11. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 3. 304 с.
12. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 1970. 800 с.
13. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
14. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
15. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 550 с.
16. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 616 с.
17. *Тиман А.Ф., Трофимов В.Н.* Введение в теорию гармонических функций. М.: Наука, 1968. 207 с.

Киев

Поступила в редакцию
15.XII.1993

УДК 532.5

© 1994 г. Э.Л. Амромин

ОЦЕНКА РАДИУСА ВЯЗКОГО ЯДРА ВИХРЯ

Выведена формула, связывающая радиус вихря в вязкой жидкости с ее кинетической энергией турбулентности.

Вязким ядром называют часть вихря, внутри которой скорость вращения жидкости убывает с приближением к его центру. Значение условного радиуса R вихря используют как в оперирующих дискретными вихрями вычислительных методах [1], так и в оценках размеров вихрей и кавитационных каверн в них для наблюдаемых в инженерной практике [2, 3] установившихся течений. Однако в таких течениях R – практически стационарная величина, в то время как выведенная из уравнений Навье–Стокса [4] связь R с циркуляцией вихря Γ и кинематической вязкостью ν нестационарна и не дает конечного предела для R.

В какой-то степени схожая ситуация имеет место для траекторий заряженных частиц, которые не замкнуты в постоянном электрическом поле. Однако в пульсирующем поле замкнутые траектории существуют [5]. В реальной жидкости поле скорости всегда имеет пульсирующую часть, причем наличие уравнений Рейнольдса облегчает использование подсказки [5]: можно рассматривать сразу осредненные характеристики пульсаций. В простых случаях возможно вывести даже аналитические выражения для R.

Рассмотрим уравнение для азимутальной компоненты импульса в полярных координатах $\{r, \theta\}$ плоскости, ортогональной оси вихря. Осреднение Рейнольдса этого уравнения имеет вид

$$u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u\upsilon}{r}+\frac{u\partial u}{r\partial\theta}+\left\langle u'\frac{\partial u'}{\partial r}\right\rangle+\left\langle\frac{u'\upsilon'}{r}\right\rangle+\frac{1}{r}\left\langle u'\frac{\partial u'}{\partial\theta}\right\rangle=-\frac{\partial p}{r\rho\partial\theta}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial u}{r\partial r}-\frac{u}{r^2}-\frac{2\partial\upsilon}{r\partial\theta}\right) \quad (1)$$

Если $\partial u/\partial\theta$, $\partial\upsilon/\partial\theta$, $\partial p/\partial\theta$ пренебрежимо малы, и характеристики турбулентности вблизи ядра меняются слабо, то (1) можно упростить до

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial u}{r\partial r}-\frac{u}{r^2}=\frac{\langle u'\upsilon'\rangle}{\nu r}$$

В предположении $\langle u'\upsilon'\rangle \simeq \text{const}$ решение этого уравнения имеет вид

$$u(r)=C_1 r+\frac{C_2}{r}+\frac{\langle u'\upsilon'\rangle}{2\nu}r\ln r$$

Условия $u(0) = 0$, $u(R) = \Gamma/(2\pi R)$, $\partial u/\partial r(R) = 0$ позволяют отыскать постоянные C_1, C_2, R, причем последнее из этих условий обычно для внешней границы вязкого слоя. В результате получаем

$$R^2 = -\Gamma\nu/\pi\langle u'\upsilon' \rangle \qquad (2)$$

Вышеупомянутые предположения о характере турбулентности позволяют выразить $\langle u'\upsilon' \rangle$ в (2) непосредственно через кинетическую энергию турбулентности k. При используемых упрощениях $k \simeq 3\langle u'\upsilon' \rangle/2$. Однако в формуле

$$R = A\sqrt{\Gamma\nu/k} \qquad (3)$$

постоянная A для реальных течений, по-видимому, не будет сильно отличаться от 0,69, несмотря на упрощающие допущения вывода (3). Проверить эту формулу по известным измерениям автор не смог, поскольку не нашел экспериментальных данных о значениях k для вихрей с измеренными $\{R, \Gamma\}$, а осциллограммы [6] позволяют утверждать лишь, что (3) предсказывает верный порядок R. Предельным же случаям (3) удовлетворяет. Для невязкой жидкости $(\nu \to 0)R \to 0$. Для $k \to 0$ при конечном ν стационарного ограниченного R не существует, как и в ламинарном потоке. Для турбулентного пограничного слоя вихри должны быть более крупными в его внешней части, где меньше k, что соответствует наблюдениям [7].

В заключение можно отметить, что пульсации скорости и вихри являются такими атрибутами турбулентности, взаимосвязь которых представляется вполне естественной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sarpkaya T.* Computationai methods with vorties // Trans. ASME. J. Fluid Eng. 1989. V. 111. № 1. P. 5–52.
2. McCormic B.W. On cavitation produced by a vortex tralling from a lifting surface // Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Eng. 1962. V. 84. № 3. P. 369–376.
3. *Billet M.S., Holl J.W.* Scale effects on various types of limited cavitation // Trans. ASME. J. Fluid Eng. 1981. V. 103. P. 405–414.
4. *Бэтчэлор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
5. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988. 368 с.
6. *Green S.I., Acosta A.J.* Unesteady flow in trailling vortices // J. Fluid Mech. 1991. V. 227. P. 107–134.
7. *Cantwell B.J.* Organized mottion in turbulent flow // Annual revierw of Fluid Mecanics. Palo Alto, Ca: Annual Revs. Inc. 1981. V. 13. P. 457–515.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
5.I.1994