УДК 539.1

© 1994 г. Е.Б. Кузнецов, В.И. Шалашилин

# ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ КАК ЗАДАЧА ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО НАИЛУЧШЕМУ ПАРАМЕТРУ

Задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений формулируется как задача продолжения по наилучшему параметру. Доказывается, что таким параметром является длина интегральной кривой этой задачи. На тестовом примере численного решения жесткой системы уравнений, описывающей возмущенное движение самолета, демонстрируется преимущество предложенного преобразования.

Многие задачи механики твердого деформируемого тела сводятся к решению системы нелинейных алгебраических, трансцендентных, дифференциальных или интегральных уравнений, содержащих в явном виде параметр. Наиболее распространенным способом анализа решений таких систем является прослеживание изменения этих решений по мере изменения параметра задачи. Реализация такого подхода естественно связана с продолжением решения нелинейных уравнений по параметру, возможность которого устанавливается теоремой о неявных функциях и ее обобщениями.

Эффективность любого метода продолжения решения зависит от удачного выбора параметра продолжения. Было предложено [1] в качестве параметра продолжения использовать длину кривой множества решений системы нелинейных уравнений.

Ставился вопрос [2] о выборе такого направления продолжения, которое обеспечивало бы наилучшую обусловленность соответствующей линеаризованной системы уравнений. В качестве меры обусловленности была принята величина определителя, отнесенная к произведению квадратных норм его строк. В результате было показано, что наилучшую обусловленность обеспечивает движение в направлении по касательной к кривой множества решений и тем самым подтверждено высказанное ранее предположение [1].

Был исследован [3] один частный случай этой проблемы и полученный оптимальный параметр продолжения использован для решения ряда конкретных задач нелинейного деформирования.

В данной статье проводятся более подробные исследования, доказываются необходимые и достаточные условия выбора наилучшего параметра продолжения, который используется для формулирования задачи Коши, обладающей рядом достоинств.

**1.** Рассмотрим решение системы $n$ нелинейных уравнений с $n$ неизвестными $x_1, \ldots, x_n$ и параметром $p$

$$F_j(x_1,\ldots,x_n,p) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{1.1}$$

Запишем эту систему в форме, реализующей равноправие неизвестных $x_j$ и параметра $p$, для чего введем $(n + 1)$-мерное евклидово пространство $R^{n+1}$: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} = p\}$. В этом пространстве система уравнений (1.1) может быть записана в виде

$$F_j(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0 \tag{1.2}$$

Множество решений этой системы, соответствующее различным значениям параметра задачи $p$, представляет собой некоторую кривую в пространстве $R^{n+1}$, которую в дальнейшем будем называть кривой множества решений системы (1.2).

Будем полагать, что эта кривая гладкая. Решение системы (1.2) будем отыскивать при помощи метода продолжения. Было отмечено [3], что продолжение решения может быть как дискретным, так и непрерывным. Но в обоих случаях задача на каждом шаге продолжения сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений, матрица которой является матрицей Якоби системы (1.2). Потеря сходимости численного метода может быть связанной с обращением в нуль ее якобиана, т.е. обусловленностью системы линейных уравнений.

Проблема заключается в том, чтобы выбрать параметр продолжения решения, обеспечивающий наилучшую обусловленность этой системы. В качестве параметра продолжения выберем некоторый параметр $\mu$, приращение которого определяется линейной комбинацией вида

$$\Delta\mu = \alpha_i \Delta x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1 \tag{1.3}$$

Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам в указанных пределах.

Фиксируя различные наборы чисел $\alpha_i$, можем рассмотреть все возможные параметры продолжения. Например, при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, $\alpha_{n+1} = 1$ параметром продолжения будет параметр задачи $p = x_{n+1}$. Если в пространстве $R^{n+1}$ ввести вектор $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})^T$, то приращение параметра $\mu$, как это следует из формулы (1.3), можно понимать как скалярное произведение векторов $\boldsymbol{\alpha}$ и $\Delta\mathbf{x} = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_{n+1})^T \in R^{n+1}$: $\Delta\mu = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$.

По смыслу представления (1.3) вектор $\boldsymbol{\alpha}$ определяет направление, в котором выбирается параметр продолжения. Так, при выборе $\alpha_i$ в виде символа Кронекера $\alpha_i = \delta_{ik}$ вектор $\boldsymbol{\alpha}$ оказывается ортом оси $x_k$, в направлении которой выбран параметр продолжения. В дальнейшем каждое направление будем задавать единичным вектором $\boldsymbol{\alpha}$.

Уравнения продолжения решения по параметру $\mu$ построим, продифференцировав по этому параметру уравнения (1.2) в предположении, что $x_i = x_i(\mu)$, и переходя к пределу при $\Delta\mu \to 0$ в равенстве (1.3), предварительно разделенном на $\Delta\mu$. Тогда для компонент вектора $x_{i,\mu} = dx_i / d\mu = (x_{1,\mu}; \ldots x_{n+1,\mu})^T$ получим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n+1} \\ F_{1,1} & F_{1,2} & \ldots & F_{1,n+1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ F_{n,1} & F_{n,2} & \ldots & F_{n,n+1} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_{1,\mu} \\ x_{2,\mu} \\ \ldots\ldots \\ x_{n+1,\mu} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{Vmatrix} \tag{1.4}$$

Индекс после запятой в элементе $F_{j,i}$ означает компоненту, по которой производится дифференцирование.

Под оптимальным параметром продолжения будем понимать параметр, дающий линеаризованной системе (1.4) наилучшую обусловленность, в том смысле, что малые изменения элементов матрицы и правых частей этой системы уравнений будут приводить к наименьшим изменениям ее решения. Покажем, что таким параметром будет $\lambda$ – длина дуги кривой множества решений системы уравнений (1.2). В качестве меры обусловленности системы (1.4) примем [2] величину ее определителя, деленную на произведение квадратичных норм строк, которую обозначим так: $D$. В силу неравенства Адамара для определителей $|D| \in [0, 1]$. Было показано [4], что большему значению $|D|$ соответствует лучшая обусловленность системы уравнений. В рассматриваемом случае справедливо следующее утверждение.

*Лемма* 1. Абсолютная величина определителя системы уравнений (1.4), деленная на произведение квадратичных норм его строк, достигает наибольшего значения в том случае, когда вектор $\alpha$ касателен к кривой множества решений системы уравнений (1.2) в каждой ее точке.

*Доказательство*. Исследуем на экстремум функцию ($\Delta$ – определитель системы (1.4)) $D = \Delta/d$, где

$$\Delta = (-1)^{i+1}\alpha_i\Delta_i \tag{1.5}$$

$$d = \prod_{i=1}^{n+1} t_i, \quad t_{\beta+1} = (F_{\beta,i}F_{\beta,i})^{1/2}, \quad \beta = 1,2,\ldots,n; \quad i = 1,2,\ldots,n+1, \tag{1.6}$$

(нет суммирования по $\beta$), причем $t_1 = (\alpha_i\alpha_i)^{1/2} = 1$, так как $\alpha$ – единичный вектор. Следовательно, $d$ не зависит от $\alpha_i$.

Для нахождения экстремума функции $D$ при условии, что $\alpha$ единичный вектор, составим функцию Лагранжа

$$L = (-1)^{i+1}\alpha_i\Delta_i / d + \gamma(1-\alpha_i\alpha_i), \quad i = 1,2,\ldots,n+1$$

($\gamma$ – неопределенный множитель Лагранжа). Экстремум этой функции достигается при $\alpha_k = (-1)^{k+1}\Delta_k / (2\gamma d)$ $(k = 1,2,\ldots,n+1)$. Используя равенство $\alpha_k\alpha_k = 1$, найдем множитель Лагранжа. Таким образом, экстремум функции Лагранжа достигается при

$$\alpha_k = \pm(-1)^{k+1}\Delta_k / (\Delta_i\Delta_i)^{1/2}$$

Если это выражение для $\alpha_k$ подставить в равенство (1.5), то получаем, что определитель системы (1.4) должен удовлетворять равенству

$$\Delta = \pm(\Delta_i\Delta_i)^{1/2} \tag{1.7}$$

и экстремум функции Лагранжа достигается при

$$\alpha_k = (-1)^{k+1}\Delta_k / \Delta = dx_k / d\mu \tag{1.8}$$

При этом значение множителя Лагранжа будет равным

$$\gamma = \Delta/(2d) = D/2$$

Анализ второго дифференциала функции Лагранжа как квадратичной формы относительно дифференциалов $d\alpha_k$ показывает, что модуль функции $D = \Delta/d$ принимает в этом случае наибольшее значение $|D| = (\Delta_i\Delta_i)^{1/2} / d$. В самом деле, знак второго дифференциала функции Лагранжа

$$d^2L = -2\gamma(d\alpha_i d\alpha_i)$$

определяется множителем Лагранжа $\gamma$, который положителен, если $D > 0$, и следовательно, функция $D$ принимает наибольшее значение. Знак множителя $\gamma$ отрицателен, если $D < 0$ и, следовательно, функция $D$ принимает наименьшее значение.

Таким образом, доказано, что вектор $\alpha$, определяющий согласно формуле (1.3) параметр продолжения $\mu$, доставляет наибольшее значение абсолютной величине функции $D$ в том случае, когда он совпадает с самим вектором решения $(x_{1,\mu}; \ldots$ $\ldots, x_{n+1,\mu})^T$ линеаризованной системы (1.4), т.е. когда вектор $\alpha$ направлен по касательной к кривой множества решений системы уравнений (1.2).

Рассмотрим влияние возмущений элементов матрицы системы (1.4) на ее обусловленность.

*Лемма* 2. Квадратичная погрешность решения системы уравнений (1.4), возникающая при возмущении элементов матрицы системы, достигает наименьшего значения в том случае, когда вектор $\alpha$ направлен по касательной к кривой множества решений системы (1.2) в каждой ее точке.

*Доказательство*. Рассмотрим случай, когда с погрешностью задана первая строка матрицы системы (1.4). Пусть вектор $\alpha$ имеет вид $(\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1},\alpha_j+\varepsilon,\alpha_{j+1},\dots,\alpha_{n+1})^T$. Определитель $\Delta_\varepsilon$ такой системы будет выражаться через определитель $\Delta$ исходной по формуле

$$\Delta_\varepsilon = \Delta + (-1)^{j+1}\varepsilon\Delta_j = \Delta(1+(-1)^{j+1}\Delta_j\varepsilon/\Delta)$$

Так как рассматриваются малые возмущения $\varepsilon$, то компоненты возмущенного решения $y_{i,\mu}$ можно записать в виде

$$y_{i,\mu} = (-1)^{i+1}\Delta_i/\Delta_\varepsilon \approx (-1)^{i+1}\Delta_i/\Delta(1-(-1)^{j+1}\varepsilon\Delta_j/\Delta)$$

Тогда компоненты $\delta_i$ вектора погрешности $\delta = (\delta_1,\dots, \delta_{n+1})^T$ решения возмущенной системы будут вычисляться по формулам

$$\delta_i = y_{i,\mu} - x_{i,\mu} = (-1)^{i+j+1}\varepsilon\Delta_j\Delta_i/\Delta^2$$

Исследуем на экстремум квадратичную погрешность $\delta = \varepsilon^2\Delta_j^2\Delta_i\Delta_i/\Delta^4$ в предположении, что вектор $\alpha$ – единичный. Функцию Лагранжа можно взять в виде

$$L = \varepsilon^2\Delta_j^2\Delta_i\Delta_i/\Delta^4 + \gamma(\alpha_i\alpha_i - 1), \quad i = 1,2,\dots,n+1$$

Минимум этой функции достигается при

$$\alpha_k = 2\varepsilon^2\Delta_j^2\Delta_i\Delta_i(-1)^{k+1}\Delta_k/(\gamma\Delta^5), \quad k = 1,2,\dots,n+1 \tag{1.9}$$

Деля $k$-е уравнение этих соотношений на $m$-е, получаем равенство, позволяющее выразить $\alpha_m$ через $\alpha_k$

$$\alpha_m = (-1)^{m-k}\alpha_k\Delta_m/\Delta_k \tag{1.10}$$

Тогда определитель (1.5) системы уравнений (1.4) можно представить как

$$\Delta = (-1)^{m-1}\alpha_m\Delta_m = (-1)^{-k-1}\alpha_k\Delta_m\Delta_m/\Delta_k \tag{1.11}$$

$m = 1, 2, \dots, n+1.$

В этом случае система уравнений (1.9) может быть легко разрешена относительно $\alpha_k$:

$$\alpha_k = \left(\frac{2\varepsilon\Delta_j^2}{\gamma(\Delta_m\Delta_m)^4}\right)^{1/6}(-1)^{k+1}\Delta_k \tag{1.12}$$

Заметим, что в выражениях (1.10), (1.11) нет суммирования по индексу $k$.

Множитель Лагранжа $\gamma$ найдем, подставив (1.12) в равенство $\alpha_i\alpha_i = 1$, тогда $\gamma = 2\varepsilon^2\Delta_j^2/(\Delta_m\Delta_m)$ и выражение (1.12) примет вид

$$\alpha_k = (-1)^{k+1}\Delta_k/(\Delta_m\Delta_m)^{1/2} \tag{1.13}$$

Если эти значения $\alpha_k$ подставить в формулу (1.5), то получим, что $\Delta = (\Delta_m\Delta_m)^{1/2}$, и равенства (1.13) в точности совпадут с равенствами для $dx_k/d\mu$, т.е. будут иметь место соотношения (1.8), а это и требовалось доказать.

Изучим влияние возмущения правых частей системы (1.4) на ее обусловленность.

*Лемма* 3. Квадратичная погрешность решения системы уравнений (1.4), возникающая при возмущении правых частей системы, достигает наименьшего значения в том случае, когда вектор $\boldsymbol{\alpha}$ направлен по касательной к кривой множества решений системы уравнений (1.2) в каждой ее точке.

*Доказательство.* Пусть вектор возмущенной правой части системы (1.4) имеет вид $(1 + \varepsilon, 0, \ldots, 0)^T$, тогда вектор погрешности будет $\boldsymbol{\delta} = \varepsilon(x_{1,\mu}; \ldots, x_{n+1,\mu})^T$ и квадратичная погрешность примет вид

$$\boldsymbol{\delta}^2 = \varepsilon^2 \Delta_i \Delta_i / \Delta^2, \quad i = 1,2,\ldots,n+1$$

Функцию Лагранжа можно взять в виде

$$L = \varepsilon^2 \Delta_i \Delta_i / \Delta^2 + \gamma(\alpha_i \alpha_i - 1)$$

и исследовать ее на экстремум при помощи вышеописанного приема, тогда получим, что в точке экстремума компоненты вектора должны удовлетворять равенствам (1.8), и лемма доказана.

Теперь, наконец, можно доказать следующий результат.

*Теорема.* Для того чтобы система линеаризованных уравнений (1.4) была наилучшим образом обусловленной необходимо и достаточно в качестве параметра продолжения решения системы нелинейных уравнений (1.2) принять длину дуги, вычисленную вдоль кривой множества решений этой системы уравнений.

*Доказательство.* Рассмотрим необходимые условия. Согласно смыслу, который вкладываем в понятие обусловленности, доказанные леммы можно объединить следующей формулировкой: система линейных уравнений (1.4) будет наилучшим образом обусловленной в том случае, когда вектор $\boldsymbol{\alpha}$ направлен по касательной к кривой множества решений нелинейной системы уравнений (1.2) в каждой ее точке, т.е. когда будут иметь место равенства (1.8). С учетом этого факта выражение $\alpha_i \alpha_i = 1$ можно записать в виде

$$(d\mu)^2 = dx_i dx_i, \quad i = 1,2,\ldots,n+1 \tag{1.14}$$

откуда следует, что $d\mu = (dx_i dx_i)^{1/2}$ – дифференциал длины дуги кривой множества решений системы (1.2). Если положить, что начальной точке этой кривой соответствует значение $\mu = 0$, то параметр продолжения будет равен ее длине, отсчитываемой от этой точки. Необходимость доказана.

Рассмотрим достаточные условия. Выбираем в качестве параметра продолжения решения $\mu$ – длину кривой множества решений системы (1.2). Вектор $\boldsymbol{\tau}$, касательный к этой кривой, будет равен $\boldsymbol{\tau} = (x_{1,\mu}; \ldots, x_{n+1,\mu})^T$. Как отмечалось ранее, смысл единичного вектора $\boldsymbol{\alpha}$ заключается в том, что он определяет направление продолжения решения задачи (1.2). Поэтому в силу выбранного параметра продолжения он тоже должен быть направлен по касательной к кривой множества решений, т.е. векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\tau}$ должны быть коллинеарными. Но они и равны, так как вектор $\boldsymbol{\tau}$ также единичный. В самом деле, дифференциал выбранного параметра продолжения, как элемент длины кривой, должен удовлетворять равенству (1.14). Если это равенство разделить на $(d\mu)^2$, то получим

$$x_{i,\mu} x_{i,\mu} = \boldsymbol{\tau}^2 = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n+1.$$

Из равенства векторов следует равенство их компонент. Компоненты же $dx_k/d\mu = x_{k,\mu}$ при любом параметре продолжения $\mu$ должны удовлетворять системе линейных уравнений (1.4).

Следовательно, будут выполняться равенства (1.8), левая часть которых доставляет соответствующие экстремумы функциям, фигурирующим в доказанных леммах. Реализация же этих экстремумов обеспечивает наилучшую обусловленность системы (1.4), что и требовалось доказать.

**2.** Применим эту теорему к формулировке задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dy_i / dt = f_i(t, y_1, \dots, y_n), \quad y_i(t_0) = y_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.1}$$

Интеграл этой задачи

$$F_i(t, y_1, \dots, y_n) = 0 \tag{2.2}$$

задает некоторую интегральную кривую, процесс построения которой может быть понят как процесс продолжения решения $y$ по параметру-аргументу $t$. Такое толкование позволяет поставить вопрос о выборе наилучшего параметра продолжения решения, а значит, и наилучшего аргумента задачи (2.1).

Для решения этой проблемы считаем $y_i$ и $t$ функциями некоторого параметра $\mu$, приращение которого в каждой точке интегральной кривой представим в виде

$$\Delta\mu = \alpha_i \Delta y_i + \alpha_{n+1} \Delta t, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.3}$$

Здесь $\Delta y_i$, $\Delta t$ – приращение соответствующих функций. О смысле коэффициентов $\alpha_j$ ($j = 1, 2, \dots, n + 1$) говорилось выше.

Разделив равенство (2.3) на $\Delta\mu \to 0$ и, учитывая соотношения

$$dy_i / dt = (dy_i / d\mu)(dt / d\mu)^{-1}$$

представим систему уравнений (2.3), (2.1) в виде

$$\alpha_i y_{i,\mu} + \alpha_{n+1} t_{,\mu} = 1, \quad y_{i,\mu} - f_i t_{,\mu} = 0 \tag{2.4}$$

$$(y_{i,\mu} = dy_i / d\mu, \quad t_{,\mu} = dt / d\mu)$$

На систему (2.4) можно смотреть как на уравнения продолжения при построении кривой множества решений системы уравнений (2.2), которая является интегральной кривой задачи (2.1).

Доказанная теорема утверждает, что система уравнений (2.4) будет наилучшим образом обусловленной, если в качестве параметра-аргумента $\mu$ принять длину дуги $\lambda$, отсчитываемую вдоль кривой множества решений системы (2.2), т.е. вдоль интегральной кривой задачи (2.1).

В этом случае, учитывая равенства (1.8), систему (2.4) можно записать в виде

$$y_{i,\lambda} y_{i,\lambda} + t_{,\lambda}^2 = 1, \quad y_{i,\lambda} - f_i t_{,\lambda} = 0$$

Эта система легко разрешается относительно $y_{i,\lambda}$, $t_{\lambda}$. Полагая, что начальной точке задачи (2.1) соответствует значение $\lambda = 0$, приходим к следующей формулировке задачи Коши:

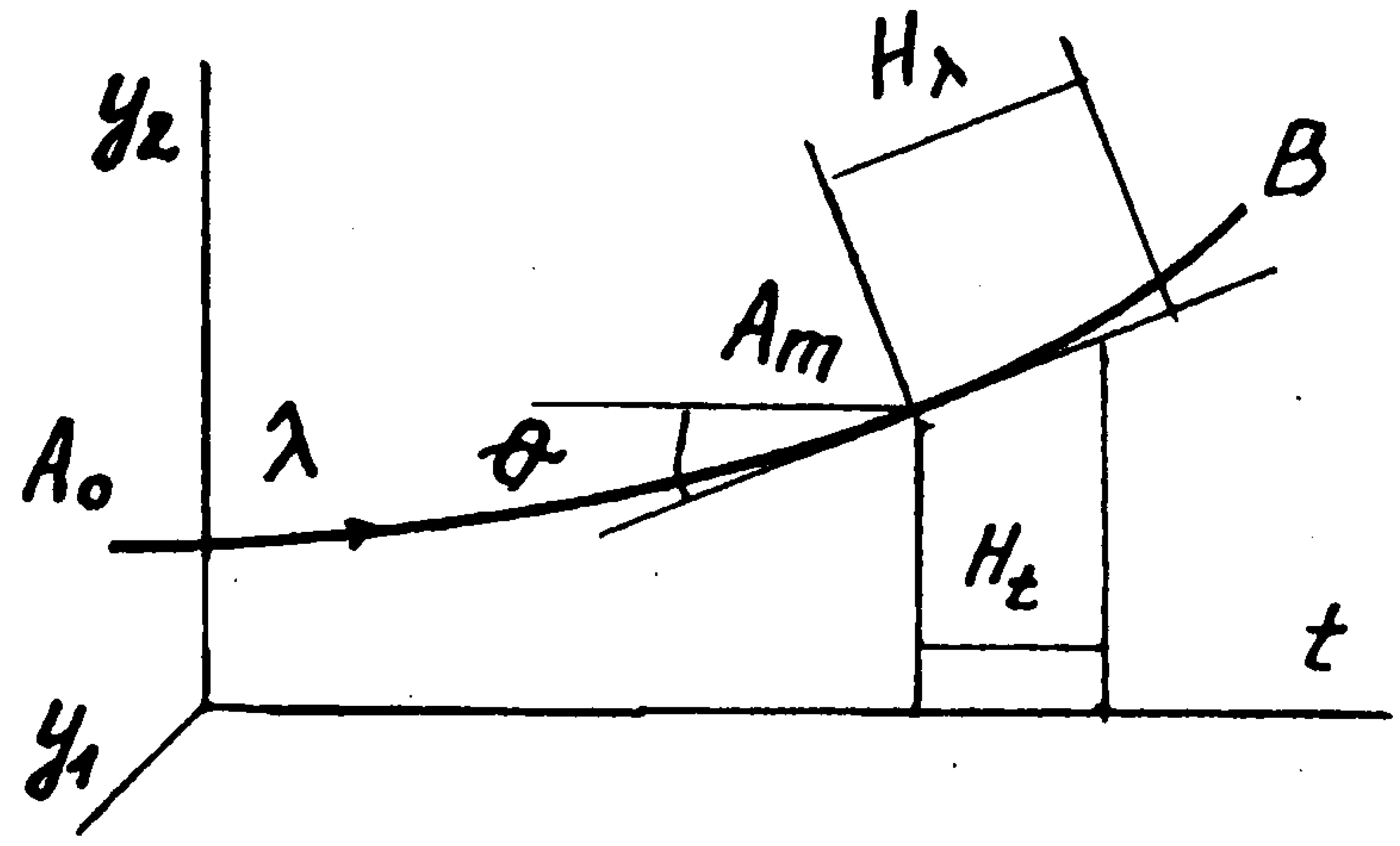
$$\begin{aligned} &dy_i / d\lambda = f_i / (1 + f_j f_j)^{1/2}, \quad y_i(0) = y_{i0} \\ &dt / d\lambda = 1 / (1 + f_j f_j)^{1/2}, \quad t(0) = t_0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{2.5}$$

Обсуждались [5, 6] некоторые преимущества решения задачи (2.5) по сравнению с задачей (2.1). Рассмотрим еще одно из них на примере модельной задачи

$$dy_1 / dt = a_1 y_1, \quad dy_2 / dt = a_2 y_2 \tag{2.6}$$

где $a_1, a_2$ – некоторые действительные числа. Численное решение этой задачи будем отыскивать при помощи метода Эйлера.

Покажем, что из начальной точки $A_0$ ($t_0$, $y_{10}$, $y_{20}$) интегральной кривой в конечную точку




$B$ (фигура), можем придти за меньшее число шагов, двигаясь по параметру $\lambda$, а не по параметру $t$. Другими словами, покажем, что в любой точке интегральной кривой справедливо неравенство

$$H_\lambda \cos\theta \geqslant H_t \tag{2.7}$$

Здесь $\theta$ – угол между касательной к интегральной кривой и осью $t$; $H_t$ и $H_\lambda$ – наименьшие шаги интегрирования по переменным $t$ и $\lambda$, при которых итерациональный процесс, описываемый формулой Эйлера, перестает сходиться.

Явная схема метода Эйлера для уравнения (2.6) будет иметь вид

$$y_{i,m+1} = y_{i,m} + h_t a_i y_{i,m} = (1 + h_t a_i) y_{i,m}, \quad m = 1,2,\ldots, i = 1,2.$$

($ht$ – шаг интегрирования по переменной $t$). Эта схема будет устойчивой, если выполняется условие $|1 + h_t a_i| < 1$, т.е. при $a_i < 0$

$$H_t = -2/a_1, \quad a_1 < a_2 \tag{2.8}$$

После преобразования задачи (2.6) к виду (2.5) в полученной системе трех дифференциальных уравнений решение уравнения для функции $t$ будет определяться решением уравнений для функций $y_i$. Если эти уравнения линеаризовать в окрестности некоторого значения $y_i = y_{i,m}$ [6], то условие устойчивости преобразованной задачи в случае $a_1 \ll a_2$ примет вид

$$|1 + h_\lambda \Omega_{ij}| < 1; \quad i,j = 1,2; \quad i \neq j$$

$$\Omega_{ij} = a_i (1 + a_j^2 y_{j,m}^2)(1 + a_1^2 y_{1,m}^2 + a_2^2 y_{2,m}^2)^{-3/2}$$

где $h_\lambda$ – шаг интегрирования по $\lambda$. Это неравенство будет удовлетворяться при $a_i < 0$ и

$$H_\lambda = \min_{i,j}(-2/\Omega_{ij}) \tag{2.9}$$

Так как $\cos\theta = (1 + a_1^2 y_{1,m}^2 + a_2^2 y_{2,m}^2)^{-1/2}$, то при учете (2.8) и (2.9) получаем соотношение, которое доказывает неравенство (2.7), а значит, и эффективность предложенного преобразования.

**3.** В качестве тестового примера исследуем решение жесткой системы уравнений. Для этого рассмотрим установившийся прямолинейный полет самолета в плоскости без скольжения с небольшим отклонением параметров от начальных. Линеаризованные уравнения возмущенного движения самолета могут быть записаны в виде [7]

$$d\mathbf{y}/dt = A\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T \tag{3.1}$$

$$A = \begin{Vmatrix} -0{,}104 & 0{,}043 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}57 & -5{,}12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -12{,}574 & -43{,}68 & 0 & -9{,}672 \end{Vmatrix}$$

Первые два уравнения системы (3.1) описывают продольное и поперечное возмущения величины скорости самолета соответственно. Последние два уравнения описывают возмущение по углу тангажа.

Можно показать, что матрица $A$ системы уравнений (3.1) имеет следующие собственные значения: $r_1 = 0{,}16$, $r_2 = -0{,}265$, $r_{3,4} = -7{,}4 \pm i6{,}2$. Ясно, что имеют место неравенства $|r_1|<|r_2|\ll|r_3|=|r_4|$, из которых следует, что система уравнений (3.1) является жесткой. Эта система при начальных условиях

$$y_1(0) = y_3(0) = y_4(0) = 0, \quad y_2(0) = 1 \tag{3.2}$$

интегрировалась на интервале $t \in [0, 5]$ при помощи программы PC1, описанной в [8]. Это потребовало почти в двое большего времени счета по сравнению с решением той же задачи (3.1), (3.2), предварительно преобразованной к виду (2.5).

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Ворович И.И., Зипалова В.Ф.* К решению нелинейных краевых задач теории упругости методом перехода к задаче Коши // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. № 5. С. 894–901.
2. *Riks E.* The application of Newton's method to the problem of elastic stability // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.. 1972. V. 39. N 4. P. 1060–1065. *Рикс Е.* Применение метода Ньютона к задаче упругой устойчивости // Прикл. механика. 1972. № 4. С. 204–209.
3. *Григолюк Э.И., Шалашилин В.И.* Проблемы нелинейного деформирования М.: Наука, 1988. 231 с. *Grigolyuk E.I., Shalashilin V.I.* Problems of nonlinear deformation. Dordrecht e.a.: Kluwer Acad. Publ., 1991. 262 p.
4. *Ortega J.M., Poole W.G.* An introduction to numerical methods for differential equations. Marshfield (Mass): Pitman Publ. Inc., 1981. 329 p. *Ортега Дж., Пул У.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986. 288 с.
5. *Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б.* Задача Коши для нелинейно деформируемых систем как задача продолжения решения по параметру // Докл. АН СССР. 1993. Т. 329. № 4. С. 426–428.
6. *Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И.* Задача Коши как задача продолжения решения по параметру // Журнал вычислит. матем. и матем. физики. 1993. Т. 33. № 12. С. 1792–1805.
7. *Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г.* Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979. 208 с.
8. *Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И.* Задача Коши для деформируемых систем как задача продолжения решения по параметру // Изв. АН СССР. МТТ. 1993. № 6. С. 145–152.



Москва

Поступила в редакцию
2.VII.1993