УДК 531.36

© 1994 г. А.Д. Мышкис

СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ И РЕЛАКСАЦИЕЙ

Рассматривается система, состояние которой описывается скалярным параметром. Величина параметра релаксирует от начального отклонения к критическому значению. Как только последнее достигается, система мгновенно отбрасывается в стандартное положение и вновь начинается процесс релаксации. Поскольку процесс релаксации описывается уравнением с запаздыванием, каждый последующий цикл релаксации, вообще говоря, отличается от предыдущих. Установлены некоторые свойства рассматриваемой математической модели. В частности, указаны условия, при которых поведение системы асимптотически при больших временах становится периодическим.

Пусть в некоторой системе с последействием происходит процесс, описываемый функционально-дифференциальным уравнением запаздывающего типа (ЗДУ) с релаксацией и импульсной поддержкой. Последнее означает, что имеется некоторый "функционал напряжения", определяемый состоянием (и, вообще говоря, предысторией) системы и изменяющийся лишь до некоторого критического значения; по его достижении происходит быстрое изменение состояния, после чего непрерывный процесс возобновляется, пока функционал напряжения вновь не достигнет критического значения, и т.д. Математической моделью такого процесса является импульсное ЗДУ, для которого моменты импульсов не заданы заранее, как это обычно считается (см., например, [1], § 4.6), а определяются достижением в "пространстве Красовского", ассоциированного с заданным ЗДУ, соответствующей гиперповерхности. Насколько известно автору, импульсные ЗДУ такого типа в отличие от обыкновенных импульсных дифференциальных уравнений не рассматривались.

Ниже для скалярного автономного импульсного ЗДУ с функционалом напряжения самого простого вида приводится уточнение постановки задачи, получены общие свойства решений и достаточные условия их асимптотической периодичности. Было бы интересно рассмотреть и более общую ситуацию.

Пусть исходное ЗДУ таково:

$$\dot{x}(t) = f(x(t+\theta_1),\dots,x(t+\theta_m),x_t) \quad (x_t(\theta) := x(t+\theta), -h \leqslant \theta \leqslant 0) \tag{1}$$

где $0 < h < \infty$, все $\theta_j \in [-h, 0]$, f: $\mathbf{R}^m \times K[-h, 0] \to \mathbf{R}$, а $K[-h, 0]$ – множество функций $[-h, 0] \to \mathbf{R}$, непрерывных слева и имеющих конечное число точек разрыва, причем только первого рода. Будем считать, что f удовлетворяет условию Липшица в следующей форме:

$$|f(u_1,\dots,u_m,\varphi)-f(\upsilon_1,\dots,\upsilon_m,\psi)| \leqslant M_1|u_1-\upsilon_1|+\dots+$$
$$+M_m|u_m-\upsilon_m|+M_0\int_{-h}^{0}|\varphi(\theta)-\psi(\theta)|d\theta$$
$$(\forall u_1,\dots,u_m,\upsilon_1,\dots,\upsilon_m \in \mathbf{R},\quad \varphi,\psi \in K[-h,0];\ M_1,\dots,M_m,M_0 = \text{const} \geqslant 0)$$

Отметим, что форма правой части уравнения (1) охватывает ситуации, естественные с прикладных позиций; если же записать это уравнение в виде $\dot{x}(t) = g(x_t)$, то возникнет осложнение с областью определения функционала g.

Пусть функционал напряжения J, его критическое значение J_* и скачок Δx после достижения этого значения равны соответственно

$$J(\varphi) = \varphi(0) \ (\forall \varphi \in K[-h, 0]), \quad J_*(\varphi) = 0, \quad \Delta x = a = \text{const} > 0 \tag{2}$$

Уравнение (1) и условия (2) совместно определяют импульсное ЗДУ.

При заданном начальном условии

$$x_{t_0} = \varphi \in K[-h,0] \tag{3}$$

решение $\bar{x}$ задачи (1)–(3) строится следующим образом. Если на каком-либо интервале $[t_0, t_1)$ решение x задачи (1), (3) (при его определении x считается непрерывным на $[t_0, t_1]$, а $\dot{x}$ может иметь конечное число точек разрыва первого рода) не имеет нулей, то $\bar{x}(t) \equiv x(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$. Если же $x(t) \neq 0$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$, $x(t_1) = 0$ (в частности, если $\varphi(0) = 0$, тогда $t_1 = t_0$), то при $t > t_1$ $\bar{x}$ строится как решение x уравнения (1) с начальной точкой t_1 и начальной функцией, определенной при $t \leqslant t_1$ уже построенным решением $\bar{x}$, но с начальным значением $x(\overset{+}{t_1}) = a$. Это решение x при $t > t_1$ продолжается до первого момента $t_2 > t_1$, когда $x(t_2) = 0$ (если такой момент представится), после чего вновь полагаем $\bar{x}(\overset{+}{t_2}) = a$ и т.д.

Стандартным образом доказываются существование и единственность решения задачи (1)–(3) на достаточно малом временнóм интервале с левым концом t_0. Обозначив для краткости

$$f_0 := |f(0,..., 0, 0)|, \quad M := M_1 + ... + M_m + hM_0$$

получаем из условия Липшица оценку в области существования решения $\bar{x}$:

$$|f(\bar{x}(t+\theta_1),...,\bar{x}(t+\theta_m),\ \bar{x}_t)| \leqslant f_0 + M\sup|\bar{x}_t|$$

Из нее, также стандартно, получаем, что

$$|x(t)| \leqslant \begin{cases} \max\{\sup|\varphi|,\ a\}e^{M(t-t_0)} + f_0M^{-1}[e^{M(t-t_0)} - 1] & (M > 0) \\ \max\{\sup|\varphi|,\ a\} + f_0(t - t_0) & (M = 0) \end{cases}$$

Отсюда следует, что на каждом конечном интервале $[t_0, t)$ существования $\bar{x}$ значение $|\dot{\bar{x}}|$ между точками разрыва $\bar{x}$ ограничено сверху, а потому на $[t_0, t)$ может быть лишь конечное число таких точек. Значит, решение $\bar{x}$ можно продолжить как угодно далеко, т.е. доказана.

Теорема 1. В приведенных предположениях решение задачи (1)–(3) существует и единственно на любом интервале $[t_0, \bar{t})$ $(t_0 < t \leqslant \infty)$.

Замечание. В условиях теоремы 1 непрерывная зависимость решения задачи (1)–(3) от начальной функции φ, вообще говоря, не имеет места.

Картина существенно упрощается, если добавочно предположить, что для некоторого $d \in [a, \infty)$ выполнено неравенство

$$-\delta := \sup\{f(u_1,..., u_m, \psi):\ u_1,..., u_m \in [0, d],\ 0 \leqslant \inf\psi,\ \sup\psi \leqslant d\} < 0 \tag{4}$$

Следующее утверждение очевидно.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, неравенство (4) и $0 \leqslant \inf\varphi$, $\sup\varphi \leqslant d$. Тогда для решения x задачи (1)–(3) имеем

$$0 \leqslant x(t) < \max\{a, \varphi(t_0)\} \quad (t_0 < t < \infty)$$

$$x(t) < a \quad (t_0 + \max\{\delta^{-1}[\varphi(t_0) - a], 0\} < t < \infty)$$

Это решение имеет бесконечную последовательность $t_1(\geqslant t_0) < t_2 < ...$ точек разрыва, для которых справедливы неравенства

$$a(f_0 + dM)^{-1} \leqslant t_{k+1} - t_k \leqslant a\delta^{-1} \quad (k = 1, 2,...)$$

$$t_{k+1} - t_k \geqslant h_* \ (k:\ t_k \geqslant t_0 + h + \max\{\delta^{-1}[\varphi(t_0) - a], 0\};\quad h_* := a(f_0 + aM)^{-1})$$

Если $\sup\varphi \leqslant a$, то последнее неравенство справедливо при всех $k \geqslant 1$.

Для исследования асимптотического поведения решения x задачи (1)–(3) при $t \to \infty$ введем аналог функции последования Пуанкаре – оператор P, ставящий в соответствие любой функции $\varphi \in K[-h, 0]$ с $\varphi(0) = 0 = \min\varphi$, $\sup\varphi \leqslant d$ функцию x_{t_2}. Оценку постоянной Липшица для этого оператора дает

Лемма 1. Пусть для начальных функций φ^1, φ^2 выполнены условия теоремы 2 с $d = a$, причем $\varphi^1(0) = \varphi^2(0) = 0$ и

$$aM \leqslant \delta, \quad h \leqslant h_*, \tag{5}$$

Тогда

$$\sup|P\varphi^2 - P\varphi^1| \leqslant aM\delta^{-2}(f_0 + aM + \delta)p \quad (p := \sup|\varphi^2 - \varphi^1|) \tag{6}$$

Доказательство. Положим без ограничения общности $\overset{1}{t}_0 = \overset{2}{t}_0 = 0$. Тогда имеем при $t > 0$, пока нет разрывов:

$$|\dot{x}^2(t) - \dot{x}^1(t)| \leqslant M \max\left\{p, \max_{0<\tau\leqslant t} \Delta_{21}(\tau)\right\} \quad (\Delta_{21}(\tau) := |x^2(\tau) - x^1(\tau)|)$$

Отсюда следует, так как $x^1(0^+) = x^2(0^+) = a$, что

$$\Delta_{21}(t) \leqslant Mpt \quad (0 \leqslant t \leqslant \min\{M^{-1}, \overset{1}{t}_2, \overset{2}{t}_2\}) \tag{7}$$

Но в силу теоремы 2 и первого неравенства (5) имеем

$$\overset{i}{t}_2 \leqslant a\delta^{-1} \leqslant M^{-1} \quad (i = 1, 2)$$

Пусть, для определенности, $\overset{1}{t}_2 \leqslant \overset{2}{t}_2$. Тогда из (7) получаем

$$\Delta_{21}(t) \leqslant Mpt \quad (0 \leqslant t \leqslant t_2^1)$$

Однако из теоремы 2 и второго неравенства (5) следует, что $\overset{1}{t}_2 \geqslant h$. Поэтому при $-h < \theta \leqslant$ $\leqslant 0$ имеем

$$|x^2(\theta + t_2^2) - x^1(\theta + t_2^1)| \leqslant |x^2(\theta + t_2^2) - x^2(\theta + t_2^1)| + \Delta_{21}(\theta + t_2^1) \leqslant (t_2^2 - t_2^1)(f_0 + aM) + Mpa\delta^{-1}$$

Но если $\overset{2}{t}_2 - \overset{1}{t}_2 > 0$, то $x^2(\overset{1}{t}_2) > 0$, и потому

$$t_2^2 - t_2^1 = \frac{t_2^2 - t_2^1}{x^2(t_2^1) - x^2(t_2^2)}[x^2(t_2^1) - x^2(t_2^2)] \leqslant \delta^{-1}Mpt_2^1 \leqslant Mpa\delta^{-2}$$

Подставляя эту оценку в предыдущую, получаем неравенство (6). Лемма 1 доказана.

Если оператор последования сжимающий, то система, описываемая импульсным ЗДУ рассматриваемого вида, имеет единственный и притом устойчивый предельный цикл. Об этом говорит

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1, условие (4), а также неравенства $h \leqslant h_*$ и

$$2aM \leqslant (f_0^2 + 2f_0\delta + 5\delta^2)^{1/2} - f_0 - \delta \tag{8}$$

Тогда импульсное ЗДУ (1), (2) имеет в полосе $0 \leqslant x(t) < a$ единственное, с точностью до произвольного сдвига по t, периодическое решение $t \mapsto \bar{x}(t)$. В условиях теоремы 2 решение $t \mapsto x(t)$ асимптотически, при $t \to \infty$, "выходит" на $\bar{x}$ в следующем смысле: $t_k = kT + \text{const} + O(e^{-\alpha t})$, где T – период функции $\bar{x}$, $\alpha > 0$;

$$\sup|x(\cdot + t_k) - \bar{x}(\cdot + \bar{t})|_{[0, t_{k+1} - t_k] \cap [0, T]} = O(e^{-\alpha k})$$

при $k \to \infty$, где $\bar{x}(\bar{t}) = 0$.

Доказательство. Пусть x – решение задачи (1)–(3) в условиях теоремы 2. Рассмотрим последовательность функций

$$\theta \mapsto x_k(\theta) := x(\theta + t_k) \quad (k = 1, 2, \ldots;\ t_{k-1} - t_k < \theta \leqslant 0)$$

Для всех достаточно больших k, в силу теоремы 2 и неравенства $h \leqslant h_*$, каждая из этих функций может рассматриваться как начальная по отношению к следующей. Приняв $\varphi^i(\theta) =$ $= x_{k+i-1}(\theta)$ $(i = 1, 2)$, можем применить лемму 1; из нее следует, что

$$\sup_{-h<\theta\leqslant 0}|x_{k+2}(\theta) - x_{k+1}(\theta)| \leqslant aM\left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{f_0} + \frac{aM}{\delta f_0}\right)\sup_{-h<\theta\leqslant 0}|x_{k+1}(\theta) - x_k(\theta)|$$

Но из неравенства (8) вытекает, что коэффициент в правой части меньше единицы. Значит, последовательность $\{x_k\}$ функций, равномерно непрерывных на $(-h, 0]$, равномерно, с экспоненциальной скоростью, сходится к функции $\bar{x}$, также равномерно непрерывной на $(-h, 0]$.

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в формуле $x_{t_{k+1}} = Px_{t_k}$, получаем, что если принять $\bar{x}$ за начальную функцию, то соответствующее решение задачи (1)–(3) оказывается периодическим. Таким образом, функцию $\bar{x}$ можно продолжить на всю ось t до периодического решения импульсного ЗДУ (1), (2); период $\bar{x}$ равен $\lim_{k\to\infty}(t_{k+1} - t_k)$. Асимптотический "выход" $x(t)$ на $\bar{x}(t)$ при $t \to \infty$ теперь вытекает из автономности импульсного ЗДУ (1), (2). Единственность периодического решения следует из возможности применения к двум таким решениям леммы 1, чем завершается доказательство теоремы 3.

Неравенства $h \leqslant h_*$ и (8), обеспечивающие существование устойчивого предельного цикла, представляются слишком ограничительными и желательно их по возможности ослабить; в частности, исследовать случай $h = \infty$. Интересно также получить рассматриваемое здесь импульсное ЗДУ как предел более реалистической сингулярно возмущенной системы с высокой, но конечной скоростью изменения состояния при достижении критических ситуаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S.* Theory of impulsive differential equations. Singapore: World Scientific, 1989. 273 p.

Москва

Поступила в редакцию
17.VI.1993

УДК 531.36

© 1994 г. С.П. Сосницкий

О ДЕЙСТВИИ ПО ГАМИЛЬТОНУ КАК ФУНКЦИИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Для некоторых классов консервативных систем находится в явном виде действие по Гамильтону как функция фазовых координат и времени. Рассматривается применение функции действия к вопросам исследования устойчивости консервативных систем. Показано, что уже из самого представления функции действия по Гамильтону в явном виде могут быть сделаны полезные заключения о качественном характере поведения решений рассматриваемых систем.

1. Введение. Как известно [1], уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0 \tag{1.1}$$

могут быть получены из условия стационарности действия по Гамильтону

$$\delta S = \delta \int_0^{t_1} L(\tau, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})d\tau = 0 \tag{1.2}$$

что дает основание считать действие S носителем информации о системах, описываемых уравнениями (1.1).

Исходя из данного факта и предполагая ниже консервативность системы (1.1), заменим в выражении действия S фиксированное значение t_1 на текущее t и будем рассматривать S как