последовательность $\{x_k\}$ функций, равномерно непрерывных на $(-h, 0]$, равномерно, с экспоненциальной скоростью, сходится к функции $\bar{x}$, также равномерно непрерывной на $(-h, 0]$.

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в формуле $x_{t_{k+1}} = Px_{t_k}$, получаем, что если принять $\bar{x}$ за начальную функцию, то соответствующее решение задачи (1)–(3) оказывается периодическим. Таким образом, функцию $\bar{x}$ можно продолжить на всю ось t до периодического решения импульсного ЗДУ (1), (2); период $\bar{x}$ равен $\lim_{k\to\infty}(t_{k+1} - t_k)$. Асимптотический "выход" $x(t)$ на $\bar{x}(t)$ при $t \to \infty$ теперь вытекает из автономности импульсного ЗДУ (1), (2). Единственность периодического решения следует из возможности применения к двум таким решениям леммы 1, чем завершается доказательство теоремы 3.

Неравенства $h \leqslant h_*$ и (8), обеспечивающие существование устойчивого предельного цикла, представляются слишком ограничительными и желательно их по возможности ослабить; в частности, исследовать случай $h = \infty$. Интересно также получить рассматриваемое здесь импульсное ЗДУ как предел более реалистической сингулярно возмущенной системы с высокой, но конечной скоростью изменения состояния при достижении критических ситуаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S.* Theory of impulsive differential equations. Singapore: World Scientific, 1989. 273 p.

Москва

Поступила в редакцию
17.VI.1993

УДК 531.36

© 1994 г. С.П. Сосницкий

О ДЕЙСТВИИ ПО ГАМИЛЬТОНУ КАК ФУНКЦИИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Для некоторых классов консервативных систем находится в явном виде действие по Гамильтону как функция фазовых координат и времени. Рассматривается применение функции действия к вопросам исследования устойчивости консервативных систем. Показано, что уже из самого представления функции действия по Гамильтону в явном виде могут быть сделаны полезные заключения о качественном характере поведения решений рассматриваемых систем.

1. Введение. Как известно [1], уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0 \tag{1.1}$$

могут быть получены из условия стационарности действия по Гамильтону

$$\delta S = \delta \int_0^{t_1} L(\tau, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})d\tau = 0 \tag{1.2}$$

что дает основание считать действие S носителем информации о системах, описываемых уравнениями (1.1).

Исходя из данного факта и предполагая ниже консервативность системы (1.1), заменим в выражении действия S фиксированное значение t_1 на текущее t и будем рассматривать S как характеризующую истинное движение системы величину – функцию действия

$$S=\delta\int_0^t L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})d\tau \tag{1.3}$$

Ограничимся случаем, когда $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\in C^2(D\times R^n)$ (D – область в $R^n_{\mathbf{q}}$) и решения системы (1.1) с началом в $D\times R^n$ продолжаемы на всю ось $t\in R$. Данные условия, не нарушая общности рассмотрения для исследуемых ниже задач, позволяют функцию действия S представить в виде [2–4]

$$S=S^*(\tau,\mathbf{q}(\tau),\ \dot{\mathbf{q}}(\tau))\Big|_0^t\in C^{(1,1,1)}_{t\mathbf{q}\dot{\mathbf{q}}}(R\times D\times R^n) \tag{1.4}$$

Если же воспользоваться гамильтоновой формой уравнений (1.1)

$$\dot{\mathbf{q}}=\partial H/\partial\mathbf{p},\quad \dot{\mathbf{p}}=\partial H/\partial\mathbf{p} \tag{1.5}$$

то функции действия S на основании (1.4), (1.5) можно также придать вид

$$S=S_1^*(\tau,\mathbf{q}(\tau),\ \mathbf{p}(\tau))\Big|_0^t\in C^{(1,1,1)}_{t\mathbf{q}\mathbf{p}}(R\times D\times R^n) \tag{1.6}$$

Применение S в представлении (1.4) или (1.6) оказывается эффективным при исследовании устойчивости консервативных систем [2–4].

Поскольку по самому определению функции действия S

$$dS/dt=L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})=L^*(\mathbf{q},\mathbf{p}) \tag{1.7}$$

то рассматривая S в виде (1.6) как функцию обобщенных координат $\mathbf{q}$, импульсов $\mathbf{p}$ и времени t, на основании (1.5), (1.7) приходим к уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial\mathbf{q}}\frac{\partial H}{\partial\mathbf{p}}-\frac{\partial S}{\partial\mathbf{p}}\frac{\partial H}{\partial\mathbf{q}}=L^*(\mathbf{q},\mathbf{p}) \tag{1.8}$$

Последнее можно интерпретировать как линейное уравнение в частных производных первого порядка, которому должна удовлетворять функция $S(t,\mathbf{q},\mathbf{p})$.

Как известно [5], всякое дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка имеет решение, зависящее от произвольной функции. Поэтому класс решений уравнения (1.8) более широкий по сравнению с функцией действия по Гамильтону S в виде (1.6). Не исключено, в частности, что в конкретной ситуации, связанной с исследованием устойчивости, может оказаться полезным использование любого решения уравнения (1.8), не обязательно сводящегося к функции действия $S(t,\mathbf{q},\mathbf{p})$. Тем не менее ниже ограничимся рассмотрением классов консервативных систем, для которых можно определить явным образом именно функцию действия S.

2. Линейные системы. Будем считать, что исходный лагранжиан L имеет вид

$$L=L_2+L_1+L_0=\tfrac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^TA\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{f}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}+L_0(\mathbf{q})$$

где A – постоянная матрица, причем квадратичная форма $\dot{\mathbf{q}}^TA\dot{\mathbf{p}}$ положительно определена, вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ линейна относительно $\mathbf{q}$, $L_0(\mathbf{q})$ – квадратичная форма.

Представляя лагранжиан L в форме

$$L=\mathbf{p}\dot{\mathbf{q}}-H=(\mathbf{pq})^\cdot-\mathbf{q}\dot{\mathbf{p}}-H=(\mathbf{pq})^\cdot+\mathbf{q}\frac{\partial H}{\partial\mathbf{q}}-H=(\mathbf{pq})^\cdot-L,\quad \mathbf{p}=\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{q}}} \tag{2.1}$$

где H – соответствующий системе (1.1) гамильтониан, согласно (1.3), (2.1) имеем

$$S=\tfrac{1}{2}\mathbf{pq}\Big|_0^t \tag{2.2}$$

Итак, в случае линейных лагранжевых систем вычисление функции действия по Гамильтону как функции фазовых переменных и времени t осуществляется довольно просто.

При этом важно отметить, что для получения выражения (2.2) консервативность системы не используется. Последнее обстоятельство позволяет заключить, что и для неавтономных лагранжевых линейных систем выражение (2.2) также справедливо.

Поскольку функция S в виде (2.2) от t явно не зависит, то на основании выражения

$$\frac{dS}{dt} = L = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T A^{-1}\mathbf{p} + L_0 - \frac{1}{2}\mathbf{f}^T \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} \tag{2.3}$$

приходим к линейному аналогу критерия Г.К. Пожарицкого [6], обобщенного затем на существенно нелинейные системы в работах [7, 8].

Как убедимся ниже, и в нелинейном случае существуют системы, для которых вычисление функции действия по Гамильтону S в явном виде также не составляет проблемы.

3. Натуральные системы. В рассматриваемом случае лагранжиан определяется выражением [1]

$$L = T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) - \Pi(\mathbf{q}) = \tfrac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \Pi(\mathbf{q}) \tag{3.1}$$

где величина $T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ соответствует кинетической энергии системы, $\Pi(\mathbf{q})$ – потенциальной.

Предположим, что выполняются следующие условия: 1) A – постоянная матрица; 2) $\Pi(\mathbf{q}) = \Pi_k(\mathbf{q})$ – однородная функция степени k: $\Pi_k(\lambda\mathbf{q}) = \lambda^k\Pi_k(\mathbf{q})$.

Поскольку при учете (2.1) в этом случае

$$L = (\mathbf{pq})^{\cdot} + \mathbf{q}\partial\Pi_k/\partial\mathbf{q} - H \tag{3.2}$$

то на основании (3.2) и теоремы Эйлера об однородных функциях имеем

$$L = (\mathbf{pq})^{\cdot} + k\Pi_k - H = (\mathbf{pq})^{\cdot} + k\Pi_k/2 + k(\Pi_k - h)/2 + kh/2 - H = (\mathbf{pq})^{\cdot} - kL/2 + h(k/2-1) \tag{3.3}$$

Из (3.3) получаем

$$S = \frac{2}{k+2}\mathbf{pq}\Big|_0^t + h\frac{k-2}{k+2}t, \quad k \neq -2. \tag{3.4}$$

Как видим, фазовые переменные $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ и время в выражении (3.4) разделяются. Если, в частности, положить в (3.4) $k = 2$, то приходим к равенству (2.2).

Если же $k = -2$, то в рамках рассматриваемой схемы определить функцию действия S в явном виде не представляется возможным.

Можно проверить, что функция S соответственно в формах (2.2), (3.4) доставляет примеры интегралов уравнения в частных производных (1.8).

Поскольку в задаче n тел [9] лагранжиан L удовлетворяет оговоренным выше условиям 1, 2, то в данном случае, по крайней мере для неособых траекторий, исключающих соударение тел, согласно равенству (3.4) (в котором нужно положить $k = -1$) имеем

$$S = 2\mathbf{pq}\Big|_0^t - 3ht \tag{3.5}$$

В частности, на основании (1.3), (3.5) заключаем, что речь об устойчивости по Лагранжу в задаче n тел может идти лишь в случае, когда $T + \Pi = h < 0$, так как на любой траектории рассматриваемой системы лагранжиан L неотрицателен, и, стало быть, при $h > 0$ и $t \to \infty$ величина $\mathbf{pq}$ согласно (3.5) также стремится к бесконечности.

Данное заключение, основывающееся на представлении функции действия по Гамильтону в явном виде, отражает смысл теоремы Якоби об отрицательности энергии для устойчивых по Лагранжу движений в задаче n тел [10, 11].

Полученное выше выражение (3.4) для функции действия S относится ко всей области существования решений рассматриваемой натуральной системы. Если же ограничиться локальным исследованием натуральных систем, например в окрестности положения равновесия, то выражение для функции действия можно получить и при более общих предположениях в отношении $T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ и $\Pi(\mathbf{q})$.

Итак, без ограничения общности рассмотрения будем считать, что точка $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ – исследуемое положение равновесия. Предположим, что $T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$, причем квадратичная форма $\dot{\mathbf{q}}^T A(\mathbf{0})\dot{\mathbf{q}}$ – положительно определена. Пусть, кроме того, функция $\Pi(\mathbf{q})$

допускает представление в виде

$$\Pi(\mathbf{q}) = \Pi_m(\mathbf{q}) + o(\Pi_m) \tag{3.6}$$

где Π_m – однородная функция степени $m > 0$.

Утверждение 1. Если потенциальная энергия $\Pi(\mathbf{q})$ натуральной системы в точке $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ имеет строгий локальный максимум, который определяется слагаемым Π_m в равенстве (3.6), то $\forall(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \in s_\varepsilon = \{(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \in D_{\mathbf{q}} \times R^n_{\dot{\mathbf{q}}}: \|\mathbf{q} \oplus \dot{\mathbf{q}}\| < \varepsilon\}$ функция действия по Гамильтону S определяется выражением

$$S = \left[\frac{2}{m+2}\mathbf{p}\mathbf{q}\Big|_0^t + h\frac{(m-2)}{m+2}t\right](1+\eta(\varepsilon)) \tag{3.7}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\eta(\varepsilon) = 0, \quad \mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$$

Доказательство. Следуя схеме, изложенной выше, имеем

$$L = (\mathbf{p}\mathbf{q})^{\cdot} - \frac{m}{2}L + \mathbf{q}\partial T/\partial \mathbf{q} + o(\|\mathbf{q}\|^m) + h\left(\frac{m}{2} - 1\right)$$

Поскольку $\mathbf{q}\partial T/\partial \mathbf{q} = o(T)$, то последнее равенство представим в виде

$$L = (\mathbf{p}\mathbf{q})^{\cdot} - \frac{m}{2}L + L[o(L)] + h\left(\frac{m}{2} - 1\right) \tag{3.8}$$

$$o(L) = [o(\|\mathbf{q}\|^m) + o(T)]/L$$

Так как в условиях утверждения 1 согласно теореме о среднем ([12], с. 600) справедливо равенство

$$\int_0^t L[o(L)]d\tau = \mu\int_0^t L d\tau \tag{3.9}$$

где $\mu = o(L)\big|_{(\mathbf{q},\mathbf{p})\in s_\varepsilon}$, $t \in I \cap R^+$, I – максимальный интервал, на котором решение $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ принадлежит окрестности s_ε, то на основании (3.8), (3.9) приходим к (3,7).

Замечание. А.М. Ляпунов [13] для доказательства неустойчивости в условиях утверждения 1 использовал функцию $V = \mathbf{p}\mathbf{q}$, которая с точностью до постоянного множителя, не влияющего, впрочем, на свойства вспомогательной функции, соответствует первообразной для первого слагаемого в выражении (3.7). Если учесть, что заключение о неустойчивости равновесия в данном случае следует из самого представления функции действия S в виде (3.7), поскольку, с одной стороны, $L \geqslant |h|$, с другой – $\left|\frac{m-2}{m+2}\right| < 1$ и, стало быть, при $t \to \infty$ величина $\mathbf{p}\mathbf{q}$ согласно (3.7) также стремится к бесконечности, то выбор величины $\mathbf{p}\mathbf{q}$ в качестве функции Ляпунова выглядит вполне естественным.

Утверждение 2. Если потенциальная энергия $\Pi(\mathbf{q})$ – однородная функция степени $m > 0 (\Pi(\mathbf{q}) = \Pi_m(\mathbf{q}))$, то при отсутствии локального минимума функции $\Pi(\mathbf{q})$ в точке $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ и $(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \in \Omega^- = \{(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \in s_\varepsilon: T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + \Pi(\mathbf{q}) = h < 0\}$ имеем место равенство (3.7).

Для доказательства утверждения 2 достаточно заметить, что при $(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \in \Omega^-$ лагранжиан L положителен, что позволяет воспользоваться рассуждениями, используемыми при доказательстве утверждения 1.

В условиях утверждения 2, как и в предыдущем случае, неустойчивость равновесия следует из самого представления функции действия S в виде (3.7), поскольку при $(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \in \Omega^-$ выполняется неравенство $L \geqslant |h|$, и тем самым при $h < 0$ и $t \to \infty$ величина $\mathbf{p}\mathbf{q}$ согласно (3.7) стремится к бесконечности.

Итак, когда выполняются условия утверждений 1, 2, совпадающие соответственно с условиями теорем Ляпунова [13] и Четаева [14] о неустойчивости равновесия, также можно получить явные выражения для функции действия по Гамильтону S. Однако они носят локальный характер и в некотором смысле содержат элемент неопределенности. Это связано с тем, что о величине $\eta(\varepsilon)$ можно лишь сказать, что она мала, вычисляется в окрестности s_ε, однако практически нельзя конкретизировать точку окрестности s_ε, в которой выполняется $\eta(\varepsilon)$.

4. Устойчивость равновесия натуральных систем. Изложенная в [2–4] схема получения функции действия S в виде (1.4) или (1.6) предполагала свойство системы (1.1) быть потоком ([15], с. 347). При вычислении же для функции S выражений (3.4), (3.7) последнее свойство никак не использовалось. Это позволяет заключить, что для систем данного класса равенства (3.4) и (3.7), учитывая способ их получения, остаются справедливыми при минимальных ограничениях на гладкость соответствующих лагранжианов. В частности, они справедливы при $L \in C^1$, когда обеспечивается лишь существование решений и вместе с тем определение функции действия по Гамильтону сохраняет смысл.

Ограничимся ниже более подробным рассмотрением систем с отрицательно однородным потенциалом, имеющих свою специфику и менее исследованных по сравнению с системами, в которых $\Pi(\mathbf{q})$ – положительно однородная функция.

Теорема 1. Пусть $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\in C^1(D\times R^n)$ и выполняются условия: 1) $\Pi(\mathbf{q}) = \Pi_k(\mathbf{q})$, $\Pi_k(\lambda\mathbf{q}) = \lambda^k\Pi_k(\mathbf{q})$; 2) $k < 0$; 3) $\partial T/\partial\mathbf{q} = \mathbf{0}$.

Тогда критическим точкам функции $\Pi(\mathbf{q})$ в области $D \subset R^n$ соответствуют неустойчивые положения равновесия системы (1.1), (3.1).

Доказательство. Согласно условию 1 имеем

$$\mathbf{q}\partial\Pi/\partial\mathbf{q} = k\Pi$$

и, стало быть, в критических точках функции $\Pi(\mathbf{q})$, если они существуют, $\Pi(\mathbf{q}) = 0$.

Предполагая далее, что множество ω критических точек $\Pi(\mathbf{q})$ непусто:

$$\omega = \{\mathbf{q} \in D \subset R^n\colon \Pi(\mathbf{q}) = \mathbf{0},\ \partial\Pi/\partial\mathbf{q} = \mathbf{0}\} = \phi$$

и фиксируя одну из них: $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$, покажем, что положение равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ в условиях теоремы 1 неустойчиво.

Прежде всего заметим, что из (3.3), если $k = -2$, следует соотношение $(\mathbf{pq})^\cdot = 2h$. Стало быть, в данной ситуации при $|h| \neq 0$ выражение $\mathbf{pq}$ можно рассматривать как функцию Ляпунова, что позволяет заключить о неустойчивости рассматриваемого положения равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$. Поэтому ниже будем различать случаи: 1) $k < -2$; 2) $-2 < k < 0$. Пусть $k < -2$. Предположим вначале, что в окрестности критической точки $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$ будет $\Pi(\mathbf{q}) \geqslant 0$. Тогда, учитывая, что в данном случае $|L| \leqslant h > 0$, $(k-2)/(k+2) > 1$, на основании (3.4) приходим к заключению, что величина $\mathbf{pq}$ неограниченно возрастает при $t \to \infty$ и сколь угодно малом $h > 0$. Следовательно, положение равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ неустойчиво, поскольку допущение противного противоречит определению устойчивости.

Если же потенциальная энергия $\Pi(\mathbf{q})$ может принимать отрицательные значения, то полагая $h < 0$ и замечая, что в данном случае $L \geqslant |h|$, $\dfrac{k-2}{k+2} > 1$, как и выше на основании (3.4), приходим к заключению о неограниченном возрастании величины $|\mathbf{pq}|$ при $t \to \infty$ и тем самым неустойчивости равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$.

В случае $-2 < k < 0$ добавим к обеим частям равенства (3.4) величину ht. В результате получаем

$$\int_0^t 2T d\tau = \frac{2}{k+2}\mathbf{pq}\Big|_0^t + \frac{2kh}{k+2}t \tag{4.1}$$

Полагая в (4.1) $h > 0$ и замечая, что $k/k + 2 < 0$, на основании (4.1) заключаем, что величина $\mathbf{pq}$ неограниченно возрастает, когда $t \to \infty$.

Итак, в условиях теоремы 1 положение равновесия $\mathbf{q}=\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}=0$ не может быть устойчивым. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Если в условии 2 теоремы 1 положить $k = -1$, то приходим к выводу, составляющему смысл теоремы Ирншоу [16], согласно которой устойчивая статическая конфигурация электрических зарядов невозможна.

Следствие 2. Критические точки отрицательно однородной функции класса C^1 не могут быть точками ее строгого локального экстремума.

Особенность задачи n тел [9] и задачи взаимодействия электрических зарядов [16] состоит в том, что соответствующая потенциальная энергия $\Pi(\mathbf{q})$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Pi(\mathbf{q}) = 0 \tag{4.2}$$

Оказывается, что если имеет место ограничение (4.2), то о неустойчивости равновесия можно говорить и без требования однородности потенциала.

Теорема 2. Пусть $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\in C^2(D\times R^n)$ и $\Delta\Pi(\mathbf{q}) = 0$.

Тогда изолированные критические точки функции $\Pi(\mathbf{q})$ в области $D\subset R^n_{\mathbf{q}}$, если они существуют, являются неустойчивыми положениями равновесия системы (1.1), (3.1).

Доказательство. Учитывая, что потенциальная энергия $\Pi(\mathbf{q})$ определяется с точностью до постоянной, без нарушения общности можем отнести рассматриваемую критическую точку $\mathbf{q}^*$ к множеству нулевого уровня функции $\Pi(\mathbf{q})$. На основании гармоничности $\Pi(\mathbf{q})$ [17] заключаем, что $\mathbf{q}^*$ не может быть точкой локального экстремума функции $\Pi(\mathbf{q})$. Как следствие отсюда получаем

$$\omega = \{\mathbf{q}\in s_\varepsilon = \{\mathbf{q}\in R^n, \|\mathbf{q}-\mathbf{q}^*\| < \varepsilon\} : \Pi(\mathbf{q}) < 0\} \neq \phi$$

Поскольку критическая точка $\mathbf{q}^*$ функции $\Pi(\mathbf{q})$ предполагается изолированной, то можно далее воспользоваться одной из изложенных в [2–4] теорем о неустойчивости равновесия консервативных систем и на их основании заключить о справедливости теоремы 2.

Замечание. Справедливость теоремы сохраняется, если условие изолированности критических точек функции $\Pi(\mathbf{q})$ заменить условием изолированности множеств уровня функции $\Pi(\mathbf{q})$, содержащих критические точки, что обусловлено предложенным в [2, 3] способом доказательства теорем о неустойчивости, основанным на применении функции действия по Гамильтону.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Парс Л.А.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.
2. *Сосницкий С.П.* Об устойчивости равновесия натуральных систем // Математическое моделирование динамических процессов в системах тел с жидкостью. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. С. 38–43.
3. *Сосницкий С.П.* Действие по Гамильтону и устойчивость равновесия консервативных систем // Проблемы динамики и устойчивости многомерных систем. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. С. 99–106.
4. *Румянцев В.В., Сосницкий С.П.* О неустойчивости равновесия голономных консервативных систем // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 6. С. 144–166.
5. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959. 468 с.
6. *Пожарицкий Г.К.* О неустойчивости движения консервативных голономных систем // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 3. С. 429–433.
7. *Hagedorn P.* Über die Instabilität konservativer Systeme mit gyroskopischen Kräften // Arch. Rat. Mech. and Analysis. 1975. V. 58. N 1. P. 1–9.
8. *Болотин С.В., Козлов В.В.* Об асимптотических решениях уравнений динамики // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1980. N 4. С. 84–89.
9. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 500 с.
10. *Якоби К.* Лекции по динамике. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 270 с.

11. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 3. 304 с.
12. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 1970. 800 с.
13. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
14. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
15. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 550 с.
16. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 616 с.
17. *Тиман А.Ф., Трофимов В.Н.* Введение в теорию гармонических функций. М.: Наука, 1968. 207 с.

Киев

Поступила в редакцию
15.XII.1993

УДК 532.5

© 1994 г. Э.Л. Амромин

ОЦЕНКА РАДИУСА ВЯЗКОГО ЯДРА ВИХРЯ

Выведена формула, связывающая радиус вихря в вязкой жидкости с ее кинетической энергией турбулентности.

Вязким ядром называют часть вихря, внутри которой скорость вращения жидкости убывает с приближением к его центру. Значение условного радиуса R вихря используют как в оперирующих дискретными вихрями вычислительных методах [1], так и в оценках размеров вихрей и кавитационных каверн в них для наблюдаемых в инженерной практике [2, 3] установившихся течений. Однако в таких течениях R – практически стационарная величина, в то время как выведенная из уравнений Навье–Стокса [4] связь R с циркуляцией вихря Γ и кинематической вязкостью ν нестационарна и не дает конечного предела для R.

В какой-то степени схожая ситуация имеет место для траекторий заряженных частиц, которые не замкнуты в постоянном электрическом поле. Однако в пульсирующем поле замкнутые траектории существуют [5]. В реальной жидкости поле скорости всегда имеет пульсирующую часть, причем наличие уравнений Рейнольдса облегчает использование подсказки [5]: можно рассматривать сразу осредненные характеристики пульсаций. В простых случаях возможно вывести даже аналитические выражения для R.

Рассмотрим уравнение для азимутальной компоненты импульса в полярных координатах $\{r, \theta\}$ плоскости, ортогональной оси вихря. Осреднение Рейнольдса этого уравнения имеет вид

$$u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u\upsilon}{r}+\frac{u\partial u}{r\partial\theta}+\left\langle u'\frac{\partial u'}{\partial r}\right\rangle+\left\langle\frac{u'\upsilon'}{r}\right\rangle+\frac{1}{r}\left\langle u'\frac{\partial u'}{\partial\theta}\right\rangle=-\frac{\partial p}{r\rho\partial\theta}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial u}{r\partial r}-\frac{u}{r^2}-\frac{2\partial\upsilon}{r\partial\theta}\right) \qquad (1)$$

Если $\partial u/\partial\theta$, $\partial\upsilon/\partial\theta$, $\partial p/\partial\theta$ пренебрежимо малы, и характеристики турбулентности вблизи ядра меняются слабо, то (1) можно упростить до

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial u}{r\partial r}-\frac{u}{r^2}=\frac{\langle u'\upsilon'\rangle}{\nu r}$$

В предположении $\langle u'\upsilon'\rangle \simeq \text{const}$ решение этого уравнения имеет вид

$$u(r)=C_1 r+\frac{C_2}{r}+\frac{\langle u'\upsilon'\rangle}{2\nu}r\ln r$$