ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 58, Вып. 6, 1994

УДК 531.01

© 1994 г. М.В. Дерябин

# О РЕАЛИЗАЦИИ НЕУДЕРЖИВАЮЩИХ СВЯЗЕЙ

Рассматривается задача о реализации односторонней связи при помощи упругой силы. При более общих предположениях о непотенциальности обобщенных сил по сравнению с [1] установлена справедливость теоремы о предельном переходе.

Общая теорема о реализации двусторонних связей при помощи упругих сил была предложена Курантом и доказана в [2]. Аналогичная теорема для односторонних связей была сформулирована в [1].

**1. Исходные уравнения.** Пусть дана натуральная механическая система в $\mathbf{R}^n = \{r\}$, на которую наложена голономная идеальная односторонняя связь, задающая в $\mathbf{R}^n$ полупространство $M$ с границей $\partial M$ размерности $n_0 = n - 1$. Пусть $E(r, r^\cdot)$ – кинетическая энергия системы без связей, $F(r, r^\cdot)$ – обобщенная активная сила. В окрестности каждой точки многообразия $\partial M$ можно ввести координаты $q \in \mathbf{R}$ и $x \in \mathbf{R}^{n_0}$ так, чтобы полупространство $M$ задавалось неравенством $q \geqslant 0$ (а $\partial M$ – уравнением $q = 0$) и квадратичная форма $E$ не содержала произведений $x^\cdot$ и $q^\cdot$. Поэтому в дальнейшем для упрощения изложения будем считать, что такие координаты введены глобально, т.е. $q$ и $x$ – соответственно первая и следующие $n - 1$ компоненты $r$.

Тогда

$$E(r, r^\cdot) = \mathrm{T}(x, x^\cdot) + {}^1\!/\!{}_2 q^\cdot A(x) q^\cdot + O(|q|), \quad A(x) > 0 \tag{1.1}$$

Уравнения движения имеют вид

$$(\partial E/\partial r^\cdot)^\cdot - \partial E/\partial r = F + R, \quad q \geqslant 0 \tag{1.2}$$

где $R$ – сила реакции связи. Система движется по связи, если в процессе движения $q = 0$.

Рассматривается задача о реализации односторонней связи с помощью силы с потенциалом $NW$, где $N$ – большой положительный параметр, а

$$W = {}^1\!/\!{}_2 qB(x)q + O(|q|^3) \quad \text{при} \quad q < 0; \quad W = 0 \quad \text{при} \quad q \geqslant 0 \tag{1.3}$$

В дальнейшем для упрощения изложения коэффициент $B(x)$ будем считать тем же, что и соответствующий коэффициент в квадратичной форме $E(r, r^\cdot)$, т.е. $B(x) = A(x)$. Уравнения движения системы, свободной от связи, имеют вид

$$(\partial E/\partial r^\cdot)^\cdot - \partial E/\partial r = F - N\partial W/\partial r \tag{1.4}$$

**2. Реализация движения системы по связи.** Пусть $r_\infty(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \tau)$ – движение системы с односторонней связью, задаваемое уравнением (1.2) с кинетической энергией $E$ вида (1.1), $R_\infty(t)$ – сила реакции. Пусть выполняются следующие условия: траектория движения принадлежит многообразию $\partial M$, т.е. $q_\infty(t) = 0$ и $R_\infty(t) > 0$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$, и функция $W$ имеет вид (1.3).

Пусть $r_N(t)$ – движение системы без связи (1.4) с начальными условиями $r_N(0) = r_\infty(0)$, $r_N^\cdot(0) = r_\infty^\cdot(0)$.

*Теорема* 1. При достаточно большом $N$ и $0 \leqslant t \leqslant \tau$ движение определено и выполняются равенства

$$r_N(t) = r_\infty(t) + O(N^{-1})^{\cdot}, \quad r_N^{\cdot}(t) = r_\infty^{\cdot}(t) + O(N^{-1/2}) \tag{2.2}$$

*Замечание.* Оценку (2.2) можно уточнить:

$$x_N^{\cdot}(t) = x_\infty^{\cdot}(t) + O(N^{-1})^{\cdot}, \quad q_N^{\cdot}(t) = q_\infty^{\cdot}(t) + O(N^{-1/2}) \tag{2.3}$$

**3. Вспомогательные утверждения.** *Утверждение* 1. Рассмотрим начальные условия для системы уравнений (1.2) в компакте $G$, который принадлежит фазовому пространству $\mathbf{R}^{2n}$. Тогда любое решение $r(t)$, такое, что $r(0)$, $r^{\cdot}(0)$ принадлежат $G$ (при этом $q^{\cdot}(0)$, $q(0) \geqslant 0$), за время $\Delta t \leqslant \tau N^{-1/2}$ сдвинется от начальных условий не более чем на $DN^{-1/2}$ при достаточно больших $N$, причем

$$D = C\tau + O(N^{-1/2}), \quad C = \text{const} \geqslant 0 \tag{3.1}$$

*Утверждение* 2. Пусть начальные условия уравнения (1.4) принадлежат компакту $G$, причем $-QN^{-1/2} \leqslant q_N^{\cdot}(0) \leqslant 0$ и $q_N(0) = 0$. Тогда при достаточно больших $N$

$$|x_N^{\cdot} - x_\infty^{\cdot}| \leqslant DN^{-1}, \quad |q_N - q_\infty| \leqslant DN^{-1}, \quad |q_N^{\cdot} - q_\infty^{\cdot}| \leqslant DN^{-1/2} \tag{3.2}$$

пока $q_N \leqslant 0$, где $r_\infty, r_\infty^{\cdot}$ – решение уравнений (1.2) с начальными условиями $r_\infty(0) = r_N(0)$, $x_\infty^{\cdot}(0) = x_N^{\cdot}(0), q_\infty^{\cdot}(0) = 0$.

Утверждение 2 – прямое следствие теоремы [3], утверждающей, что в случае реализации голономной идеальной двусторонней связи при помощи силы с потенциалом $NW$ (функция $W(r)$ принимает минимальное значение на многообразии связи) выполняются равенства (2.2), (2.3). Оценки (2.3) сохраняются, если начальное условие $q_N^{\cdot}(0)$ изменить на $O(N^{-1/2})$, что следует из [3].

**4. Доказательство теоремы** 1. Рассмотрим область $G$ фазового пространства $\mathbf{R}^{2n}$, которая является окрестностью решения $r_\infty, r_\infty^{\cdot}$. Пусть $F_q$ – проекция обобщенной силы $F$ на направление $q$. Тогда в области $G$

$$-m \geqslant F_q + \partial E/\partial q^{\cdot} \geqslant -M, \quad M > m > 0 \tag{4.1}$$

Кинетическая энергия $E(r, r^{\cdot})$ имеет вид (1.1), причем $a \leqslant A(x) \leqslant A$; $W(r)$ имеет вид (1.3). Справедливо равенство

$$(\partial E/\partial q^{\cdot})^{\cdot} - q^{\cdot\cdot}A(x) - (\partial A(x)/\partial x)x^{\cdot}q^{\cdot} = O(q) + O(q^{\cdot}) \tag{4.2}$$

причем функции $O(\cdot)$ из правой части равномерно ограничены в $G$.

Рассмотрим движение свободной системы. Поскольку $q_N(0) = q_N^{\cdot}(0) = 0$, а $q_N^{\cdot\cdot}(0) < 0$, что видно из оценки (4.1), то в начале движения $q_N(0)$ становится меньше нуля и верны оценки (2.2). Допустим, что траектория системы попадает в полупространство $q > 0$, т.е. в некоторый момент времени $t_0$ координата $q_N$ равна нулю и скорость $q_N^{\cdot}$ положительна. Назовем это "прыжком". Тогда, согласно (2.2),

$$q_N^{\cdot}(t_0) \leqslant DN^{-1/2}, \quad |x_N(t_0) - x_\infty(t_0)| \leqslant DN^{-1}, \quad |x_N^{\cdot}(t_0) - x_\infty^{\cdot}(t_0)| \leqslant DN^{-1}$$

Можно показать, что время движения системы "над" связью ограничено. Действительно, поскольку существует такой момент времени $s$, больший $t_0$, что $q_N^{\cdot}(s) = 0$, то

$$q_N^{\cdot}(s) = q_N^{\cdot}(t_0) + \int_{t_0}^{s} q_N^{\cdot\cdot}(\xi)d\xi$$

Следовательно

$$\int_{t_0}^{s} q_N^{\cdot\cdot}(\xi)d\xi \geqslant -2DN^{-1/2}$$

$$q_N^{\cdot\cdot} = [F_q + \partial E/\partial q - (\partial A/\partial x)x^{\cdot}q^{\cdot}_N + O(q_N) + O(q^{\cdot}_N)]/A(x)$$

Значит, при достаточно больших $N$ справедливо неравенство $|q_N^{\cdot\cdot}| \geqslant m/(2A)$.

Таким образом,

$$s - t_0 \leqslant S/2, \quad S = 8DA/(mN^{1/2}) \tag{4.3}$$

Аналогично можно показать, что если $t_1$ – момент времени, в который $q_N(t_1) = 0$ и $q^{\cdot}_N(t_1) < 0$, то

$$t_1 - s \leqslant S/2 \tag{4.4}$$

Поскольку $|q_N^{\cdot\cdot}(t)| \leqslant 2M/a$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, то по крайней мере

$$|q^{\cdot}_N(t)| < MS/(2a) \tag{4.5}$$

Разность $|q^{\cdot}_N(t_0)| - |q^{\cdot}_N(t_1)|$ можно оценить следующим образом:

$$|q^{\cdot}_N(t_0) + q^{\cdot}_N(t_1)| = \int_{t_0}^{s} q_N^{\cdot\cdot}(\xi)d\xi - \int_{s}^{t_1} q_N^{\cdot\cdot}(\xi)d\xi$$

$$(q^{\cdot}_N(t_0)) > 0, \quad q^{\cdot}_N(t_1) < 0)$$

Из равенства (4.3) вытекает существование такой постоянной $C$, что

$$|q_N^{\cdot\cdot}| \leqslant |(F_q + \partial E/\partial q)/A(x)| + C|q^{\cdot}_N|$$

поскольку функция $|((\partial A/\partial x)x^{\cdot} - O(1))/A(x)|$ равномерно ограничена в $G$.

При положительных значениях $q$ движение свободной системы описывается теми же уравнениями, что и движение системы с односторонней связью. Следовательно, за время $S$ решение сдвинется не более чем на $kN^{-1/2}$, где величина $k$ пропорциональна $D$ с точностью до $O(N^{-1/2})$ (см. (3.1)). Как было показано, справедливо неравенство (4.5). Поэтому $q_N^{\cdot\cdot}$ изменится не более чем на $QN^{-1/2}$. Тогда

$$|q^{\cdot}_N(t_0) + q^{\cdot}_N(t_1)| \leqslant SQN^{-1/2} = C_1D^2N^{-1}$$

Теперь рассмотрим вход "под связь":

$$q_N(t_1) = 0, \quad q^{\cdot}_N(t_1) = -D_1N^{-1/2}, \quad D_1 < 2D$$

Тогда

$$q_N^{\cdot\cdot} + Nq_N = \frac{1}{A(x)}\left[F_q + \frac{\partial E}{\partial q} - \frac{\partial A}{\partial x}x^{\cdot}q^{\cdot}_N + O(q_N) + O(q^{\cdot}_N)\right] \tag{4.6}$$

Согласно (3.2), существует положительная постоянная $K$ такая, что

$$|q^{\cdot}_N| \leqslant KN^{-1/2}, \quad |r_N - r_\infty| \leqslant KN^{-1}, \quad |x^{\cdot}_N - x^{\cdot}_\infty| \leqslant KN^{-1}$$

За время $t < 2\pi N^{-1/2}$ правая часть (4.6) изменится не более чем на $Q_1N^{-1/2}$. Следовательно,

$$q_N^{\cdot\cdot} = -Nq_N + F_0 \pm Q_1N^{-1/2}, \quad F_0 = \frac{1}{A(x)}\left(F_q + \frac{\partial E}{\partial q}\right)\Bigg|_{t=t_1}$$

и можно предъявить $q_N$ с точностью до $\varepsilon = Q_2 N^{-3/2}$:

$$q_N \pm \varepsilon = -\frac{D_1}{N}\sin((N^{1/2}(t-t_1)) - \frac{F_0}{N}\cos(N^{1/2}(t-t_1)) + \frac{F_0}{N} \qquad (4.7)$$

Правая часть (4.7) равна нулю при

$$t = t_1, \quad t = t_2; \quad t_2 = t + N^{-1/2}\arcsin\frac{2D_1F_0}{D_1^2 + F_0^2}$$

Следовательно, $q_N = 0$ при $t = t_1$, $t = t_2 \pm S/N$, причем оценка сверху для $S$ не зависит от величины $D_1$ (при увеличении $D_1$ величина $Q_2$ не меняется, следовательно, $S$ уменьшается).

Таким образом, $|q_N^{\cdot}(t_1) + q_N^{\cdot}(t_2)| < C_2N^{-1}$.

При следующем "прыжке"

$$|q_N^{\cdot}| < 2DN^{-1/2} \qquad (4.8)$$

Поэтому все предыдущие рассуждения верны, по крайней мере пока выполнено неравенство $(C_1D^2N^{-1} + C_2N^{-1})K < DN^{-1/2}$ ($K$ – число "прыжков").

Пусть $\Delta t$ – время одного "прыжка". Тогда $K = T_1 / \Delta t \leqslant T_1N^{-1/2}/(C_3D)$, где $T_1$ – интервал времени, в течение которого выполняется неравенство (4.8), причем

$$T_1 \geqslant C_3D^2/(C_1D^2 + C_2)$$

В момент времени $t = T_1$ имеем $|q_N^{\cdot}(t)| < 3DN^{-1/2}$, и все рассуждения можно повторять, заменив $D$ на $^3/_2D$; при этом интервал времени $T_2$, в течение которого $q_N^{\cdot}(t) < 3DN^{-1/2}$, будет больше, чем $C_3(2D)/(C_1(2D)^2 + C_2)$.

Пусть $T_n$ – такой интервал времени, что

$$(n-1)DN^{-1/2} < q_N^{\cdot}(t) < nDN^{-1/2}.$$

Тогда сумма $T_1 + ... + T_n$ может быть сделана сколь угодно большой: $T_1 + ... + T_{n-1} \leqslant \tau < T_1 + ... + T_n$. Таким образом, при $0 \leqslant t \leqslant \tau$

$$q_N(t) = Q(N^{-1}), \quad q_N^{\cdot}(t) = O(N^{-1/2}).$$

Теперь можно показать, что

$$x_N(t) = x_\infty(t) + O(N^{-1}), \quad x_N^{\cdot}(t) = x_\infty^{\cdot}(t) + O(N^{-1}) \qquad (4.9)$$

Пусть $y = \partial E/\partial x^{\cdot}$. Тогда

$$x_\infty^{\cdot} = \partial E/\partial y, \quad y_\infty^{\cdot} = -\partial E/\partial x + F(x) \qquad (4.10)$$

(так как связь идеальная, то проекция силы реакции $R$ на любое из направлений $x$ равна нулю). Воспользуемся уравнениями

$$x_N^{\cdot} = \partial E/\partial y + O(N^{-1}), \quad y_N^{\cdot} = -\partial E/\partial x + F(x) + O(N^{-1})$$

Поскольку $x_N, y_N$ удовлетворяют соотношению (4.10) с точностью до $O(N^{-1})$, то вследствие гладкости всех функций получаем равенства (4.9).

**5. Сход со связи.** Пусть $r_\infty(t)$ – движение системы с односторонней связью, задаваемое уравнением (1.2) с кинетической энергией $E$ вида (1.1), $R_\infty$ – сила реакции связи; $0 \leqslant t \leqslant \tau$.

Пусть при $0 \leqslant t < \tau_{cx}$ система движется по связи, т.е. $q_\infty(t) = 0$ и $R_\infty > 0$, а в момент времени $t = \tau_{cx}$ сходит со связи, и пусть существует такая положительная постоянная $\delta$, что $q_\infty > 0$ при $t \in (\tau_{cx}, \tau_{cx} + \delta]$.

Пусть $r_N(t)$ – движение системы без связи (1.4) с функцией $W$ вида (1.3); $r_N(0) = r_\infty(0)$, $r_N^{\cdot}(0) = r_\infty^{\cdot}(0)$.

*Теорема* 2. При достаточно большом $N$ и $0 \leqslant t \leqslant \tau_{cx} + \delta$ движение определено и выполнены равенства

$$r_N = r_\infty + O(N^{-1/2}), \quad \dot{r}_N = \dot{r}_\infty + O(N^{-1/2}) \tag{5.1}$$

*Замечания*. При движении системы (1.4) по связи, т.е. при $t \leqslant \tau_{cx}$ верны равенства (2.2), (2.3). При $t > \tau_{cx} + \delta$ система (1.2) может снова попасть на поверхность $q = 0$ (либо гладко, либо с ударом). Однако теорема 2 этих вопросов не касается (см. [2]).

**6. Доказательство теоремы 2.** Пусть $G$ – область фазового пространства $\mathbf{R}^{2n}$, которая является окрестностью решения $r_\infty, \dot{r}_\infty$; $F_q$ – проекция обобщенной силы $F$ на направление $q$.

Поскольку предполагается, что все функции многократно дифференцируемы, то найдется такой момент времени $\tau_1$, что при $t > \tau_1$ функция $|F_q + \partial E/\partial q|$ монотонно убывает. По теореме 1 при $t \leqslant \tau_1$ движение определено и равенства (2.2), (2.3) выполняются.

Пусть при $t > \tau_1$ система оказывается "над" связью со скоростью "выхода" $\dot{q}_N = DN^{-1/2}$. Тогда вследствие монотонного убывания $|F_q + \partial E/\partial q|$ модуль $\dot{q}_N$ в момент времени, когда $q_N = 0$ и $\dot{q}_N < 0$, не больше модуля $\dot{q}_N$ в момент времени, когда $q_N = 0$ и $\dot{q}_N < 0$. В полупространстве $\{q < 0\}$ координата $q_N$ имеет вид (4.7). Продифференцировав по $t$ и подставив $t = t_2 + S/N$, получим

$$|\dot{q}_N(t_1) + \dot{q}_N(t)| \leqslant 2F_0 S/N$$

Итак, модуль $\dot{q}_N$ увеличивается с каждым "прыжком" не более чем на $2F_0S/N$. Время "прыжка" не менее $CDN^{-1/2}$, поэтому промежуток времени $T_1$, в течение которого выполняется неравенство (4.8), больше, чем $D^2/(2SF_0)$. Следовательно, при $0 \leqslant t \leqslant \tau_{cx}$ движение определено и выполняются равенства (2.2) и (2.3). При $t \geqslant \tau_{cx}$ существует такой момент времени $t_{cx} = \tau_{cx} + O(N^{-1/2})$, что $q_N(t_{cx}) = 0$. На интервале времени $[t_{cx}, \tau_{cx} + \delta]$ система с односторонней связью и свободная система при достаточно большом $N$ описываются одними и теми же уравнениями. Поэтому, поскольку при $t = t_{cx}$ верны оценки (3.1) (следовательно, в этот момент времени $r_N$ и $\dot{r}_N$ отличаются от $r_\infty$ и $\dot{r}_\infty$ соответственно на $O(N^{-1/2})$), по теореме о непрерывной зависимости решения от начальных условий на этом интервале выполняются оценки (5.1). Теорема доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В.В.* Конструктивный метод обоснования теории систем с неудерживающими связями // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 883–894.
2. *Rubin H., Ungar P.* Motion under a strong constraining force // Communs Pure and Appl. Math. 1957. V. 10. № 1. P. 65–87.
3. *Козлов В.В., Нейштадт А.И.* О реализации голономных связей // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 858–861.

Москва

Поступила в редакцию
15.XII.1993