

УДК 539.3: 534.1

© 1994 г. А.И. Маневич

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОПРЯЖЕННЫХ ФОРМ ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ СВОБОДНЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ КРУГОВОГО КОЛЬЦА

Дано аналитическое исследование задачи о нелинейных свободных изгибных колебаниях кругового кольца при учете взаимодействия сопряженных форм. Методом многих масштабов получена система уравнений амплитудно-частотной модуляции. Интеграл этой системы позволяет построить "амплитудно-фазовый портрет", характеризующий возможные динамические режимы при произвольных начальных условиях. Показано существование энергетического порога, при превышении которого возможно появление бегущей волны и выраженная амплитудно-частотная модуляция. Пороговое значение энергии зависит от "расстройки" частот сопряженных форм, обусловленной наличием начальных несовершенств. Получено общее решение задачи в эллиптических функциях Якоби.

При изгибных колебаниях круговых колец, оболочек вращения, дисков колебания по основной, непосредственно возбуждаемой форме могут сопровождаться появлением "сопряженной" формы (геометрически подобной, но сдвинутой в окружном направлении на угол  $\varphi = \pi/(2n)$ ,  $n$  – число окружных волн), что приводит к появлению бегущих волн [1–3]. Построенная в [4] математическая модель колебаний позволила установить нелинейный характер этих явлений. Было показано, что свободные колебания колец и оболочек представляют собой амплитудно-частотно модулированные колебания с периодическим энергообменом между сопряженными формами [2]. Однако до настоящего времени отсутствует полное аналитическое исследование проблемы. Интересная аналитическая модель нелинейного взаимодействия колебаний в кольце [5] описывает несколько иное явление – энергообмен между радиальными формами растяжения – сжатия и изгибными формами (взаимодействие трех форм). В экспериментах [1, 2] радиальные формы растяжения – сжатия не возбуждались, и объяснение их результатов нужно искать в рамках аналитической модели, описывающей взаимодействие сопряженных форм.

**1. Исходные уравнения. Система уравнений амплитудно-частотной модуляции и ее интеграл.** Рассмотрим свободные изгибные колебания кольца радиуса  $R$  в его плоскости (с осью симметрии поперечного сечения, расположенной в этой плоскости). Радиальный прогиб  $w$  принимаем в виде (положительный прогиб – по направлению внешней нормали):

$$w = f_1 \cos n\varphi + f_2 \sin n\varphi + f_0 \quad (1.1)$$

где  $\varphi = y/R$  – угловая координата. Составляющая  $f_0$  учитывает радиальное смещение осевой линии кольца вследствие изгиба и определяется из условия равенства нулю среднего мембранного напряжения (при отсутствии осесимметричной деформации растяжения – сжатия). Осевая деформации  $\epsilon$  и изменение кривизны  $\chi$  определяются выражениями (см., например, [6]):

$$\epsilon = (w + v_{,\varphi}) / R + (w_{,\varphi} - v)^2 / (2R^2), \quad \chi = (w_{,\varphi} - v)_{,\varphi} / R^2$$

( $v$  – тангенциальное смещение). Из условия  $\int_0^{2\pi} \epsilon R d\varphi = 0$ , которое при отсутствии осесимметричной деформации выполняется точно, при учете (1.1) и периодичности  $v$

по  $\varphi$  следует, что  $f_0$  имеет квадратичный порядок:

$$f_0 = -\frac{1}{4\pi R} \int_0^{2\pi} (w_{,\varphi} - v)^2 d\varphi$$

Тангенциальное перемещение  $v$  определяется из условия  $w + v_{,\varphi} = 0$ , которое вытекает из малости  $\varepsilon$  и  $(w_{,\varphi} - v)^2 / (2R^2)$  по сравнению с линейными членами в выражении для  $\varepsilon$  (приближенность определения  $v$  оправдана малостью вклада  $v$  в последующее решение – при пренебрежении всеми членами с  $v$  погрешность имеет порядок  $1/n^2$ ):  $v = (-f_1 \sin n\varphi + f_2 \cos n\varphi) / n$ . Тогда получаем

$$f_0 = -\frac{(n^2 - 1)^2}{4Rn^2} (f_1^2 + f_2^2) \quad (1.2)$$

(в [1] и др. вместо множителя  $n^2 - 1$  стоит  $n^2$ ).

Определяя потенциальную и кинетическую энергию

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^{2\pi} \chi^2 R d\varphi = \frac{\pi EI (n^2 - 1)^2}{2R^3} (f_1^2 + f_2^2)$$

$$T = \frac{\rho A}{2} \int_0^{2\pi} (\dot{w}^2 + \dot{v}^2) R d\varphi = \frac{\pi \rho A R}{2} \left[ \dot{f}_0^2 + \frac{n^2 + 1}{n^2} (\dot{f}_1^2 + \dot{f}_2^2) \right] \quad (1.3)$$

( $\rho$ ,  $A$ ,  $I$  – плотность, площадь и момент инерции поперечного сечения, точкой обозначено дифференцирование по  $t$ ), из уравнений Лагранжа получаем систему уравнений относительно  $f_1$  и  $f_2$ , содержащую кубические нелинейности:

$$\ddot{f}_k + \omega_k^2 f_k + 2\kappa f_k (f_1 \ddot{f}_1 + \dot{f}_1^2 + f_2 \ddot{f}_2 + \dot{f}_2^2) = 0, \quad k = 1, 2 \quad (1.4)$$

$$\left( \omega_1^2 = \omega^2 = \frac{EI(n^2 - 1)^2 n^2}{\rho A R^4 (n^2 + 1)}, \quad 2\kappa = \frac{(n^2 - 1)^4}{2n^4 R^2} \right)$$

Для общности анализа величина  $\omega_2$  считается не совпадающей с  $\omega$  (в отличие от [4]), хотя и близкой к  $\omega$ . При наличии начальных несовершенств спектр собственных частот сопряженных форм расщепляется [7], и поэтому принято

$$\omega_2^2 = \omega^2 + \varepsilon^2 \sigma \quad (1.5)$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр,  $\sigma$  – параметр "расстройки" частот. Отметим, что несовершенства приводят также к появлению линейной связи между сопряженными формами [2], однако при обычных условиях испытаний (без фиксирования положения узлов) возбуждаются главные формы колебаний, для которых линейная связь отсутствует в силу их ортогональности (т.е. расположение узлов и пучностей определяется формами с экстремальными значениями собственных частот).

Система уравнений [1.4] решается методом многих масштабов [8]. Вводя "быстрое" и "медленные" времена  $T_0 = t$ ,  $T_s = \varepsilon^s T_0$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) и разыскивая решение этой системы в виде разложения

$$f_k = \varepsilon f_{k1} + \varepsilon^3 f_{k3} + \dots, \quad k = 1, 2 \quad (1.6)$$

после применения стандартной процедуры получаем уравнения для двух приближений:

$$D_0^2 f_{k1} + \omega^2 f_{k1} = 0, \quad k = 1, 2 \quad (1.7)$$

$$D_0^2 f_{k3} + \omega^2 f_{k3} + (2D_0 D_2 + D_1^2) f_{k1} + 2\kappa f_{k1} [f_{11} D_0^2 f_{11} + (D_0 f_{11})^2 + f_{21} D_0^2 f_{21} + (D_0 f_{21})^2] + \sigma \delta_{k2} f_{k1} = 0 \quad (1.8)$$

где  $D_0 = \partial/\partial T_0$ ,  $D_s = \partial/\partial T_s$ ,  $\delta_{ks}$  – символ Кронекера.

Решение системы (1.7) запишем в виде (к.с. – комплексно-сопряженная величина)

$$f_{k1} = A_k(T_2) e^{i\omega T_0} + \text{к.с.}, \quad k = 1, 2 \quad (1.9)$$

Подставляя (1.9) в (1.8), из условия отсутствия секулярных членов получаем (штрихом обозначено дифференцирование по медленному времени  $T_2$ )

$$-2i\omega A_k' + 4\kappa\omega^2 (A_1^2 + A_2^2) \bar{A}_k - \delta_{k2} \sigma A_2 = 0, \quad k = 1, 2 \quad (1.10)$$

Переходя к показательной форме для комплексных амплитуд

$$A_k = \frac{1}{2} a_k e^{i\theta_k} \quad (1.11)$$

и разделяя в (1.10) действительные и мнимые части, получаем систему уравнений, определяющих модуляцию амплитуд и фаз сопряженных форм:

$$(a_k^2)' + (-1)^k \kappa\omega a_1^2 a_2^2 \sin 2\gamma = 0, \quad k = 1, 2 \quad (1.12)$$

$$2\theta_1' + \kappa\omega (a_1^2 + a_2^2 \cos 2\gamma) = 0$$

$$2\theta_2' + \kappa\omega (a_1^2 \cos 2\gamma + a_2^2) - \sigma/\omega = 0 \quad (\gamma = \theta_2 - \theta_1)$$

Из первых двух уравнений (1.12) получаем интеграл энергии

$$a_1^2 + a_2^2 = e \quad (1.13)$$

(произвольная постоянная  $e$  пропорциональна энергии системы).

Введем переменную  $\xi$  соотношением  $\xi = a_1^2 / e$  ( $0 \leq \xi \leq 1$ ). Тогда  $a_2^2 = e(1 - \xi)$ , и из (1.12) получаем следующую систему уравнений относительно  $\xi$  и  $\gamma$  (второе уравнение получается вычитанием предпоследнего уравнения (1.12) из последнего):

$$\xi' = \kappa\omega e \xi(1 - \xi) \sin 2\gamma, \quad 2\gamma' = -\kappa\omega e(1 - 2\xi)(1 - \cos 2\gamma) + \sigma/\omega \quad (1.14)$$

Разделив первое уравнение (1.14) на второе, получаем уравнение в полных дифференциалах, которое имеет интеграл

$$\xi(1 - \xi)(1 - \cos 2\gamma) - \sigma^* \xi = C, \quad \sigma^* = \sigma / (e\omega^2 \kappa) \quad (1.15)$$

С другой стороны, исключая  $\gamma$  из первого уравнения (1.14) и интеграла (1.15), получаем уравнение, определяющее зависимость  $\xi$  от медленного времени  $T_2$ :

$$(e\omega\kappa)^{-2} (\xi')^2 = (\sigma^* \xi + C)[2\xi(1 - \xi) - (\sigma^* \xi + C)] \quad (1.16)$$

**2. Амплитудно-фазовый портрет системы. Стационарные режимы. Устойчивость. Зависимость колебательного режима от энергии и расстройки частот сопряженных форм.** Рассмотрим вначале, какие выводы о поведении кольца можно сделать на основании интеграла (1.15). При анализе в силу периодичности по  $\gamma$  можно ограничиться рассмотрением прямоугольника  $0 \leq \xi \leq 1$ ,  $0 \leq \gamma \leq \pi$  в плоскости  $(\xi, \gamma)$ . Интегральные кривые (1.15) в этом прямоугольнике составляют "амплитудно-фазовый портрет" (АФП) системы, дающий наглядное представление о колебательных режимах при произвольных начальных условиях и их устойчивости. Топология АФП определяется количеством стационарных точек (1.14) (точек экстремума  $C$  (1.15)), которые соответствуют стационарным, т.е. одночастотным режимам колебаний. Стационарные

точки определяются системой уравнений

$$\xi(1-\xi)\sin 2\gamma = 0, \quad (1-2\xi)(1-\cos 2\gamma) - \sigma^* = 0 \quad (2.1)$$

которая имеет следующие решения:

$$\begin{aligned} \text{а) } \xi = 0, \quad \gamma = \gamma_s^-; \quad \text{б) } \xi = 1, \quad \gamma = \gamma_s^+ \\ \gamma_s^\pm = (\frac{1}{2})(-1)^s \arccos(1 \pm \sigma^*) + \pi, \quad s = 0, 1; \quad \text{в) } \xi = \frac{1}{2} - \sigma^* / 4, \quad \gamma = \pi / 2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Эти стационарные точки существуют при выполнении соответственно следующих условий:

$$\text{а) } 0 \leq \sigma^* \leq 2, \quad \text{б) } -2 \leq \sigma^* \leq 0, \quad \text{в) } |\sigma^*| \leq 2 \quad (2.3)$$

Элементарный анализ показывает, что точки  $(0, \gamma_s^-)$  и  $(1, \gamma_s^+)$  ( $s = 1, 2$ ), которым соответствуют колебания только по одной из сопряженных форм, неустойчивы, а последняя точка устойчива. Не ограничивая общности, можно считать  $\sigma^* \geq 0$  (в противном случае достаточно изменить нумерацию сопряженных форм). Тогда в зависимости от величины  $\sigma^*$  возможны два типа АФП, показанные на фиг. 1: а)  $\sigma^* \leq 2$ , б)  $\sigma^* > 2$  (в силу симметрии АФП относительно линии  $\gamma = \pi/2$  показана лишь его половина). Сепаратриса (штриховая линия), которая соединяет неустойчивые стационарные точки и охватывает устойчивую, разделяет две области – с осциллирующей относительно  $\gamma = \pi/2$  разностью фаз сопряженных форм и с монотонно изменяющейся разностью фаз (уравнения сепаратрис получаются из (1.15) при  $C = 0$  и  $C = -\sigma^*$  соответственно).

В случае идеального кольца ( $\sigma^* = 0$ ) имеется устойчивая стационарная точка  $\xi = \frac{1}{2}$ ,  $\gamma = \pi/2$  и неустойчивые "стационарные линии"  $\gamma = 0$  и  $\gamma = \pi$ . АФП для этого случая приведен на фиг. 2 (постоянная  $C$  принимает значения от 0 до  $\frac{1}{2}$ ). Колебания сопряженных форм в фазе ( $\gamma = 0$ ) или антифазе ( $\gamma = \pi$ ) являются стационарными при любом соотношении амплитуд (любом  $\xi$ ), но эти колебания неустойчивы. Единственным устойчивым стационарным режимом являются колебания с одинаковыми амплитудами сопряженных форм и с разностью фаз  $\gamma = \pi/2$ . Подставляя в (1.1)  $f_1 = \epsilon a \cos \omega t$ ,  $f_2 = \epsilon a \sin \omega t$ , получаем

$$w = \epsilon \left[ a \cos(\omega t - n\varphi) - \frac{a^2(n^2 - 1)^2}{2Rn^2} \right] \quad (2.4)$$

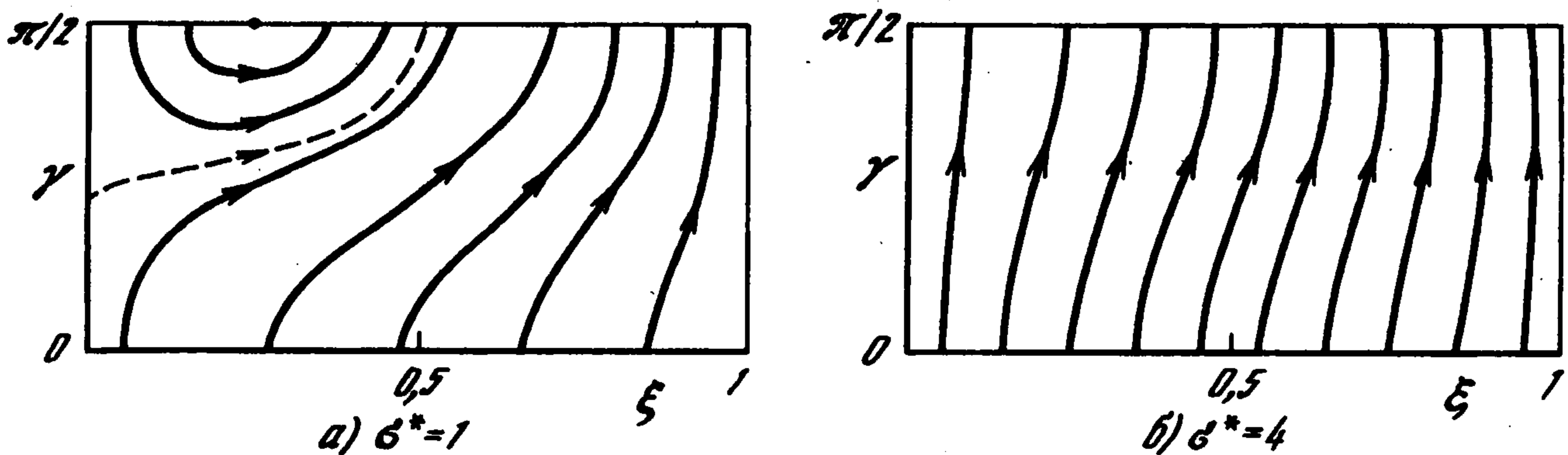
что соответствует "быстрой" бегущей волне (с частотой собственных колебаний кольца  $\omega$ ). Все остальные режимы колебаний представляют собой амплитудно-частотно модулированные колебания (их можно рассматривать как результат наложения медленных волн модуляции на быструю бегущую волну, причем соотношение амплитуд быстрой и медленных составляющих зависит от близости кривой к центральной точке).

Устойчивости бегущей волны ( $\gamma = \pi/2$ ) и неустойчивости колебаний в фазе или антифазе можно дать следующее физическое объяснение. Рассмотрим радиальную составляющую колебаний в выражении (1.1), определяемую (1.2), при некоторой разности фаз  $\gamma$ . Полагая  $f_1 = \epsilon a_1 \cos \omega t$ ,  $f_2 = \epsilon a_2 \cos(\omega t + \gamma)$ , получаем

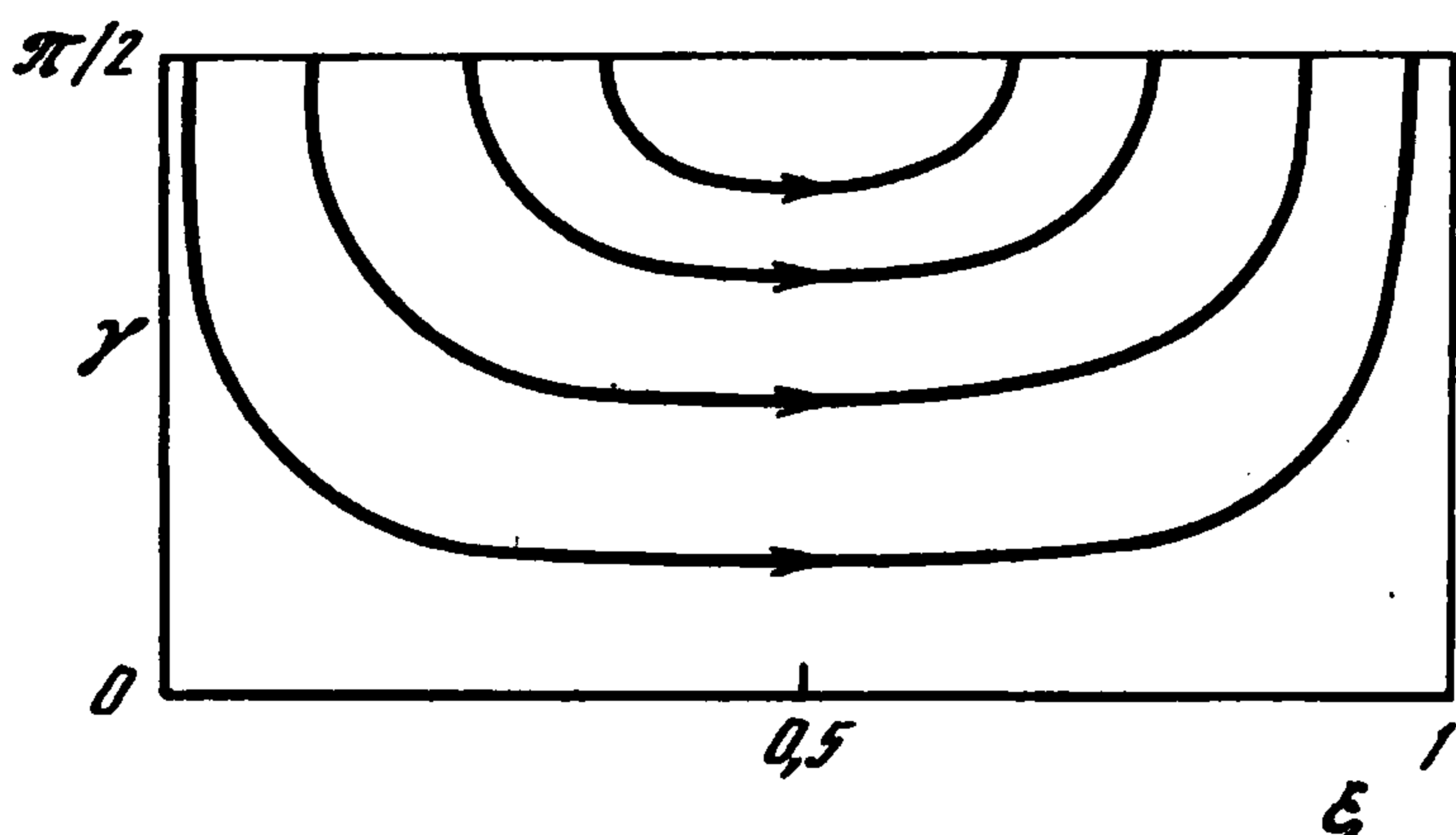
$$f_1^2 + f_2^2 = \epsilon^2 [a_1^2 + a_2^2 + a_1^2 \cos 2\omega t + a_2^2 \cos 2(\omega t + \gamma)] / 2 \quad (2.5)$$

Амплитуда радиальных колебаний максимальна при  $\gamma = 0$  и  $\gamma = \pi$  и минимальна (пропорциональна  $|a_1^2 - a_2^2|$ ) – при  $\gamma = \pi/2$ . Режим бегущей волны для идеального кольца ( $a_1 = a_2$ ) – это единственный режим, для которого отсутствуют радиальные колебания осевой линии.

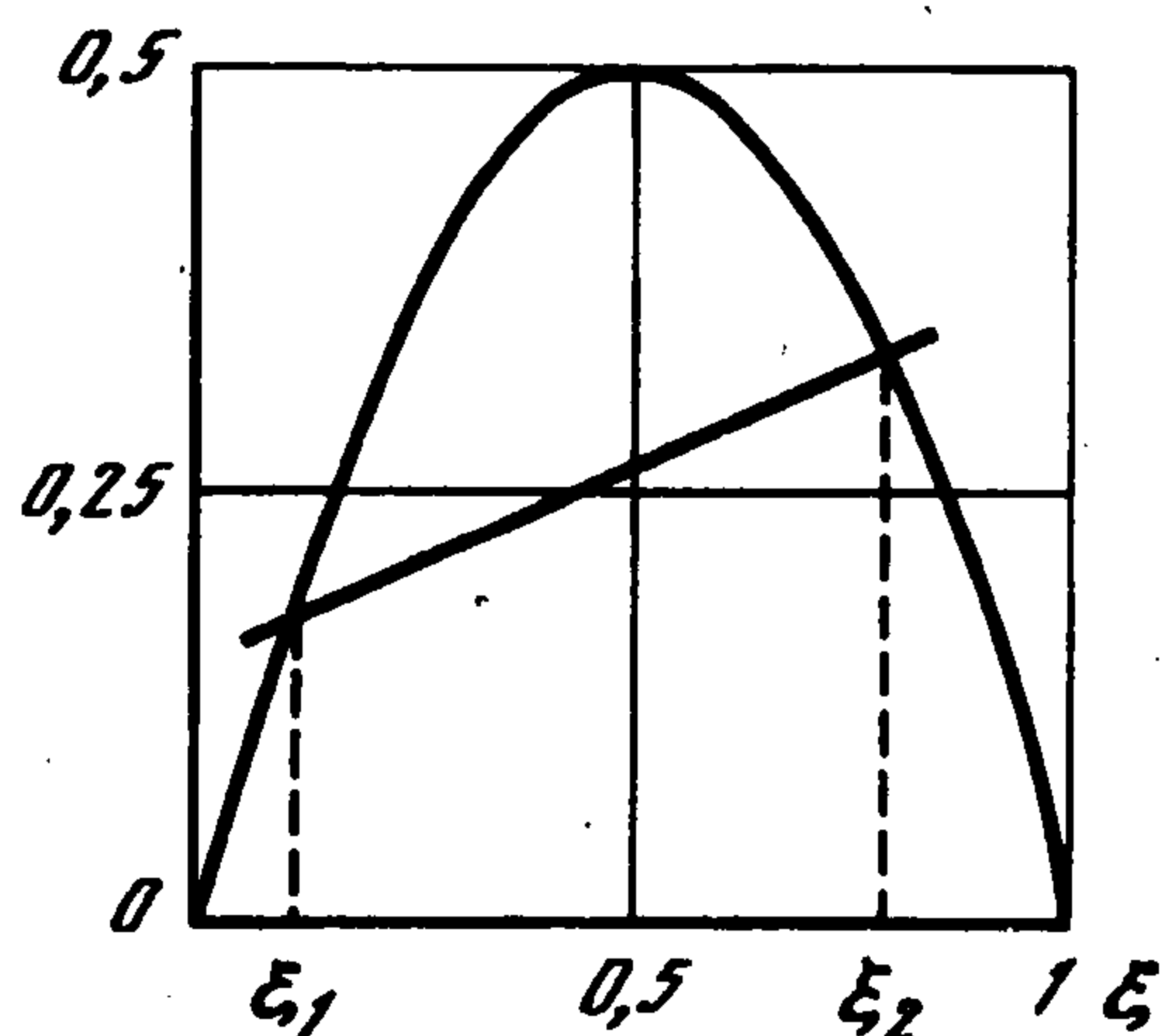
Возвращаясь к общему случаю неидеального кольца, отметим, что для единствен-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

ной устойчивой стационарной точки (при  $\gamma = \pi/2$ )  $a_1 \neq a_2$ , причем сопряженная форма с бóльшей собственной частотой имеет бóльшую амплитуду. Соответствующий колебательный режим можно рассматривать как наложение быстрой волны с амплитудой  $a_1$  и стоячей волны с амплитудой  $a_2 - a_1$  (при  $a_1 < a_2$ ), причем быстрая составляющая стремится к нулю при увеличении  $\sigma^*$ . Одновременно "область притяжения" стационарной точки, ограниченная сепаратрисой, уменьшается и при  $\sigma^* = 2$  исчезает (три стационарные точки сливаются).

Условие  $\sigma^* \leq 2$  при учете соотношения для  $\sigma^*$  в (1.15) можно записать в виде

$$e \geq \sigma / (2k\omega^2) \quad (2.6)$$

Это условие запишем через величины, не зависящие от произвольно выбираемого параметра  $\varepsilon$ . При учете (1.5), (1.6), (1.9), (1.11), (1.13) имеем (полагая  $\theta_k(0) = 0$ ,  $k = 1, 2$ )

$$E_0 = f_1^2(0) + f_2^2(0) \geq E^* = \frac{\omega_2^2 - \omega^2}{2k\omega^2} = \frac{\Delta\omega}{k\omega} \quad (\Delta\omega = \omega_2 - \omega) \quad (2.7)$$

Это выражение показывает, что характер возможных колебательных режимов определяется энергией колебаний. При данном значении  $\Delta\omega$  существует пороговое значение  $E^*$ , при превышении которого АФП типа б (фиг. 1, б) переходит в портрет типа а (фиг. 1, а), появляется выраженное взаимодействие сопряженных форм и становится возможным режим бегущей волны (с уменьшением  $\Delta\omega$  пороговое значение  $E^*$  стремится к нулю). Этот результат объясняет экспериментальные наблюдения для цилиндрических оболочек [2]: при возбуждении свободных колебаний с большой амплитудой (порядка 5–10 толщин) отмечается сильная модуляция (биения), но с уменьшением амплитуд (вследствие демпфирования) биения исчезают. При  $f_2(0) = 0$  из (2.7) при учете (1.4) получаем ( $h$  – толщина кольца или оболочки)

$$\frac{f_1(0)}{h} \geq \frac{2n^2}{(n^2 - 1)^2} \frac{R}{h} \sqrt{\frac{\Delta\omega}{\omega}} \quad (2.8)$$

Например, для одной из оболочек [2] при  $h/R = 3,125 \cdot 10^{-3}$ ,  $n = 4$ ,  $\omega = 2\pi \cdot 36,9$ ,  $\omega_2 = 2\pi \cdot 37,8$  получаем  $f_1(0)/h \geq 7$ , что хорошо согласуется с экспериментальными наблюдениями.

### 3. Зависимость амплитуд и частот от времени. Общее решение.

Зависимость амплитуд сопряженных форм от медленного времени определяется уравнением (1.16). В силу положительности правой части (1.16) решениям соответствуют участки прямых  $y = \sigma^* \xi + C$ , лежащие внутри области, ограниченной параболой  $y = 2\xi(1-\xi)$  (фиг. 3). В случае идеального кольца ( $\sigma^* = 0$ ) наклонные прямые переходят в прямые, параллельные оси абсцисс.

Рассмотрим вначале случай  $\sigma^* = 0$ . Уравнение (1.16) сводится к

$$d\xi / dT_2 = \pm \sqrt{2Cek\omega} \sqrt{(\xi - \xi_1)(\xi_2 - \xi)} \quad (3.1)$$

где  $\xi_1, \xi_2$  – корни трехчлена в квадратных скобках (1.16):  $\xi_2 = 1 - \xi_1$ ,  $C = 2\xi_1(1 - \xi_1)$ , и при начальном условии  $\xi(0) = \xi_0$  имеет решение

$$\xi = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} - \xi_1) \sin(eDT_2 + \alpha_0), \quad D = \pm 2k\omega\Lambda \quad (3.2)$$

$$\Lambda = \sqrt{\xi_1(1 - \xi_1)}, \quad \alpha_0 = \arcsin \frac{2\xi_0 - \xi_1 - \xi_2}{\xi_2 - \xi_1}$$

Подставляя найденное решение во второе уравнение (1.14) и учитывая интеграл (1.15), определяем разность фаз

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{\sigma T_2}{2\omega} \mp \left[ \arctg \frac{(1 - 2\xi_1) \cos(eDT_2 + \alpha_0)}{2\Lambda} - \alpha_1 \right] \quad (3.3)$$

$$\alpha_1 = \arctg \frac{(1 - 2\xi_1) \cos \alpha_0}{2\Lambda}, \quad \gamma_0 = \gamma(0)$$

а затем из последних двух уравнений (1.12) определяем  $\theta_1$  и  $\theta_2$ .

Например, получаем

$$\theta_1 = \theta_{10} - \frac{ek\omega T_2}{2} \pm \left\{ \arctg \frac{\operatorname{tg}[(eDT_2 + \alpha_0)/2] - (1 - 2\xi_1)}{2\Lambda} - \alpha_2 \right\} \quad (3.4)$$

$$\alpha_2 = \arctg \frac{\operatorname{tg}(\alpha_0/2) - (1 - 2\xi_1)}{2\Lambda}, \quad \theta_{10} = \theta_1(0)$$

Вычисляя  $a_1 = \sqrt{e\xi}$ ,  $a_2 = \sqrt{e(1-\xi)}$ , переходя к реальному времени  $t$  и не зависящему от  $\epsilon$  параметру энергии  $E_0 = \epsilon^2 e$ , получаем при учете (1.4)

$$f_1(t) = \{E_0 [\frac{1}{2} + (\frac{1}{2} - \xi_1) \sin(DE_0 t + \alpha)]\}^{1/2} \cos(\omega t + \theta_1) \quad (3.5)$$

где  $\theta_1$  определяется (3.4) при учете равенства  $eT_2 = E_0 t$ . Аналогичное выражение может быть записано для  $f_2(t)$ .

Как видно из (3.5) и выражения для  $k$  (1.4), период модуляции равен

$$T^0 = \frac{T_{\min}^0}{2\sqrt{\xi_1(1 - \xi_1)}}, \quad T_{\min}^0 = \frac{8\pi n^4}{(n^2 - 1)^4 E_0 \omega} \quad (3.6)$$

Период зависит от энергии колебаний и начального соотношения амплитуд. Для интегральных кривых, приближающихся к линиям  $\gamma = 0$  и  $\gamma = \pi$ ,  $T^0$  стремится к бесконечности, а при приближении к стационарной точке ( $\xi_1 \rightarrow \frac{1}{2}$ ,  $\gamma \rightarrow \pi/2$ ) стремится к минимальному значению  $T_{\min}^0$ .

Перейдем теперь к общему случаю  $\sigma^* \neq 0$ . Обозначим, как и ранее, через  $\xi_1$  и  $\xi_2$  корни многочлена в правой части (1.16), лежащие в интервале (0, 1) (их может быть только два). Третий корень  $\xi_3$  при  $\sigma^* < 0$  лежит справа от этого интервала, а при  $\sigma^* > 0$  – слева, так что при  $0 \leq \xi \leq 1$  имеем  $\sigma^*(\xi - \xi_3) > 0$ . Тогда уравнение (1.16) сводится к следующему (для простоты начальное значение  $\xi$  принято равным максимальному значению  $\xi_2$ ):

$$\int_{\xi_2}^{\xi} [\sigma^*(\xi - \xi_1)(\xi_2 - \xi)(\xi - \xi_3)]^{-1/2} d\xi = \pm \sqrt{2} e \omega k T_2$$

Считая  $\sigma^* > 0$  и соответственно  $\xi_3 < 0$ , подстановкой

$$\xi = \xi_2 - (\xi_2 - \xi_1) \sin^2 \psi$$

сводим интеграл к эллиптическому интегралу первого рода и записываем решение через эллиптические функции Якоби:

$$\xi = \xi_2 - (\xi_2 - \xi_1) \operatorname{sn}^2(z, \eta), \quad z = \mp \left[ \frac{e \operatorname{sn}(\xi_2 - \xi_3)}{2} \right]^{1/2} T_2, \quad \eta = \left[ \frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_2 - \xi_3} \right]^{1/2} \quad (3.7)$$

Для амплитуд колебаний получаем

$$a_1 = \{e[\xi_2 - (\xi_2 - \xi_1) \operatorname{sn}^2(z, \eta)]\}^{1/2}, \quad a_2 = (e - a_1^2)^{1/2}$$

Период модуляции выражается через полный эллиптический интеграл первого рода

$$T^0 = 2[E_0 k \omega \Delta \omega (\xi_2 - \xi_3)]^{-1/2} K(\eta)$$

Этот период зависит от начальных условий и, как показывают расчеты, на 2–3 порядка больше периода собственных колебаний, что согласуется с экспериментальными наблюдениями [2].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Эвенсен Д.А. Нелинейные колебания круговых цилиндрических оболочек // Тонкостенные оболочечные конструкции: Теория, эксперимент и проектирование. М.: Машиностроение, 1980. С. 156–176.
2. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Краснопольская Т.С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. Киев: Наук. думка, 1984. 219 с.
3. Tobias S.A. Non-linear forced vibrations of circular disks // Engineering, 1958. 186. № 4818. P. 51–56.
4. Evensen D.A. Non-linear flexural vibrations of thin circular rings // Trans. ASME, ser. E. J. Appl. Mech. 1966. V. 33. № 3. P.553–560.
5. Ковригин Д.А., Потанов А.И. О нелинейных колебаниях тонкого кольца // Прикл. механика. 1989. Т. 25. № 3. С. 76–81.
6. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 311 с.
7. Tobias S.A. A theory of imperfection for the vibration of elastic bodies of revolution // Engineering. 1951. 172. № 4470. P. 409–410.
8. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.