УДК 539.3

© 1994 г. Б.В. Будаев, Н.Ф. Морозов, М.А. Нарбут

КРУЧЕНИЕ КРУГОВОГО КОНУСА ПРИ СТАТИЧЕСКОМ И ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Методом интегральных преобразований – Меллина в случае статики и Лебедева–Конторовича в случае динамики – строятся аналитические решения задач о кручении упругого кругового конуса. В предположении, что внешние силы сосредоточены в окрестности вершины конуса, исследуется асимптотика дальнего поля. Показано, что главный член асимптотики определяется величиной момента внешних сил, так что принцип Сен-Венана в рассмотренных случаях выполняется.

1. Задача о кручении кругового конуса в статической постановке рассматривалась многими авторами. Ссылки можно найти в книге [1], где дана математическая постановка задачи о кручении кругового конуса с углом раствора 2α, отнесенного к цилиндрической системе координат (r, φ, z) с началом в вершине конуса и показано, что решение задачи можно искать, используя функцию перемещения $\psi(r, z) = r^{-1}\upsilon(r, z)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0 \tag{1.1}$$

Касательное воздействие на боковой поверхности конуса дается в виде

$$T_\nu=\sigma_{r\varphi}\cos(r,\nu)+\sigma_{z\varphi}\cos(z,\nu)=\mu r\frac{\partial\psi}{\partial\nu} \tag{1.2}$$

$$\cos(r, \nu) = dr/d\nu = dz/ds = \cos(z, s)$$

$$\cos(z, \nu) = dz/d\nu = -dr/ds = -\cos(r, s)$$

(ν – нормаль, а s – касательная к контуру осевого сечения конуса). Было приведено [1] и решение задачи (1.1), (1.2), однако формальная запись не дает ответа на вопрос о выполнении или невыполнении в этой задаче принципа Сен-Венана. Ниже устанавливается справедливость принципа Сен-Венана для задачи о кручении кругового конуса при статическом и динамическом нагружении. Одновременно получены выражения для главных членов асимптотического разложения решения при больших r.

Для решения уравнения (1.1) перейдем к сферической системе координат (ρ, φ, θ), для которой $r = \rho\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Уравнение (1.1) примет вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{4}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{3\operatorname{ctg}\theta}{\rho^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=0 \tag{1.3}$$

а граничное условие при учете (1.2) сводится к следующему:

$$\theta=\alpha,\quad \sigma_{\theta\varphi}=2\mu e_{\theta\varphi}=\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial\theta}-\upsilon\operatorname{ctg}\theta\right)=\mu\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=f(\rho) \tag{1.4}$$

Решение краевой задfчи (1.3), (1.4) можно представить в виде контурного интеграла Меллина:

$$\psi(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\overline{\psi}(s,\theta)\rho^{-s}ds \tag{1.5}$$

При этом из энергетических условий постоянная c должна находиться в промежутке (0, 1).

Тогда для функции $\overline{\psi}(s,\theta)$ получим уравнение и граничное условие

$$\frac{d^2\overline{\psi}}{d\theta^2}+3\operatorname{ctg}\theta\frac{d\overline{\psi}}{d\theta}+s(s-3)\overline{\psi}=0 \tag{1.6}$$

$$\theta=\alpha,\quad \mu\sin\alpha\frac{d\overline{\psi}}{d\theta}=\bar{f}(s)=\int\limits_0^\infty f(\rho)\rho^{s-1}d\rho \tag{1.7}$$

Подстановка $\overline{\psi}(s,\theta)=y'_\xi(n,\xi)$, $\xi=\cos\theta$, $s(s-3)=n^2+n-2$ позволяет свести (1.6) к уравнению Лежандра

$$(\xi^2-1)y''_{\xi\xi}+2\xi y'_\xi-n(n+1)y=0$$

Поэтому для сплошного кругового конуса при учете граничного условия (1.7) и известных обозначений [2] будем иметь

$$\overline{\psi}(s,\theta)=\frac{-\bar{f}(s)}{\mu\sin^2\alpha}\frac{P'_n(\xi)\big|_{\xi=\cos\theta}}{P'_n(\xi)\big|_{\xi=\cos\alpha}}=\frac{\bar{f}(s)P_n^1(\cos\theta)}{i\mu\sin\theta P_n^2(\cos\alpha)}$$

где $n=s-2$. Заметим, что между n и s существуют две возможные связи, но в силу свойств сферических функций имеем $P_{s-2}^k=P_{1-s}^k$, и в дальнейшем второй вариант связи n и s можно не рассматривать.

Для функции перемещения получаем представление

$$\psi(\rho,\theta)=-\frac{1}{2\pi\mu\sin\theta}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\bar{f}(s)P_{s-2}^1(\cos\theta)}{P_{s-2}^2(\cos\alpha)}\rho^{-s}ds \tag{1.8}$$

Асимптотику решения (1.8) при $\rho \gg 1$ получим, дополняя контур интегрирования $(c-i\infty,$ $c+i\infty)$ полуокружностью бесконечно большого радиуса в полуплоскости $\operatorname{Re}s>0$ и вычисляя интеграл по теореме о вычетах. В первом приближении получим

$$\psi(\rho,\theta)=\frac{B(\theta)\bar{f}(3)}{\rho^3}+\sum_{k=1}^\infty\frac{A_k(\theta)\bar{f}(s_k)}{\rho^{s_k}} \tag{1.9}$$

где s_k – корни уравнения

$$P_{s-2}^2(\cos\alpha)=0 \tag{1.10}$$

Один корень уравнения (1.10) очевиден: $s=3$. Действительно, поскольку $P_1^1(\xi)$ – полином первой степени и, следовательно, $P_1'(\xi)=0$, то при $|\xi|<1$ имеем $P_1^2(\xi)=0$.

Теорема. Уравнение $P_n^2(\cos\theta)=0$ не имеет в области $0\leqslant\operatorname{Re}n\leqslant 2$ корней, отличных от $n=0,1,2$, ни при каких $\theta\in(0,\pi)$.

Доказательство. 1°. Функция $P_n^2(z)$ при фиксированном z имеет только вещественные нули. Действительно, при целых m верна формула [2]

$$P_n^{-m}(z)=\frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+m+1)}P_n^m(z) \tag{1.11}$$

В силу (1.11), если $P_n^2(z)$ имеет комплексные нули, то они же будут нулями $P_n^{-2}(z)$. Но известно [2], что $P_n^{-m}(z)$ не имеет комплексных нулей по n при $m\geqslant 0$.

2°. Воспользуемся формулой [2]

$$P_n^2(\cos\theta)=-\frac{4i\operatorname{sh}\theta}{\Pi(-\frac12)\Pi(-\frac52)}\int\limits_0^\infty\frac{2\sin\pi n\operatorname{ch}(n+\frac12)t\,dt}{(2\operatorname{ch}t+2\cos\theta)^{5/2}} \tag{1.12}$$

Можно убедиться, что при $|\operatorname{Re} n| < 2$ интеграл (1.12) сходится. Тогда, если $P_n^2(\cos\theta)=0$ при каком-то $n \neq 1$ из вышеуказанного промежутка, то

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(n+\frac{1}{2})t\,dt}{(\operatorname{ch} t+2\cos\theta)^{5/2}}=0 \tag{1.13}$$

а это невозможно при вещественном n, поскольку подынтегральное выражение положительно.

В силу доказанной теоремы главный член асимптотического разложения при $\rho \gg 1$ в формуле (1.9) соответствует $n = 1$ или, что то же самое, $s = 3$, и равен $B(\theta)\bar{f}(s)\rho^{-3}$, т.е. с точностью до постоянного множителя определяет величину момента касательных напряжений, приложенных к боковой поверхности конуса.

Будем считать, что функция $f(\rho)$ отлична от нуля в окрестности вершины конуса. Тогда проведенный анализ подтверждает справедливость принципа Сен-Венана для настоящей задачи: напряженно-деформированное состояние конуса вдали от вершины в главном определяется результирующим моментом приложенных поверхностных сил и не зависит от их распределения. Таким образом, в задаче кручения круговой конус в соответствии с предложенной ранее [3] терминологией не является сингулярным.

2. В случае динамического нагружения боковой поверхности конуса касательными усилиями, изменяющимися во времени по гармоническому закону, получим следующую краевую задачу для перемещения $\upsilon(\rho, \theta)$:

$$\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho^2}\operatorname{ctg}\frac{\partial\upsilon}{\partial\theta}+\left(k^2-\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\right)\upsilon=0 \tag{2.1}$$

$$\theta=\alpha,\quad \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial\theta}-\upsilon\operatorname{ctg}\theta\right)=f(\rho) \tag{2.2}$$

Задачи такого вида изучались [4] при помощи интегрального преобразования

$$\overline{\upsilon}(s,\theta)=\int_0^\infty \rho^{1/2}\upsilon(\rho,\theta)H_s^{(2)}(k\rho)d\rho \tag{2.3}$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\upsilon(\rho,\theta)=-\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\int_{-i\infty}^{i\infty} s\overline{\upsilon}(s,\theta)J_s(k\rho)/\,ds \tag{2.4}$$

Для функции $\overline{\upsilon}(s,\theta)$ из (2.1) следует уравнение, решения которого выражаются присоединенными функциями Лежандра:

$$\overline{\upsilon}(s,\theta)=A(s)P^1_{s-1/2}(\cos\theta)+B(s)P^1_{s-1/2}(-\cos\theta) \tag{2.5}$$

Из условия конечности перемещений в конусе следует, что постоянная $B(s)$ равна нулю. Функцию $A(s)$ вычисляем из граничного условия (2.2) и получаем

$$A(s)=\frac{i}{\nu\Delta(s-\frac{1}{2})}\int_0^\infty f(r)\sqrt{r}H_s^{(2)}(kr)dr \tag{2.6}$$

$$\Delta(s)=i\left[\frac{d}{d\theta}P_s^1(\cos\theta)-\operatorname{ctg}\theta P_s^1(\cos\theta)\right]_{\theta=\alpha}=P_s^2(\cos\alpha). \tag{2.7}$$

причем последнее равенство следует из известного соотношения [2]. Подставляя (2.6) в (2.4) и меняя порядок интегрирования, получаем для перемещения $\upsilon(\rho, \theta)$ интегральное представление

$$\upsilon(\rho,\theta)=\frac{1}{2\mu}\int_0^{\infty}K(k\rho,kr,\theta)f(r)dr \tag{2.8}$$

$$K(k\rho,kr,\theta)=-i\sqrt{\frac{r}{\rho}}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{sP^1_{s-1/2}(\cos\theta)H_s^{(2)}(k\rho)J_s(kr)ds}{P^2_{s-1/2}(\cos\alpha)} \tag{2.9}$$

и аналогичное (2.9) выражение, которое получается круговой заменой $r\to\rho\to r$ в подынтегральном выражении.

Интеграл (2.9) вычисляется по теореме о вычетах:

$$K(k\rho,kr,\theta)=2\pi\sqrt{\frac{r}{\rho}}\sum_{\operatorname{Re}s_\nu>-1/2}(s_\nu+1/2)\frac{P^1_{s_\nu}(\cos\theta)H^{(2)}_{s_\nu+1/2}(k\rho_1)J_{s_\nu+1/2}(k\rho_2)}{\Delta'(s_\nu)}$$

где

$$\rho_1=\max(\rho,r),\quad \rho_2=\min(\rho,r)$$

s_ν – корни уравнения $P^2_{s_\nu}(\cos\alpha)=0$, которое, как установлено выше, не имеет в области $-1/2<\operatorname{Re}s_\nu<3/2$ других корней, кроме $s=s_1=1$.

Предположим, что $f(r)=0$ при $r>\delta>0$, причем $k\delta\ll 1$. Тогда при $\rho\gg\delta$ имеем асимптотику

$$K(k\rho,kr,\theta)=\frac{3\pi P_1^1(\cos\theta)}{\Gamma(5/2)\Delta'(1)}\left(\frac{k}{2}\right)^{3/2}\frac{r^2H^{(2)}_{3/2}(k\rho)}{\sqrt{\rho}}+o(\delta^2) \tag{2.10}$$

Из (2.8), (2,10) следует, что если крутильные колебания конуса возбуждаются силами, сосредоточенными в малой по сравнению с длиной волны окрестностью вершины конуса, то главная часть генерируемого поля перемещений описывается выражением

$$MC(k)(k\rho)^{-1/2}H^{(2)}_{3/2}(k\rho)P_1^1(\cos\theta),\quad C(k)=\frac{3}{\sqrt{2}\Gamma(5/2)\Delta'(1)}\left(\frac{k}{2}\right)^2$$

зависящим только от суммарного крутящего момента

$$M=\int_0^{\delta}f(r)r^2dr$$

Таким образом, и в динамической задаче о кручении упругого кругового конуса выполняется принцип Сен-Венана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л.* Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
2. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 476 с.
3. *Санчес-Паленсия Э.* Некоторые вопросы теории упругости в неограниченных областях и их приложения к контактным задачам // Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1990. Т. 192. С. 183–196.
4. *Лебедев Н.Н., Конторович М.И.* О применении формул обращения к решению некоторых задач электродинамики // ЖЭТФ. 1939. Т. 9. Вып. 6. С. 729–741.
5. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. М.: Наука, 1974. 672 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
22.II.1994