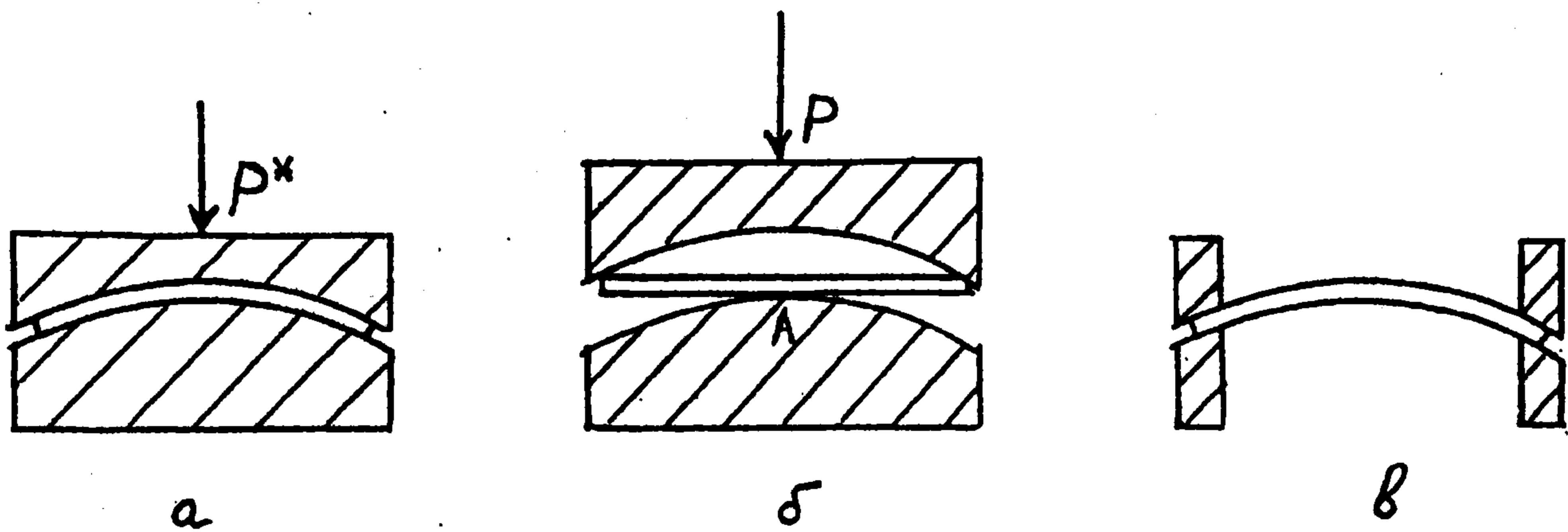
$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \partial M / \partial x \quad (3.4)$$

и никакого противоречия для обоих вариантов нагружения нет. С точки зрения этой трактовки КТП различие в эпюрах на фиг. 5 объясняется тем, что в одном случае (справа на фиг. 5) при построении эпюры Q моменты были "повернуты", а в другом – нет. Вообще говоря, целесообразно сразу повернуть внешние распределенные моменты и рассматривать обобщенную поперечную нагрузку как в (2.3).

Задачи о штампе. "Примером решения, не согласующегося с физическим смыслом задачи, является задача о пластине, изгибаемой пологим штампом, поверхность которого задается уравнением $z = a_0 + a_1 x^2 + a_2 y^2$. Очевидно, что в законе контакта со штампом прогиб также будет определяться полиномом второго порядка. "Отсюда следует, что контактное давление, определяемое из уравнения Жермен – Лагранжа, отсутствует, а "равновесие штампа обеспечивается силами, распределенными по границе области контакта" [1].

В приведенных рассуждениях принимается очевидной возможность появления пятна контакта штампа с пластиной. Однако такое предположение уязвимо.

Процесс нагружения круглой пластины осесимметричным (для простоты) штампом начинается с приложения сосредоточенной силы в центре пластины в точке начального контакта со штампом. Функция прогибов в этом случае имеет вид [4]: $w_1 = b_0 + b_1 r^2 + b_2 r^2 \ln r^2$, где $r^2 = x^2 + y^2$; b_0, b_1, b_2 – постоянные. Это выражение не является полиномом второго порядка, и пятна контакта нет. При увеличении давления штампа возникает окружность касания, и теперь контактные усилия передаются по всей этой окружности.



Фиг. 6

При этом прогибы с внешней по отношению к окружности стороны определяются выражением типа w_1 , а внутри окружности — выражением $w_0 = c_0 + c_1 r^2$, которое при условиях $c_0 = a_0$, $c_1 = a_1 = a_2$ (для определенного значения давления штампа) совпадает с поверхностью штампа. Но при дальнейшем увеличении нагрузки это совпадение нарушается и возникают новые окружности контакта и т.д. Таким образом, в процессе нагружения изменяется расчетная схема. Такого рода задачи было предложено [7] называть конструктивно-нелинейными.

Если в рассмотренном случае делается предположение о локальной зоне контакта, то в работе [3] рассматривается цилиндрический изгиб с помощью двух штампов (фиг. 6,а). Здесь снова имеем конструктивно-нелинейную задачу. В начальный момент под действием сосредоточенной силы в точке А свободно-опертая пластина изгибается по закону кубической параболы (фиг. 6,б). Для штампов, очерченных по квадратичной параболе, при достижении P некоторого значения возникают новые точки контакта и т.д. Опять в процессе нагружения изменяется расчетная схема. При $P = P^*$ система приобретает вид как на фиг. 6,а.

Говорится [3] о следующем противоречии. Из фиг. 6, а, б видно, что свободно опертая пластина изгибается нормальным давлением штампа. Но подставляя в краевую задачу КТП выражение для прогибов вида $w_3 = d_0 + d_1 x^2$, можно получить, что для такого изгибания пластины необходимы дополнительные контурные моменты, которых при свободном опирании нет.

В этих рассуждениях упущено, что в конце процесса нагружения пластина уже не является свободно-опертой. Она защемлена. Именно это защемление создает изгибающий момент, позволяющий придать пластине форму квадратичной параболы. Из фиг. 6, в видно, что "убрав" материал штампов везде кроме граничных точек, мы никак не повлияем на упругую линию пластины, поскольку она полностью определяется моментами, создаваемыми защемлением. Никакого противоречия нет.

Об определении опорных реакций. При определении опорных реакций прямоугольной шарнирно-опертой по контуру пластины, нагруженной равномерным давлением, в угловых точках возникают сосредоточенные силы, прижимающие пластину к контуру. В то же время "наличие таких сил не подтверждается решением трехмерной задачи..., т.е. решение, полученное в рамках КТП, не согласуется с теорией упругости [1]. При этом в рамках теории упругости моделирование свободного опирания осуществляется с помощью условий на контуре $x = \text{const}$:

$$\sigma_x = 0, u_z = 0, u_y = 0 \quad (3.5)$$

Если первые два условия не вызывают сомнений, поскольку в КТП им соответствуют условия

$$M_x = 0, w = 0 \quad (3.6)$$

то последнее условие в (3.5) не столь очевидно. Как отмечалось в разд. 1, отсутствие тангенциальных перемещений в срединной плоскости пластины для задач изгиба обусловлено не равенством нулю этих перемещений, а тем, что для их определения решается отдельная плоская задача. В случае свободного опирания для плоской задачи на контуре логично задание условий

$$N_x = \int \sigma_x dz = 0, N_{xy} = \int \tau_{xy} dz = 0 \quad (3.7)$$

Первое условие (3.7) учтено в (3.5) также первым условием, а второе условие в (3.7) в решении трехмерной задачи следовало бы учесть заменой условия $u_y = 0$ в (3.5) на

$$\tau_{xy} = 0 \quad (3.8)$$

Но, как отмечается в [1], первые два условия (3.5) и условие (3.8) на контуре $x = \text{const}$ при решении трехмерной задачи приводят к появлению притягивающих сил.

Вообще, говоря независимо от того, как моделировать свободное опирание, в рамках теории упругости, определение реакций принципиально неточно. Это обусловлено тем, что в зонах локального приложения нагрузки напряженно-деформированное состояние быстро меняется во всех направлениях, и потому КТП неприменима. То же относится и к уточненным теориям пластин как следствие приближенного характера теории, а не ее внутренней противоречивости. Может быть, некоторым утешением в инженерных расчетах является то, что амплитуды опорных реакций, определенные по КТП, завышены по сравнению с действительными (см. [3]), а потому ошибка идет в запас прочности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В.В. О теории тонких пластин // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 26–47.
2. Жилин П.А. О теориях тонких пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 48–64.
3. Алфутов Н.А. О некоторых парадоксах теории тонких упругих пластин // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 65–72.
4. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 365 с.
5. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
6. Пановко Я.Г. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1985. 287 с.

7. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. М.: Стройиздат, 1978. 208 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.VII.1993

УДК 539.3:534.1

© 1994 г. А.А. Локшин

О НЕЛИНЕЙНОМ ОТРАЖЕНИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Выводятся точные формулы для отраженной и преломленной волн, возникающих при наклонном падении плоской горизонтально поляризованной поперечной волны произвольного профиля на горизонтальную границу раздела двух упругих полупространств, испытывающих нелинейное трение при движении друг относительно друга. В качестве функции трения выбрана гладкая функция общего вида, зависящая от разности горизонтальных скоростей элементов границ рассматриваемых полупространств. Показано, что если функция трения зависит от относительной скорости смещения берегов разреза немонотонным образом, то даже в случае, когда профиль падающей волны гладкий, отраженная и преломленная волны могут содержать сильные разрывы.

До некоторой степени сходная задача решалась [1, 2] для случая кусочно-постоянного трения с возможным проскальзыванием; при этом основное внимание уделялось случаю, когда падающая волна представляет собой импульс прямоугольной формы.

Пусть пространство xuz состоит из двух полупространств: $z > 0$ (среда 1 с модулем сдвига μ_1 и плотностью ρ_1) и $z < 0$ (среда 2 с модулем сдвига μ_2 и плотностью ρ_2).