УДК 539.3

© 1994 г. Н.В. Генералова, Е.В. Коваленко

О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПОЛОСОВОГО ШТАМПА С ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМЫМ ОСНОВАНИЕМ ЧЕРЕЗ ПОКРЫТИЕ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Изучается контактная задача о вдавливании без трения полосового в плане штампа в поверхность линейно-деформируемого основания, армированную тонким упругим слоем (покрытием) переменной толщины, жесткость которого соизмерима или меньше жесткости основного упругого тела. Относительно неизвестного контактного давления получено интегральное уравнение Фредгольма второго рода с коэффициентом при старшем члене, являющемся достаточно произвольной функцией продольной координаты. Для его решения использовался проекционный метод Бубнова–Галеркина с выбором в качестве координатных элементов систем ортогональных многочленов и дельтаобразных функций [1,2] (вариационно-разностный метод), а также алгоритм спрашиваемых асимптотических разложений [3], когда упомянутый выше коэффициент мал. В частном случае упругого полупространства, армированного покрытием постоянной толщины, полученные результаты сравнивались с соответствующими характеристиками, приведенными в [4].

1. Рассмотрим вначале пространственную задачу о действии нормальной нагрузки $\sigma_z = e^{-i\beta y}\sigma(x)$, распределенной по полосовой области $|x| \leqslant a$, $|y| < \infty$, на верхнюю грань тонкого упругого слоя переменной толщины $0 \leqslant z \leqslant h(x)(0 < H_1 \leqslant h(x) \leqslant H_2, \lambda = H_2 a^{-1} \ll 1$, жестко защемленного по основанию. Функция $h(x)$ считается по крайней мере непрерывной при $|x| < \infty$.

Задача сводится к интегрированию уравнений Ламе в отсутствие массовых сил

$$(1-2\nu)\Delta\mathbf{u} + \operatorname{grad}\,\theta = 0, \quad \left(\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$z = 0: u = \upsilon = w = 0 \quad (|x| < \infty,\ |y| < \infty) \tag{1.2}$$

$$z = h: \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (|x| < \infty,\ |y| < \infty)$$

$$\sigma_z = e^{-i\beta y}\sigma(x) \quad (|x| \leqslant a), \quad \sigma_z = 0 \quad (|x| > a,\ |y| < \infty)$$

(напряжения в слое исчезают на бесконечности), где

$$\sigma_z = 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right), \quad \tau_{xz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \tau_{yz} = G\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{1.3}$$

В формулах (1.1), (1.3) $\mathbf{u} = \{u, \upsilon, w\}$ – вектор перемещений точек упругой среды, а G и ν – ее модуль сдвига и коэффициент Пуассона.

Будем искать неизвестные функции, входящие в (1.1)–(1.3), в форме

$$\{u, \upsilon, w\} = \{u_*, \upsilon_*, w_*\}e^{-i\beta y} \tag{1.4}$$

Вводя безразмерные переменные и обозначения

$$x = ax_*,\ z = H_2 z_*,\ h_*(x_*) = \frac{h(x)}{H_2},\ \varepsilon = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \tag{1.5}$$

а затем подставляя (1.4), (1.5) в указанные соотношения (звездочку ниже опустим), получим:

$$\begin{aligned}
&\lambda^2[u,_{xx} - \varepsilon(a\beta)^2 u] + \lambda(1-\varepsilon)(w,_z - i\lambda\beta a\upsilon),_x + \varepsilon u,_{zz} = 0\\
&\lambda^2[\varepsilon\upsilon,_{xx} - (a\beta)^2\upsilon] - i\lambda\beta a(1-\varepsilon)(w,_z + \lambda u,_x) + \varepsilon\upsilon,_{zz} = 0\\
&\varepsilon\lambda^2[w,_{xx} - (a\beta)^2 w] + \lambda(1-\varepsilon)(u,_x - i\beta a\upsilon),_z + w,_{zz} = 0
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
&z = 0\colon\ u = \upsilon = w = 0\ \ (|x| < \infty)\\
&z = h\colon\ (u,_z + \lambda w,_x) = (\upsilon,_z - i\lambda\beta a w) = 0\ \ (|x| < \infty)\\
&[w,_z + \lambda(1-2\varepsilon)(u,_x - i\beta a\upsilon)] = \begin{cases} \varepsilon H_2 G^{-1}\sigma & (|x| \leq 1)\\ 0 & (|x| > 1)\end{cases}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Прежде чем приступить к асимптотическому анализу выражений (1.6), (1.7), отметим, что имеют место неравенства [5]

$$c = a|\beta| < C < \infty,\ \ C\lambda \ll 1\ \ (C = \text{const}) \tag{1.8}$$

Последнее из них является "условием применимости теории тонких пластин" и указывает, что внешняя нагрузка плавно распределена по поверхности покрытия $z = h$.

Представим решение системы (1.6), удовлетворяющее условиям (1.7), в форме

$$u = \Phi(x,z) + O(\lambda),\ \ \upsilon = \Psi(x,z) + O(\lambda),\ \ w = \Gamma(x,z) + O(\lambda) \tag{1.9}$$

Внося (1.9) в (1.6) и используя (1.8), в нулевом приближении получим

$$\Phi,_{zz} = 0,\ \ \Psi,_{zz} = 0,\ \ \Gamma,_{zz} = 0$$

откуда найдем

$$\Phi = A_0(x) + A_1(x)z,\ \ \Psi = B_0(x) + B_1(x)z,\ \ \Gamma = C_0(x) + C_1(x)z \tag{1.10}$$

Формулы (1.10) в согласии с (1.7)–(1.9) дают

$$\begin{aligned}
&A_0(x) = A_1(x) = B_0(x) = B_1(x) = C_0(x) = 0\\
&C_1(x) = \varepsilon H_2 G^{-1}\sigma(x)
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Подставляя (1.11) в (1.9), (1.10), полагая $z = h(x)$ и возвращаясь в полученных выражениях к старым переменным и обозначениям (1.4), (1.5), запишем

$$\begin{aligned}
&w(x,y,h(x)) = \varepsilon G^{-1}h(x)\sigma(x)e^{-i\beta y} + O(\lambda)\\
&u = \upsilon = O(\lambda)
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Равенства (1.12) показывают, что относительно тонкий упругий слой переменной толщины, сцепленный с жесткой подложкой, можно моделировать уравнениями основания Фусса–Винклера с коэффициентом "постели" $\varepsilon G^{-1}h(x)\,e^{-i\beta y}$. Заметим, что этот результат остается справедливым [6] в случае комбинированного двухслойного линейно-деформируемого основания, когда

$$n = O(\lambda^m),\ \left(m > 0,\ n = \frac{\theta}{\theta_0},\ \theta = \frac{G}{1-\nu},\ \theta_0 = \frac{G_0}{1-\nu_0}\right)$$

Здесь G_0, ν_0 – упругие характеристики ложемента, осадка которого от действия нагрузки

$$\sigma_z = e^{-i\beta y}\sigma(x) \quad (|x| \leq a, |y| < \infty)$$

имеет вид [7,8]

$$w_0(x,y,0) = \frac{e^{-i\beta y}}{\theta_0}\int_{-a}^{a}\sigma(\xi)k\left(\frac{\xi - x}{H}\right)d\xi \tag{1.13}$$

$$k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K(u)e^{ist}ds, \quad u = \sqrt{s^2 + (\beta H)^2} \tag{1.14}$$

В соотношениях (1.13), (1.14) H – характерный параметр линейно-деформируемого основания основного упругого тела, $K(u)$ символ его ядра.

Ниже рассмотрим случай, когда $\Lambda = Ha^{-1} \gg \lambda$, а $K(s)$ – ограниченная, положительная на действительной оси функция, обладающая следующими асимптотическими свойствами:

$$K(s) \sim A \quad (s \to 0, \ A = \mathrm{const})$$

$$K(s) = |s|^{-1} + O(|s|^{-\delta}) \quad (|s| \to \infty, \delta \geq 3) \tag{1.15}$$

Изучим теперь контактную задачу о вдавливании без трения силой $Pe^{-i\beta y}$, с эксцентриситетом приложения b, полосового в плане штампа в поверхность линейно-деформируемого основания, армированную тонким «мягким» упругим покрытием переменной толщины $h(x)$. Считаем, что ширина области контакта постоянна и равна $2a$, а в силу ограничения $h(x)a^{-1} \leq \lambda \ll 1$ условие контакта

$$w_0 + w = g(x)e^{-i\beta y} \quad (|x| \leq a) \tag{1.16}$$

можно снести на поверхность линейно-деформируемого основания $z = 0$.

Подставляя выражения вертикальных перемещений (1.12) и (1.13) в соотношение (1.16) и введя безразмерные величины

$$x' = xa^{-1}, \ \xi' = \xi a^{-1}, \ q(x') = \sigma(x)\theta_0^{-1}, \ f(x') = g(x)a^{-1}$$

$$\mu(x') = \varepsilon[an(1-\nu)]^{-1}h(x), \ P' = P(a\theta_0)^{-1}, \ b' = ba^{-1}$$

придем к интегральному уравнению относительно амплитудного значения контактного давления $q(x)$ ($\mathbf{I}$ – единичный оператор)

$$(\mu(x)\mathbf{I} + \mathbf{F})q = f(x) \quad (|x| \leq 1) \tag{1.17}$$

$$\mathbf{F}q = \int_{-1}^{1}q(\xi)k\left(\frac{\xi - x}{\Lambda}\right)d\xi \tag{1.18}$$

В формулах (1.17), (1.18) и ниже штрих опущен.

Постановку задачи нужно дополнить формулировкой условий равновесия

$$P = \int_{-1}^{1}q(x)dx, \quad Pb = \int_{-1}^{1}xq(x)dx \tag{1.19}$$

служащих для нахождения жесткого перемещения штампа $f(0)$ и угла его поворота $f'(0)$.

2. Предпошлем решению интегрального уравнения (1.17), (1.18) ряд рассуждений, устанавливающих его корректную разрешимость в пространстве квадратично суммируемых функций $L_2(-1,1)$. Заметим, что в силу свойств символа ядра $K(s)$, формул

(1.15), а также положительности и ограниченности функции $\mu(x)$ имеет место двухсторонняя оценка [9]

$$m\|q(x)\|_{L_2}^2 \leq (\mathbf{R}q,q) \leq M\|q(x)\|_{L_2}^2 \tag{2.1}$$

$$\mathbf{R}q = (\mu(x)\mathbf{I} + \mathbf{F})q, \quad \text{const} = m > 0, \quad \text{const} = M < \infty$$

Из неравенства (2.1) следует, что оператор $\mathbf{R}$ ограничен и положительно определен в $L_2(-1,1)$, откуда вытекает существование обратного ограниченного оператора $\mathbf{R}^{-1}$, т.е. однозначная разрешимость исходного уравнения в $L_2(-1,1)$. При этом справедливо соотношение корректности

$$\|q(x)\|_{L_2} \leq m^{-1}\|f(x)\|_{L_2} \tag{2.2}$$

Более того, можно показать, что если $f(x) \in C(-1,1)$, то и $q(x) \in C(-1,1)$, где $C(-1,1)$ – пространство непрерывных на $[-1,1]$ функций.

Представим приближенное решение интегрального уравнения (1.17), (1.18) в форме

$$q_N(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j\varphi_j(x)$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 2[1-(x+1)h^{-1}] & (x \in (-1,-1+h)) \\ 0 & (x \,\overline{\in}\, (-1,-1+h)) \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} 2[1+(x-1)h^{-1}] & (x \in (1-h,1)) \\ 0 & (x \,\overline{\in}\, (1-h,1)) \end{cases}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1-(x-x_n)h^{-1} & (x \in (x_n-h,x_n+h)) \\ 0 & (x \,\overline{\in}\, (x_n-h,x_n+h)) \end{cases}$$

Здесь $\{\varphi_j(x)\}$ – система координатных дельтаобразных функций, предельно плотная в $L_2(-1,1)$, а узлы $x_j (j = 0 - N)$ покрывают отрезок $[-1,1]$ с шагом $h = 2N^{-1}$, причем $x_0 = -1$, $x_N = 1$.

Коэффициенты a_j в разложении (2.3) разыскиваются из условия ортогональности невязки

$$\psi_N(x) = \mathbf{R}q_N - f(x)$$

первым $N + 1$ членам последовательности $\{\varphi_i(x)\}$:

$$(\psi_N,\varphi_i)_{L_2} = 0 \quad (i = 0,1,2,\ \ldots,N) \tag{2.4}$$

В результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений $(N + 1)$-го порядка

$$\sum_{j=0}^{N}(\mathbf{R}\varphi_j,\varphi_i)_{L_2}a_j = (f,\varphi_i)_{L_2} \quad (i = 0,1,2,\ \ldots,N) \tag{2.5}$$

На основании неравенств (2.1) и (2.2) заключаем [2, 10], что существует такой номер N_*, начиная с которого, т.е. при $N > N_*$, приближение $q_N(x)$ вида (2.3) однозначно определяется из соотношений (2.4). Кроме того, справедлива оценка

$$\|q - q_N\|_{L_2} \leq \|\mathbf{R}^{-1}\|\,\|\psi_N\|_{L_2} \to 0, \quad (N \to \infty)$$

обеспечивающая сходимость $q_N(x)$ к точному решению $q(x)$ в метрике $L_2(-1,1)$, откуда вытекает, что $a_j \to q(x_j)$ во внутренних узлах и $2a_0$, $2a_N \to q(x_0)$, $q(x_N)$. Все это означает применимость вариационно-разностного метода к исследованию интегральных уравнений типа (1.17), (1.18).

Ключевым моментом используемого алгоритма является подсчет коэффициентов системы (2.5), выражаемых трехкратными интегралами. Однако применение для решения исходной задачи сплайнов (2.3) позволяет радикально сократить объем вычислений – свести квадратуры к однократным. Так, отправляясь от значений интегралов

$$\int_{-1}^{1}(1-|\tau|)e^{i\alpha\tau}d\tau = \frac{2(1-\cos\alpha)}{\alpha^2} = 2C(\alpha)$$

$$\int_{0}^{1}(1-\tau)e^{i\alpha\tau}d\tau = \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} + i\frac{\alpha-\sin\alpha}{\alpha^2} = C(\alpha)+iS(\alpha)$$

запишем (в первой формуле учтена дельтаобразность последовательности координатных функций):

$$(f,\varphi_i)_{L_2} = h\int_{-1}^{1} f(x_i+hx)(1-|x|)dx \approx hf(x_i)$$

$$(\mathbf{R}\varphi_j,\varphi_i)_{L_2} = c_{ij}+e_{ij},\ \ c_{ij}=0\ \ (|i-j|>1)$$

$$c_{00}, c_{NN} = 4h\int_0^1 \mu[\mp(1-hx)](1-x)^2dx$$

$$c_{01}, c_{N-1,N} = 2h\int_0^1 \mu[\mp(1-hx)](x-x^2)dx,\ \ c_{01}=c_{10},\ \ c_{N-1,N}=c_{N,N-1}$$

$$c_{j,j\pm1} = h\int_0^1 \mu(x_j \pm hx)(x-x^2)dx\ \ (j-1\neq 0) \tag{2.6}$$

$$c_{jj} = h\int_{-1}^{1}\mu(x_j+hx)(1-|x|)^2dx\ \ (j=1,2,\ \ldots,\ N-1)$$

$$e_{ij} = B\int_0^\infty K(\upsilon)C^2(s)\ \cos\frac{s(x_i-x_j)}{h}ds,\ \ \upsilon=\frac{\Lambda}{h}\sqrt{s^2+\gamma^2}$$

$$e_{0j} = B\int_0^\infty K(\upsilon)C(s)\left[C(s)\ \cos\frac{s(1+x_j)}{h}+S(s)\ \sin\frac{s(1+x_j)}{h}\right]ds$$

$$e_{ij}=e_{ji},\ \ e_{0j}=e_{j0},\ \ B=4h\Lambda\pi^{-1},\ \ \gamma=\beta Hh\Lambda^{-1}$$
$$i=1,2,\ \ldots,N-1;\ \ j=1,2,\ \ldots,N-1$$

$$e_{00}=e_{NN}=B\int_0^\infty K(\upsilon)[C^2(s)+S^2(s)]ds$$

$$e_{0N}=e_{N0}=B\int_0^\infty K(\upsilon)\left\{[C^2(s)+S^2(s)]\ \cos\frac{2s}{h}+2C(s)S(s)\ \sin\frac{2s}{h}\right\}ds$$

Заметим, что ранее была предложена [2] несколько иная модификация вариационно-разностного метода, согласно которой координатные функции в формуле (2.3) имеют вид

$$\varphi_j(x)=\varphi\left(\frac{x-x_j}{h}\right),\ \ x_j=-1+\frac{h}{2}(1+2j),\ \ h=\frac{2}{N+1}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1-|x| & (|x|<1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$$

причем узлы x_j являются внутренними точками сегмента $[-1,1]$. Такой выбор системы элементов $\{\varphi_j(x)\}$ и узлов x_j дает возможность представить коэффициенты c_{ij} и e_{ij} в форме шестой, седьмой и восьмой формул (2.6) при всех i и j, пробегающих значения от 0 до N. Как показывают расчеты механических характеристик задачи разд. 4, эти две модификации вариационно-разностного метода с достаточной для практики точностью совпадают между собой, поэтому ниже ограничимся использованием первой формы.

Во многих случаях [7,9] в качестве базисных функций $\varphi_j(x)$ берутся системы ортогональных многочленов (метод ортогональных многочленов). Здесь, например, целесообразно положить

$$\varphi_j(x) = P_j^*(x), \quad P_j^*(x) = \sqrt{j+1/2}\,P_j(x)$$

где $P_j(x)$ – полиномы Лежандра. Для коэффициентов системы (2.5) получим выражения ($[\alpha]$ – целая часть числа α)

$$(f,\varphi_i)_{L_2} = \int_{-1}^{1} f(x)P_i^*(x)dx \tag{2.7}$$

$$(\mathbf{R}\varphi_j,\varphi_i)_{L_2} = c_{ij} + e_{ij}, \quad c_{ij} = \int_{-1}^{1}\mu(x)P_i^*(x)P_j^*(x)dx$$

$$e_{ij} = (-1)^{[i/2]+[j/2]}\Lambda\sqrt{(2i+1)(2j+1)}\int_0^\infty K(u)J_{i+1/2}\left(\frac{s}{\Lambda}\right)J_{j+1/2}\left(\frac{s}{\Lambda}\right)\frac{ds}{s}$$

При подсчете коэффициентов e_{ij} вида (2.6), (2.7) возникает проблема вычисления несобственных интегралов от быстро осциллирующих функций. Преодолеть эту трудность помогает алгоритм [11], суть которого состоит в построении квадратурной формулы, учитывающей точное обращение осциллирующей части.

После нахождения $a_j (j = 0, 1, ..., N)$ из системы (2.5) и построения приближенного решения уравнения (1.17), (1.18) согласно (2.3) по формулам (1.19) можно определить интегральные характеристики этого решения. Так в первом случае получим

$$P = h\sum_{j=0}^{N} a_j, \quad Pb = h\sum_{j=0}^{N} x_j a_j \tag{2.8}$$

а во втором

$$P = \sqrt{2}a_0, \quad Pb = \sqrt{2/3}\,a_1 \tag{2.9}$$

3. Изложенный в разд. 2 метод решения интегрального уравнения (1.17), (1.18) эффективен при достаточно больших значениях параметра $\mu(x)$. При $\mu(x) \to 0$ ($|x| \leqslant \leqslant 1$), как показывает численный анализ конкретных задач, матрица системы (2.5) становится плохо обусловленной, а счет неустойчивым. В связи с этим приведем алгоритм построения решения указанного уравнения, эффективный при малых значениях параметра $\mu(x)$. Ограничимся нахождением главного (нулевого) члена ассимптотики его решения.

Полагая в (1.17) $\mu(x) = 0$, выпишем вырожденное интегральное уравнение

$$\mathbf{F}q_0 = f(x) \quad (|x| \leqslant 1) \tag{3.1}$$

Доказано [9], что если $f(x) \in H_1^\alpha(-1,1)(1/2 < \alpha, \leqslant 1)$, то интегральное уравнение (3.1) однозначно разрешимо в $L_p(-1,1)$ $(1 < p < 2)$ при $\Lambda \in (0, \infty)$ и его решение имеет следующую структуру:

$$q_0(x) = \frac{\omega(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \omega(x) \in H_0^\gamma(-1,1) \ \left(\frac{1}{2} < \gamma < 1\right) \tag{3.2}$$

где $H_m^{\alpha}(-1,1)$ – пространство функций, m-я производная которых удовлетворяет при $|x| \leqslant 1$ условию Гельдера с показателем α.

Для решения уравнения (3.1) при любых значениях параметра $\Lambda \in (0, \infty)$ можно воспользоваться, например, методом ортогональных функций [9]. Именно в соответствии с ассимптотическими формулами (1.15) представим его ядро в форме

$$k(t) = \pi^{-1} K_0(tA^{-1}) + l(t) \tag{3.3}$$

$$l(t) \sim e^{-\kappa|t|}(|t| \to \infty,\ \kappa > 0),\ l(t) \in H_1^{\alpha}(-\infty,\infty)\ (\alpha = 1-\varepsilon)$$

Здесь $K_0(tA^{-1})$ – функция Макдональда, отражающая все основные свойства ядра $k(t)$, а добавка $l(t)$ играет второстепенную роль.

Разыскивая далее регулярную часть решения $\omega(x)$ в (3.2) в виде ряда Фурье по периодическим, ортогональным на отрезке $[-1,1]$, функциям Матье $\mathrm{ce}_i(\arccos x, -r)$ $(r = (2A\Lambda)^{-2})$ и обращая точно главную часть ядра интегрального уравнения (3.1), (3.3) при помощи спектрального соотношения

$$-\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{ce}_i(\arccos \xi, -r)}{\sqrt{1-\xi^2}} K_0\left(\frac{\xi - x}{A\Lambda}\right) d\xi = \frac{\pi \mathrm{Fek}_i(0,-r)}{\mathrm{Fek}_i'(0,-r)} \mathrm{ce}_i(\arccos x, -r)$$

придем к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов этого разложения. Для ее решения применяется и обосновывается метод редукции.

Рассмотрим теперь вместо (1.17) интегральное уравнение

$$(\mu(x)\mathbf{I} + \mathbf{F})q - \mu(\pm 1)q(\pm 1) - \mathbf{F}^{\pm} q = f(x) - f(\pm 1)\ (|x| \leqslant 1) \tag{3.4}$$

$$\mathbf{F}^{\pm} q = \int_{-1}^{1} q(\xi) k\left(\frac{\xi \mp 1}{\Lambda}\right) d\xi$$

Под внешней областью будем понимать интервал

$$-1 + m_1\mu(-1) \leqslant x \leqslant 1 - m_2\mu(1)$$

на котором в качестве решения уравнения (3.4) с достаточно малой ошибкой может быть принято вырожденное решение (3.2). Внутренними областями назовем малые окрестности точек $x = \pm 1$ с размерами $m_1\mu(-1)$, $m_2\mu(1)$ $(m_1, m_2 \sim 1)$; в этих областях влияние покрытия на распределение контактных напряжений под штампом соизмеримо с влиянием деформируемости упругого основания. Во внутренних областях нужно построить решения типа пограничного слоя, "сшитые" на границах областей $x = \mp 1 \pm$ $\pm\, m_j\mu(\mp 1)$ $(j = 1,2)$ с вырожденным решением $q_0(x)$.

Ограничимся нахождением погранслойного решения только в окрестности правого конца штампа $x = 1$, имея в виду, что для точки $x = -1$ все можно проделать аналогично. Преобразуем уравнение (3.4) при учете (3.1) следующим образом:

$$\mu(x)q(x) + (\mathbf{F} - \mathbf{F}^{+})(q - q_0) = \mu(1)q(1)(|x| \leqslant 1) \tag{3.5}$$

Принимая во внимание что при $m\mu \ll 1$ $(\mu \equiv \mu(1),\ m_2 \equiv m)$

$$q_0(1 - m\mu) = \omega(1)/\sqrt{2m\mu},\quad \mu(1 - m\mu) \sim \mu$$

а функция $q(x)$ на границе $x = 1 - m\mu$ внешней и внутренней областей сращивается с $q_0(x)$, будем искать решение типа пограничного слоя в окрестности точки $x = 1$ в форме

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{\mu(x)}} \psi(t) + o\left[\frac{1}{\sqrt{\mu(x)}}\right],\quad t = \frac{1-x}{\mu(x)} \tag{3.6}$$

Тогда условия сращивания примут вид

$$q(1-m\mu)=\frac{\chi(m)\psi(0)}{\sqrt{\mu}}\sim q_0(1-m\mu)=\frac{\omega(1)}{\sqrt{2m\mu}}$$

откуда следует, что

$$\chi(0)\sim 1,\ \chi(m)\sim 1/\sqrt{m}\ \ (m\gg 1),\ \ \psi(0)=\omega(1)/\sqrt{2} \tag{3.7}$$

Подставляя (3.6) в (3.5), переходя к новым переменным $t, \tau=(1-\xi)\mu^{-1}(\xi)$ и устремляя μ к нулю, при фиксированном t и $\mu m \ll 1$, получим в согласии с представлением (3.3) и значением интеграла [12]

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}}\ln\left|\frac{\tau-t}{\tau}\right|d\tau=0$$

интегральное уравнение для определения функции $\chi(t)=\psi(t)[\psi(0)]^{-1}$:

$$\chi(t)-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \chi(\tau)\ln\left|\frac{\tau-t}{\tau}\right|d\tau=1\ \ (0\leqslant t<\infty) \tag{3.8}$$

Заметим, что из того же уравнения (3.8) находится пограничный слой и на другом конце штампа $x=-1$.

Точное решение интегрального уравнения (3.8) имеет вид [9,13]

$$\chi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L X(p)t^{-p}dp,\ \ X(p)=p\Gamma^2(p)S(p)$$

$$S(p)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2p+1}\frac{\Gamma(-n-p+\frac{1}{2})\,\Gamma(-n+p+1)}{\Gamma(-n-p)\Gamma(-n+p+\frac{3}{2})}$$

где контур L – прямая $\operatorname{Re} p=\kappa(0<\kappa<\frac{1}{2})$.

После удовлетворения интегральным уравнениям (3.1) и (3.8) главный член равномерно пригодного решения уравнения (1.17), (1.18) при малых значениях параметра $\mu(x)(|x|\leqslant 1)$, в силу соотношений (3.7), запишем в форме

$$q(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\omega(x)-\frac{\omega(-1)}{\sqrt{2}}\sqrt{1-x}-\frac{\omega(1)}{\sqrt{2}}\sqrt{1+x}\right]+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\mu(x)}}\left\{\omega(-1)\chi\left[\frac{1+x}{\mu(x)}\right]+\omega(1)\chi\left[\frac{1-x}{\mu(x)}\right]\right\} \tag{3.9}$$

Наконец, зная функцию $q(x)$ вида (3.9), можно вычислить силу P и момент Pb, приложенные к штампу, по формулам (1.19).

4. Приведем числовые расчеты основных механических характеристик поставленной в разд. 1 контактной задачи, причем в качестве линейно-деформируемого основания возьмем упругое полупространство, а толщину армирующего его поверхность покрытия будем изменять следующим образом:

$$\mu(x)=\mu_0(1-\eta\ \cos\,\alpha x)\ \ (|\eta|<1)$$

В этом случае для символа ядра исходного интегрального уравнения (1.17), (1.18) справедливо представление $K(s)=s^{-1}$, при учете которого, согласно формулам (1.14) при $\Lambda\to\infty$, имеем

$$\mu_0(1-\eta\ \cos\,\alpha x)q(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}q(\xi)K_0[c(\xi-x)]d\xi=f(x)\ \ (|x|\leqslant 1) \tag{4.1}$$

μ_0	$x = 0,0$	0,2	0,4	0,6	0,8	1	Pf^{-1}
	0,359	0,360	0,364	0,371	0,385	0,420	0,745
2	0,356	0,358	0,361	0,368	0,381	0,411	0,740
	0,623	0,270	0,257	0,645	0,340	0,298	0,789
	0,631	0,280	0,264	0,657	0,345	0,308	0,797
	0,556	0,560	0,570	0,590	0,629	0,739	1,19
1	0,550	0,553	0,563	0,582	0,620	0,724	1,18
	0,920	0,421	0,403	0,980	0,546	0,525	1,23
	0,931	0,431	0,412	0,995	0,558	0,535	1,23
	0,761	0,767	0,789	0,833	0,927	1,224	1,70
0,5	0,748	0,755	0,776	0,819	0,907	1,196	1,67
	1,185	0,587	0,568	1,301	0,811	0,877	1,71
	1,192	0,595	0,576	1,315	0,822	0,885	1,71
	1,038	1,050	1,092	1,195	1,485	3,090	2,63
0,1	1,015	1,026	1,069	1,172	1,441	3,036	2,55
	0,957	0,968	0,989	1,066	1,294	1,768	2,19
0,01	1,048	1,052	1,067	1,156	1,351	4,023	2,56

Положим в (1.4) $f(x) \equiv f = \text{const}$, $c = 1$, $\alpha = 10$. В таблицу занесены величины контактного давления $q(x)f^{-1}$ и силы Pf^{-1}, приложенной с эксцентриситетом $b = 0$, подсчитанные по формулам (2.3), (2.8), (2.9) при разных значениях безразмерных параметров μ_0 и η. Результаты первой и второй строк получены для $\eta = 0$ соответственно вариационно-разностным методом с шагом $h = 0,1$ и при помощи алгоритма ортогональных многочленов. Аналогичные значения для $\eta = 0,5$ и $\mu_0 = 2;\ 1;\ 0,5$ даны в третьей и четвертой строках. Видно, что приведенные характеристики разнятся между собой не более чем на 3% и отличаются от соответствующих величин, посчитанных в [4] при $\eta = 0$, не более чем на 5%.

Заметим, что при использовании вариационно-разностного метода для решения интегрального уравнения (4.1) нет необходимости в вычислении всех коэффициентов e_{ij} по формулам (2.6). Достаточно подсчитать только лишь диагональные элементы $e_{ii} (i = 0 - N)$, а для нахождения остальных воспользоваться дельтаобразностью координатных функций (2.3). Будем иметь

$$e_{ij} = h^2\pi^{-1}K_0[c(x_i - x_j)] \ (i \neq j)$$

Такой вид коэффициентов e_{ij} принят в [1], что говорит о тесной взаимосвязи алгоритмов, развитых в работах [1] и [2], несмотря на кажущиеся их отличия.

При малых значениях параметра $\mu(x)$, как отмечалось в разд. 3, для решения интегрального уравнения (4.1) нужно пользоваться методом сращиваемых ассимптотических разложений, который, согласно проведенным расчетам, удовлетворительно работает когда $\mu(x) < 0,5$. В последних двух строках таблицы приведены значения равномерно пригодного решения $q(x)f^{-1}$, полученные по формуле (3.9) при $\eta = 0$ и $\mu_0 = 0,1;\ 0,01$, а также относительная величина вдавливающей силы Pf^{-1}, подсчитанная в соответствии с первым условием (1.19).

Подводя итог, заключаем, что развитые в статье численно-аналитические методы решения интегрального уравнения (1.17), (1.18) в совокупности исчерпывают весь возможный диапазон изменения безразмерного параметра $\mu(x)$ и могут быть использованы при изучении более сложных задач теории упругости и математической физики со смешанными граничными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мартыненко М.Д., Романчик В.С.* Об одном методе решения основного интегрального уравнения контактной задачи теории упругости. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1977. № 3. С. 42–47.
2. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
3. *Найфэ А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
4. *Рвачев В.Л., Проценко В.С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наук. думка, 1977. 235 с.
5. *Петрашень Г.И.* К теории колебаний тонких пластин. // Учен. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук. 1951. № 149. Вып. 24. С. 172–249.
6. *Коваленко Е.В.* Контактные задачи для тел с покрытиями (постановки и методы решения) // Изв. АН АрмССР. Механика. 1988. Т. 41. № 1. С. 40–50.
7. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
8. *Александров В.М., Ромалис Б.Л.* Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 174 с.
9. *Александров В.М., Коваленко Е.В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.
10. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 495 с.
11. *Манжиров А.В., Черныш В.А.* Контактная задача для слоистого неоднородного стареющего цилиндра, подкрепленного жестким кольцом // ПМТФ. 1990. № 6. С. 101–109.
12. *Маричев О.И.* Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). Минск: Наука и техника, 1978. 310 с.
13. *Коваленко Е.В.* Об интегральном уравнении контактных задач теории упругости при наличии абразивного износа // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 868–873.

Поступила в редакцию
21.IX.1993

Москва