УДК 539.3:534.1

© 1994 г. А.В. Баул

О ВЛИЯНИИ ПАРАМЕТРА БАТДОРФА НА ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СЖАТОЙ В ОСЕВОМ НАПРАВЛЕНИИ НЕСОВЕРШЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Проводится асимптотический анализ при $Z \to \infty$ (Z – параметр Батдорфа) потери устойчивости и начального послекритического поведения геометрически несовершенной упругой цилиндрической оболочки, подверженной осевому сжатию при подвижно-шарнирном опирании торцов. При $Z \to \infty$ построена асимптотика собственных значений и отвечающих им собственных вектор-функций, линеаризованной на безмоментном решении соответствующей краевой задачи. Метод Ляпунова – Шмидта применяется в окрестности каждого собственного значения, для которого построена асимптотика. При $Z \to \infty$ установлена неустойчивость (параметр Койтера $b < 0$) нечетных по осевой координате собственных форм равновесий и устойчивость ($b > 0$) четных по осевой координате собственных форм равновесий. Показано, что верхняя критическая нагрузка потери устойчивости оболочки (предельная точка) может соответствовать произвольной из близких ($Z \to \infty$) критических нагрузок потери устойчивости идеальной оболочки при надлежащем выборе начальных несовершенств.

1. К постановке задачи. На основе нелинейной теории "среднего изгиба" пологих оболочек Муштари – Доннелла – Власова равновесие упругой круговой цилиндрической оболочки, находящейся под действием равномерно распределенной осевой сжимающей нагрузки, при учете малых несовершенств формы можно описать системой уравнений в частных производных

$$\begin{cases} \varepsilon^2\Delta^2 W + PW,_{xx} - F,_{xx} + \xi P\zeta,_{xx} - [W,F] - \xi[\zeta,F] = 0 \\ \varepsilon^2\Delta^2 F + W,_{xx} + [W,W]/2 + \xi[\zeta,W] = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\Delta() \equiv (),_{xx} + (),_{yy};\ [W,F] \equiv W,_{xx}F,_{yy} - 2W,_{xy}F,_{xy} + W,_{yy}F,_{xx}$$

$$\varepsilon^2 = Rh/(\gamma L^2) = (\sqrt{12}Z)^{-1}, \quad \gamma = \sqrt{12(1-\nu^2)}, \quad l = 2\pi R/L$$

в области $G = \{(x, y): |x| < 1/2;\ |y| < l/2\}$.

Систему (1.1) будем рассматривать вместе с краевыми условиями

$$W = 0, \quad W,_{xx} = 0, \quad F = 0, \quad F,_x = 0 \quad \text{при} \quad |x| = 1/2 \tag{1.2}$$

Приняты следующие обозначения: xL, yL – соответственно осевая и окружная координаты, WL^2/R – дополнительный прогиб, $Eh^2L^2R^{-1}\gamma^{-1}(F - Py^2/2)$ – функция напряжений, $\xi\zeta L^2/R$ – функция начальных несовершенств ($|\xi| \ll 1$), $PP_*/2$ – параметр осевой нагрузки, $P_* = 2Eh/\gamma R$ – классическая критическая нагрузка, ε^2 – параметр относительной тонкостенности, Z – параметр Батдорфа, L, R, h – длина, радиус кривизны и толщина оболочки, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

В предположении достаточной гладкости в G функции ζ краевую задачу (1.1), (1.2) будем трактовать как нелинейное операторное уравнение

$$V(\mathbf{u}, P, \xi\zeta, \varepsilon^2) = 0, \quad V: H_4 \to Y_2 \tag{1.3}$$

Здесь

$$\mathbf{u} = (W, F), \quad V(\mathbf{u}, P, \xi\zeta, \varepsilon^2) = M(P, \varepsilon^2)\mathbf{u} + N(\mathbf{u}, P, \xi\zeta)$$

$$M(P,\varepsilon^2)() = \begin{Vmatrix} \varepsilon^2\Delta^2() + P()_{,xx} & -()_{,xx} \\ -()_{,xx} & -\varepsilon^2\Delta^2() \end{Vmatrix}$$

$$N(\mathbf{u}, P, \xi\zeta) = \begin{Vmatrix} \xi P\zeta_{,xx} - [W,F] - \xi[\zeta, F] \\ -[W,W]/2 - \xi[\zeta, W] \end{Vmatrix} \tag{1.4}$$

Y_2 – линейное пространство двумерных вектор-функций $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$,... с конечной нормой, порождаемой скалярным произведением

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_2 = \int_G (f_1 g_1 + f_2 g_2)\,dxdy \tag{1.5}$$

H_4 – пространство, состоящее из замыкания множества бесконечно дифференцируемых в G вектор-функций $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (\upsilon_1, \upsilon_2)$,..., удовлетворяющих краевым условиям (1.2) с конечной нормой, порождаемой скалярным произведением

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_4 = \varepsilon^3 \langle \Delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{v} \rangle_2 \tag{1.6}$$

Безмоментной форме равновесия оболочки $(W_*, F_*) = (0, Py^2/2)$ в (1.3) при $\xi = 0$ соответствует тривиальное решение. В точке бифуркации $P = P_0$ оператора $V(\xi = 0)$ это решение может потерять устойчивость.

Заметим, что при $P = P_0$ оператор $M(P, \varepsilon^2)$ имеет нулевое собственное значение (СЗ). Такие значения параметра P будем называть критическими. Наличие малых несовершенств может приводить к тому, что основная (безмоментная) форма равновесия потеряет устойчивость не в точке бифуркации, а в предельной точке. Важной задачей представляется исследование влияния параметра Батдорфа (большого для тонкостенных оболочек) на потерю устойчивости основной формы равновесия оболочки, определение бифуркационных значений параметра осевой нагрузки и верхней критической нагрузки потери устойчивости (предельной точки), обусловленной наличием малых несовершенств.

2. Асимптотика критических значений параметра P при $\varepsilon \to 0$. Критические значения параметра P являются СЗ краевой задачи

$$\varepsilon^2\Delta^2 W + PW_{,xx} - F_{,xx} = 0, \quad \varepsilon^2\Delta^2 F + W_{,xx} = 0$$

$$W(\pm 1/2) = 0, \quad W_{,xx}(\pm 1/2) = 0, \quad F(\pm 1/2) = 0, \quad F_{,x}(\pm 1/2) = 0 \tag{2.1}$$

При этом собственные вектор-функции (СВФ) $\mathbf{S} = (W, F)$ должны быть периодическими с периодом l по переменной y. Будем строить асимптотику СЗ $P \in [0,2)$ и отвечающих им СВФ при $\varepsilon \to 0$. Сначала рассмотрим случай, когда СВФ не зависят от y. Полагая $x = \varepsilon t$, $W = u_0$, $F = \upsilon_0$, в этом случае из (2.1) имеем

$$u_0^{\mathrm{IV}} + Pu_0'' - \upsilon_0'' = 0, \quad \upsilon_0^{\mathrm{IV}} + u_0'' = 0, \quad ()' = d()/dt$$

$$u_0(\pm\Lambda) = 0, \quad u_0''(\pm\Lambda) = 0, \quad \upsilon_0(\pm\Lambda) = 0, \upsilon_0'(\pm\Lambda) = 0, \quad \Lambda = 1/(2\varepsilon) \tag{2.2}$$

Обозначим через $P_0^{(0)}(P_0^{(1)})$ СЗ, которым отвечают четные (нечетные) СВФ

$S_0^{(0)}(S_0^{(1)})$ задачи (2.2). При $P \in [0, 2)$ решение задачи (2.2) ищем в виде

$$\mathbf{S}_0^{(0)}(t) = 2\operatorname{Re}(\mathbf{A}\operatorname{ch}\eta t / \operatorname{ch}\eta\Lambda) + \mathbf{a}, \quad \mathbf{A} = A_1(1, -2\eta^{-2}), \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2)$$

$$\mathbf{S}_0^{(1)}(t) = 2\operatorname{Re}(B\operatorname{sh}\eta t / \operatorname{sh}\eta\Lambda) + \mathbf{c}t, \quad \mathbf{B} = B_1(1, -2\eta^{-2}), \quad \mathbf{c} = (c_1, c_2) \tag{2.3}$$

$$\eta = (s_1 + is_2)/\sqrt{2}, \quad s_1 = \sqrt{1-\rho}, \quad s_2 = \sqrt{1+\rho}, \quad \rho = P/2$$

где комплексные постоянные A_1, B_1 и вещественные постоянные a_i, c_i ($i = 1, 2$) пока неизвестны. Подставляя последовательно (2.3) в краевые условия задачи (2.2), получаем неоднородные системы линейных алгебраических уравнений, нетривиальная разрешимость которых приводит к трансцендентным уравнениям

$$(1-P)s_2 + [2(1+P)s_1\sin(\sqrt{2}s_2\Lambda) - (1-P)s_2\exp(-\sqrt{2}s_2\Lambda)]\exp(-\sqrt{2}s_1\Lambda) = 0$$

$$1 - P + 2\sqrt{2}Ps_1\varepsilon + [(P-1)s_2\exp(-\sqrt{2}s_2\Lambda) + P - 1 - 2\sqrt{2}Ps_1\varepsilon + \tag{2.4}$$

$$+4\sqrt{2}Ps_1\varepsilon\sin(\sqrt{2}s_2\Lambda)]\exp(-\sqrt{2}s_1\Lambda) = 0$$

Можно показать, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ каждое из уравнений (2.4) имеет по одному корню $\rho \in [0, 1)$. Построив при $\varepsilon \to 0$ асимптотику этих корней, для соответствующих СЗ задачи (2.2) получаем

$$P_0^{(0)} = 1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2\varepsilon}\exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\right) + o\left(\exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\right)\right)$$

$$P_0^{(1)} = 1 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \tag{2.5}$$

Рассмотрим теперь случай, когда СВФ задачи (2.1) зависят от переменной y. Решение задачи (2.1) ищем в виде

$$\mathbf{S}(x, y) = \mathbf{S}_n\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)\sin\left(d_n y + \frac{\pi n}{2}\right)$$

$$\mathbf{S}_n\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) = \left(u_n\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \upsilon_n\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)\right), \quad d_n = \frac{2\pi n}{l} \tag{2.6}$$

При помощи разделения переменных после замены $x = \varepsilon t$ из (2.1) имеем

$$\Phi(\theta_n)u_n + Pu_n'' - \upsilon_n'' = 0, \quad \Phi(\theta_n)\upsilon_n + u_n'' = 0$$

$$u_n(\pm\Lambda) = 0, \quad u_n''(\pm\Lambda) = 0, \quad \upsilon_n(\pm\Lambda) = 0, \quad \upsilon_n'(\pm\Lambda) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

$$\Phi(\theta_n)() = ()^{\mathrm{IV}} - 2\theta_n^2()'' + \theta_n^4(), \quad \theta_n = d_n\varepsilon$$

Разыскивая решение (2.7) в виде

$$u_n(t) = -(r^2 - \theta_n^2)^2\exp(rt), \quad \upsilon_n(t) = r^2\exp(rt)$$

приходим к характеристическому уравнению

$$(r^2 - \theta_n^2)^2 / r^2 + r^2 / (r^2 - \theta_n^2)^2 = -2\rho \tag{2.8}$$

которое имеет четыре пары комплексных корней $\pm\eta_j$, $\pm\overline{\eta}_j$ ($j = 1, 2$), причем

$$\eta_1 = (s_1 + t_1 + i(s_2 + t_2))/(2\sqrt{2}), \quad \eta_2 = (s_1 - t_1 + i(s_2 - t_2))/(2\sqrt{2})$$

$$t_1 = \sqrt{R + 4\theta_n^2 - \rho}, \quad t_2 = \sqrt{R - 4\theta_n^2 + \rho}, \quad R = \sqrt{16\theta_n^4 - 8\rho\theta_n^2 + 1} \tag{2.9}$$

Четные решения $\mathbf{S}_n^{(0)}(t)$ и нечетные решения $\mathbf{S}_n^{(1)}(t)$ задачи (2.7) ищем соответственно в виде

$$\mathbf{S}_n^{(0)}(t) = 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{2} \mathbf{C}_j \frac{\mathrm{ch}\,\eta_j t}{\mathrm{ch}\,\eta_j \Lambda}\right), \quad \mathbf{C}_j = C_{j,1}(-1, \overline{C})$$

$$\mathbf{S}_n^{(1)}(t) = 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{2} \mathbf{D}_j \frac{\mathrm{sh}\,\eta_j t}{\mathrm{sh}\,\eta_j \Lambda}\right), \quad \mathbf{D}_j = D_{j,1}(-1, \overline{C}) \tag{2.10}$$

$$C = -\rho + i s_1 s_2$$

Приходим к уравнениям, аналогичным (2.4):

$$\mathrm{Im}[C(\eta_1^2 - \eta_2^2)(\overline{\eta}_1\,\mathrm{th}\,\overline{\eta}_1\Lambda - \overline{\eta}_2\,\mathrm{th}\,\overline{\eta}_2\Lambda)] = 0$$

$$\mathrm{Im}[C(\eta_1^2 - \eta_2^2)(\overline{\eta}_1\,\mathrm{cth}\,\overline{\eta}_1\Lambda - \overline{\eta}_2\,\mathrm{cth}\,\overline{\eta}_2\Lambda)] = 0 \tag{2.11}$$

Можно показать, что каждое из уравнений (2.11) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет ровно один корень $\rho \in [0, 1)$. Построив при $\varepsilon \to 0$ асимптотику этих корней, для соответствующих СЗ задачи (2.7) получаем

$$P_n^{(0)} = 1 + d_n^2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$$

$$P_n^{(1)} = 1 + 2\varepsilon + (2 + d_n^2)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.12}$$

Обоснование асимптотических формул (2.12) можно провести методом, аналогичным описанному ранее [1]. В результате приходим к следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Тогда для каждого натурального $n < n_*$, где $n_* = \sqrt{3}l/(4\sqrt{2}\pi\varepsilon)$ ([ ] – целая часть числа) краевая задача (2.1) имеет ровно два СЗ $P_n^{(0)}, P_n^{(1)} \in [0, 2)$. При этом справедливы следующие утверждения:

1) для заданного натурального k можно указать такое число $\varepsilon_0 > 0$ что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $0 \leqslant n \leqslant k$ для СЗ $P_n^{(j)}$ $(j = 0, 1)$ имеют место асимптотические представления (2.5), (2.12);

2) $P_n^{(0)} < P_{n+1}^{(0)}$; $P_n^{(1)} < P_{n+1}^{(1)}$; $P_n^{(0)} < P_n^{(1)}$ $(n = 1, 2, \ldots, n_* - 1)$

Приведем теперь формулы СВФ, отвечающих СЗ из (2.5), (2.12):

$$u_0^{(0)}(t) = 2\,\mathrm{Re}\left(A_1 \frac{\mathrm{ch}\,\eta t}{\mathrm{ch}\,\eta\Lambda}\right) - 1, \quad \upsilon_0^{(0)}(t) = 2\,\mathrm{Re}\left(A_1 \eta^{-2} \frac{\mathrm{ch}\,\eta t}{\mathrm{ch}\,\eta\Lambda}\right) - \rho$$

$$\rho = P_0^{(0)}/2, \quad A_1 = (1 - 2i\rho)/(2 s_1 s_2)$$

$$u_0^{(1)}(t) = 2\,\mathrm{Re}\left(B_1 \frac{\mathrm{sh}\,\eta t}{\mathrm{sh}\,\eta\Lambda}\right) + t, \quad \upsilon_0^{(1)}(t) = 2\,\mathrm{Re}\left(B_1 \eta^{-2} \frac{\mathrm{sh}\,\eta t}{\mathrm{sh}\,\eta\Lambda}\right) - 2\rho t$$

$$\rho = P_0^{(1)}/2; \quad B_1 = \Lambda(1/2 - i\rho)/(2 s_1 s_2)$$

$$\mathbf{S}_n^{(j)}(t) = J(Q\overline{Y}_j(t) - Y_j(t),\ -QC\overline{Y}_j(t) + \overline{C}Y_j(t)), \quad j = 0, 1$$

$$Q = Q_1 + iQ_2, \quad Q_1 = R^{-1}(2\rho^2 - 4\theta_n^2\rho - 1), \quad Q_2 = R^{-1}s_1 s_2(4\theta_n^2 - 2\rho)$$

$$J = 1 + iQ_2/(1 - Q_1), \quad \rho = P_n^{(j)}/2, \quad j = 0, 1$$

$$Y_0(t) = \frac{\mathrm{ch}\,\eta_1 t}{\mathrm{ch}\,\eta_1\Lambda} - \frac{\mathrm{ch}\,\eta_2 t}{\mathrm{ch}\,\eta_2\Lambda}, \quad Y_1(t) = \frac{\mathrm{sh}\,\eta_1 t}{\mathrm{sh}\,\eta_1\Lambda} - \frac{\mathrm{sh}\,\eta_2 t}{\mathrm{sh}\,\eta_2\Lambda} \tag{2.13}$$

Обозначим через $\sigma(\varepsilon, U)$ множество СЗ $P_n^{(j)}$ задачи (2.1), для которых выполняется неравенство

$$(P_n^{(j)}-1)/\varepsilon \leqslant U, \quad 0<U \sim O(1), \quad j=0,1; \quad n=1,2,\ldots \tag{2.14}$$

Множество СВФ, отвечающих СЗ из $\sigma(\varepsilon, U)$, обозначим $H(\varepsilon, U)$. Имеют место следующие представления:

$$\begin{gathered}\sigma(\varepsilon,U)=\sigma^{(0)}(\varepsilon,U)\cup\sigma^{(1)}(\varepsilon,U)\\ H(\varepsilon,U)=H^{(0)}(\varepsilon,U)\cup H^{(1)}(\varepsilon,U)\end{gathered} \tag{2.15}$$

Здесь множеству $H^{(j)}(\varepsilon, U)$ соответствует множество СЗ $\sigma^{(j)}(\varepsilon, U)$. При этом для СВФ $\mathbf{S} \in H(\varepsilon, U)$ устанавливается соответствие

$$\mathbf{S}\in\begin{cases}H^{(0)}(\varepsilon,U), & \text{если} \quad S_x\mathbf{S}=iS_y\mathbf{S}=\mathbf{S}\\ H^{(1)}(\varepsilon,U), & \text{если} \quad -S_x\mathbf{S}=iS_y\mathbf{S}=\mathbf{S}\ (i=\pm1)\end{cases} \tag{2.16}$$

$$(S_x\colon\ \mathbf{u}(x,y)\to\mathbf{u}(-x,y), \quad S_y\colon\ \mathbf{u}(x,y)\to\mathbf{u}(x,-y))$$

3. Применение метода Ляпунова – Шмидта. Для исследования ветвления тривиального ($\xi = 0$) решения уравнения (1.3) и построения новых решений в окрестности произвольной точки бифуркации $P_0 \in \sigma(\varepsilon, U)$ применим метод Ляпунова – Шмидта в его операторной форме [2]. Полагая $\mathbf{u} = \mathbf{x}$, $P = P_0 + \lambda$, для малых возмущений $\mathbf{x} = (\omega, \psi)$, λ из (1.3) получаем операторное уравнение

$$M(P_0,\varepsilon^2)\mathbf{x}=\Pi\mathbf{x}+\lambda T_1\mathbf{x}+\xi T_2(\zeta)\mathbf{x}+P_0\xi T_1\zeta+\lambda\xi T_1\zeta \tag{3.1}$$

$$\Pi\mathbf{x}=\begin{Vmatrix}[\omega,\psi]\\ [\omega,\omega]/2\end{Vmatrix}, \quad T_1()=\begin{Vmatrix}()_{,xx}\\ 0\end{Vmatrix}, \quad T_2(\zeta)\mathbf{x}=\begin{Vmatrix}[\zeta,\psi]\\ [\zeta,\omega]\end{Vmatrix}$$

Можно проверить что операторы $M(P_0, \varepsilon^2)$, Π, T_1, T_2 действуют из H_4 в Y_2, а оператор $M(P_0, \varepsilon^2)$, кроме того, является формально самосопряженным. Так как P_0 – простое критическое значение (по крайней мере при малых $\varepsilon > 0$) оператора $M(P_0, \varepsilon^2)$, то построим [2] оператор Шмидта M_1 в виде

$$M_1\mathbf{x}=M(P_0,\varepsilon^2)\mathbf{x}+\mu\mathbf{S}_0, \quad \mu=\langle\mathbf{x},\kappa\rangle_1 \tag{3.2}$$

Здесь $\langle \mathbf{x}, \kappa \rangle_1$ – значение функционала $\kappa \in (H_4)^*$ на элементе $\mathbf{x} \in H_4$, $\mathbf{S}_0$ – СВФ, отвечающая СЗ P_0. Предположим, что

$$\langle\mathbf{S}_0,\mathbf{S}_0\rangle_4=\kappa_1; \quad \langle\mathbf{S}_0,\mathbf{S}_0\rangle_2=\kappa_2 \tag{3.3}$$

Отметим, что при учете (3.3) из (3.2) следует соотношение

$$\langle\mathbf{x},\kappa\rangle_1=\langle M_1\mathbf{x},\mathbf{S}_0\rangle_2/\kappa_2 \tag{3.4}$$

Запишем (3.2) в виде эквивалентной системы уравнений

$$\begin{gathered}M_1\mathbf{x}=\Pi\mathbf{x}+\lambda T_1\mathbf{x}+\xi T_2(\zeta)\mathbf{x}+P_0\xi T_1\zeta+\lambda\xi T_1\zeta+\mu\mathbf{S}_0\\ \mu=\langle\mathbf{x},\kappa\rangle_1\end{gathered} \tag{3.5}$$

Решение системы (3.5) ищем в виде ряда по целым степеням малых параметров μ, λ, ξ:

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_{100}\mu+\mathbf{x}_{010}\lambda+\mathbf{x}_{001}\xi+\sum_{i+j+k\geqslant2}\mathbf{x}_{ijk}\mu^i\lambda^j\xi^k \qquad \mathbf{x}_{ijk}=(\omega_{ijk},\psi_{ijk}) \tag{3.6}$$

Подставляя (3.6) в первое уравнение (3.5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметров μ, λ, ξ, для определения $\mathbf{x}_{ijk}$ находим линейные операторные уравнения, разрешимые в силу обобщенной леммы Шмидта [2]:

$$M_1\mathbf{x}_{ijk} = \mathbf{f}_{ijk},\quad i+j+k \geqslant 1;\quad \mathbf{x}_{ijk} \in H_4,\quad \mathbf{f}_{ijk} \in Y_2 \tag{3.7}$$

Здесь, в частности,

$$\mathbf{f}_{100} = \mathbf{S}_0,\quad \mathbf{f}_{010} = 0,\quad \mathbf{f}_{001} = P_0 T_1 \zeta$$

$$\mathbf{f}_{200} = \Pi\mathbf{x}_{100},\quad \mathbf{f}_{300} = \begin{Vmatrix} [\omega_{100},\psi_{200}] + [\omega_{200},\psi_{100}] \\ [\omega_{100},\omega_{200}] \end{Vmatrix}$$

Найдем несколько первых коэффициентов ряда (3.6). Учитывая, что $M_1\mathbf{S}_0 = \kappa_1\mathbf{S}_0$, получаем: $\mathbf{S}_0 = \Gamma\mathbf{S}_0$, где $\Gamma = (M_1)^{-1}$. Отсюда находим: $\mathbf{x}_{100} = \mathbf{S}_0/\kappa_1$. Далее, из условия $\mathbf{f}_{010} = 0$ имеем: $\mathbf{x}_{010} = 0$. Решая теперь последовательно уравнения (3.7), находим

$$\mathbf{x}_{001} = P_0\Gamma(T_1\zeta),\quad \mathbf{x}_{110} = \Gamma(T_1\mathbf{x}_{100}) = \Gamma(T_1\mathbf{S}_0)/\kappa_1 \tag{3.8}$$

$$\mathbf{x}_{200} = \Gamma(\Pi\mathbf{x}_{100}) = \Gamma(\Pi\mathbf{S}_0)/\kappa_1^2$$

и т.д.

Замечая, что

$$\langle \mathbf{x}_{ijk},\kappa\rangle_1 = \langle M_1\mathbf{x}_{ijk},\mathbf{S}_0\rangle_2/\kappa_2 = \langle \mathbf{f}_{ijk},\mathbf{S}_0\rangle_2/\kappa_2 \tag{3.9}$$

получим более удобную для расчетов форму записи уравнений для определения $\mathbf{x}_{001}$, $\mathbf{x}_{200}$:

$$\begin{gathered} M(P_0,\varepsilon^2)\mathbf{x}_{001} = P_0(T_1\zeta - \langle T_1\zeta,\mathbf{S}_0\rangle_2\mathbf{S}_0/\kappa_2) \\ M(P_0,\varepsilon^2)\mathbf{x}_{200} = (\Pi\mathbf{S}_0 - \langle \Pi\mathbf{S}_0,\mathbf{S}_0\rangle_2\mathbf{S}_0/\kappa_2)/\kappa_1^2 \end{gathered} \tag{3.10}$$

Подставляя ряд (3.6) с известными коэффициентами во второе соотношение (3.5), выводим уравнение разветвления, которое можно записать в виде

$$\begin{gathered} L_{300}\mu^3 + L_{110}\lambda\mu + L_{100}\xi + \ldots = 0 \\ L_{001} = P_0\langle \zeta_{,x},\omega_{0,x}\rangle,\quad L_{110} = \langle \omega_{0,x},\omega_{0,x}\rangle/\kappa_1 \\ L_{300} = (\langle [\omega_0,\psi_{200}] + [\omega_{200},\psi_0],\omega_0\rangle + \langle [\omega_0,\psi_{200}],\psi_0\rangle)/\kappa_1 \end{gathered} \tag{3.11}$$

Точками отмечены члены более высокого порядка малости по μ, λ, ξ, а угловые скобки означают скалярное произведение функций.

Отметим, что $L_{200} = 0$ в силу периодичности СВФ $\mathbf{S}_0$ по переменной y. Предположим, что $L_{300} \neq 0$, $L_{001} \neq 0$. Тогда (3.11) можно преобразовать к виду

$$\begin{gathered} \Phi(\mu,\lambda,\xi) \equiv b\mu^3 - \lambda\mu + K(\zeta)\xi + \ldots = 0 \\ b = -L_{300}/L_{110},\quad K(\zeta) = -L_{001}/L_{110} \end{gathered} \tag{3.12}$$

Согласно Койтеру коэффициент b (параметр Койтера) является коэффициентом чувствительности конструкции к несовершенствам. Именно если $b < 0$, то оболочка считается чувствительной к несовершенствам, так как в этом случае критическая нагрузка потери устойчивости несовершенной оболочки $P_{0,s}$ меньше, чем критическая нагрузка потери устойчивости идеальной оболочки P_0. Предельная точка $P_{0,s}$ находится из совместного решения уравнений (3.12) и

$$\partial\Phi(\mu,\lambda_s,\xi)/\partial\mu = 0,\quad \lambda_s = P_{0,s} - P_0 \tag{3.13}$$

и получается в виде

$$P_{0,s} = P_0 + 3(K(\zeta)\xi/2)^{2/3}b^{1/3} + \ldots \tag{3.14}$$

Отметим, что формула (3.14) была впервые получена Койтером. Решение уравнения (1.3), соответствующее предельной точке $P_{0,s}$, неустойчиво. Вследствие сказанного выше весьма важной представляется задача установления знака параметра Койтера b. Аналитических результатов здесь получено мало. Отметим работы [3, 4], где была доказана положительность параметра Койтера для пластин произвольной формы, находящихся под действием внешнего давления. Был приведен [5] график зависимости параметра Койтера от параметра Батдорфа и численно установлена асимптотическая формула для параметра b при $Z \to \infty$ для цилиндрической оболочки, подверженной осевому сжатию при жестком защемлении торцов. Ниже будет построен главный член асимптотики ($Z \to \infty$) параметра Койтера, соответствующего сжатой в осевом направлении цилиндрической оболочке при подвижно–шарнирном опирании торцов.

4. Асимптотика параметра b при $P_0 \in \sigma^{(0)}(\varepsilon, U)$. Введем обозначения

$$l_{110} = \kappa_1 L_{110}, \quad l_{300} = \kappa_1^3 L_{300} \tag{4.1}$$

Рассмотрим случай, когда $P_0 \in \sigma^{(0)}(\varepsilon, U)$, т.е. $S_0(t, y) = (u_n^{(0)}, v_n^{(0)})(t)\sin(d_n y + \pi n/2)$ ($n = 1, 2,\ldots$). При помощи замены $x = \varepsilon t$ из (3.11) выводим

$$l_{110} = \frac{l}{2\varepsilon} I[(u_n')^2], \quad I[f] \equiv \int_{-\Lambda}^{\Lambda} f(t)dt \tag{4.2}$$

Здесь опущен верхний индекс (0) при u_n. Используя асимптотические формулы

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) + O(\varepsilon^2), \quad \eta_2 = O(\varepsilon^2), \quad \eta = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) + O(\varepsilon^2)$$

$$C = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) + O(\varepsilon^2), \quad Q = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) + O(\varepsilon^2), \quad J = \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right) + O(\varepsilon)$$

из (4.2) находим

$$l_{110} = 4l/\varepsilon + O(1) \quad (n = 1, 2,\ldots) \tag{4.3}$$

Таким образом, главный член асимптотического разложения l_{110} не зависит от числа волн n по окружности цилиндрической оболочки.

Теперь построим асимптотическую формулу для κ_1. Замечая, что из (2.1) следует соотношение

$$P_n = \|S_n\|_4^2 / (\varepsilon l_{110})$$

и переходя в этом соотношении к пределу при $\varepsilon \to 0$ при учете (4.3) находим

$$\kappa_1 = 4l + O(\varepsilon) \tag{4.4}$$

Значит,

$$L_{110} = 1/\varepsilon + O(1) \tag{4.5}$$

Для построения асимптотического разложения L_{300} сначала необходимо построить решение краевой задачи

$$\begin{gathered}\Delta_1^2\omega_{200} + P_n\omega_{200}'' - \psi_{200}'' = -d_n^2[(u_n v_n)'' + (-1)^{n+1}\Phi_1 \cos 2d_n y]/2 \\ \Delta_1^2\psi_{200} + \omega_{200}'' = d_n^2[(u_n^2/2)'' + (-1)^{n+1}\Phi_2 \cos 2d_n y]/2\end{gathered} \tag{4.6}$$

$$\Delta_1(\ ) \equiv (\ )'' + (\ )_{,yy} \quad (\ )' = \partial(\ )/\partial t$$

$$\omega_{200}(\pm\Lambda) = 0, \quad \omega_{200}''(\pm\Lambda) = 0, \quad \psi_{200}(\pm\Lambda) = 0, \quad \psi'(\pm\Lambda) = 0$$

$$\Phi_1 = u_n'' v_n - 2u_n' v_n' + u_n v_n'', \quad \Phi_2 = u_n'' u_n - (u_n')^2$$

которая получается из второго уравнения (3.10) при

$$S_0(t, y) = (u_n, \upsilon_n)(t)\sin(d_n y + \pi n/2)$$

без учета κ_1. В формулах (4.6) опущен верхний индекс (0) при P_n, u_n, υ_n, ω_{200}, ψ_{200}. Решение задачи (4.6) ищем в виде

$$\begin{aligned} &\omega_{200}(t,y) = \omega_1(t) + (-1)^n \omega_2(t)\cos 2d_n y \\ &\psi_{200}(t,y) = \psi_1(t) + (-1)^n \psi_2(t)\cos 2d_n y \end{aligned} \qquad (4.7)$$

Подставляя (4.7) в (4.6), после разделения переменных для определения $\omega_i(t)$, $\psi_i(t)$ ($i = 1, 2$) получаем краевые задачи

$$\begin{aligned} &\Phi(\alpha_i)\omega_i + P_n\omega_i'' - \psi_i'' = f_i, \quad \Phi(\alpha_i)\psi_i + \omega_i'' = g_i \\ &\omega_i(\pm\Lambda) = 0, \quad \omega_i'(\pm\Lambda) = 0, \quad \psi_i(\pm\Lambda) = 0, \quad \psi_i'(\pm\Lambda) = 0 \end{aligned} \qquad (4.8)$$

$$\Phi(\alpha)(\ ) \equiv (\ )^{\mathrm{IV}} - 2\alpha^2(\ )'' + \alpha^4(\ ), \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 2\theta_n$$

$$f_1 = -\frac{d_n^2}{2}(u_n\upsilon_n)'', \quad f_2 = \frac{d_n^2}{2}\Phi_1, \quad g_1 = \frac{d_n^2}{2}\left(\frac{u_n^2}{2}\right)'', \quad g_2 = -\frac{d_n^2}{2}\Phi_2$$

Используя соотношения (3.11), (4.7), формулу для l_{300} преобразуем к виду

$$l_{300} = -\frac{d_n^2 l}{2\varepsilon} I[2\omega_1' u_n\upsilon_n + \psi_1' u_n^2] + \frac{l}{\varepsilon} I[f_2\omega_2 + g_2\psi_2] \qquad (4.9)$$

Построим асимптотику решений краевых задач (4.8), основываясь на методе асимптотического интегрирования [6]. Заметим, что согласно результатам разд. 2 имеем асимптотические представления

$$P_n^{(0)} = \sum_{i=0}^{\infty} P_{n,i}^{(0)}\varepsilon^i, \quad P_{n,0}^{(0)} = P_0^{(0)}; \quad P_{n,1}^{(0)} = 0, \quad P_{n,2}^{(0)} = d_n^2 \quad (n = 1,2,\ldots) \qquad (4.10)$$

Правые части краевых задач (4.8) также представимы в виде рядов

$$f_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} f_i^{(j)}(t)\varepsilon^j, \quad g_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} g_i^{(j)}(t)\varepsilon^j$$

причем $f_i^{(0)}(t) \not\equiv 0$, $g_i^{(0)}(t) \not\equiv 0$. Решение краевых задач (4.8) ищем в виде рядов

$$\begin{aligned} &\omega_i(t) = \varepsilon^{-2}\omega_i^{(-2)}(t) + \varepsilon^{-1}\omega_i^{(-1)}(t) + \omega_i^{(0)}(t) + \ldots \\ &\psi_i(t) = \varepsilon^{-2}\psi_i^{(-2)}(t) + \varepsilon^{-1}\psi_i^{(-1)}(t) + \psi_i^{(0)}(t) + \ldots \quad (i = 1,2) \end{aligned}$$

Подставляя эти ряды в (4.8) и приравнивая нулю коэффициенты при ε^j, для определения $\omega_i^{(j)}(t)$, $\psi_i^{(j)}(t)$ получаем краевые задачи, решая которые при $j = -2$, выводим

$$\omega_i^{(-2)}(t) = C_i^{(-2)} u_0^{(0)}(t), \quad \psi_i^{(-2)}(t) = C_i^{(-2)}\upsilon_0^{(0)}(t) \quad (i = 1,2) \qquad (4.11)$$

Постоянные $C_i^{(-2)}$ находятся из условий разрешимости этих краевых задач при $j = 0$ и получаются в виде

$$\begin{aligned} &C_1^{(-2)} = -\frac{1}{2}\frac{I[2u_0u_0'\upsilon_0' - (u_0')^2\upsilon_0]}{I[(\upsilon_0')^2]} + O(\varepsilon) \\ &C_2^{(-2)} = -\frac{3}{2}\frac{I[2u_0u_0'\upsilon_0' - (u_0')^2\upsilon_0]}{I[7(u_0')^2 - 8(\upsilon_0')^2]} + O(\varepsilon) \end{aligned} \qquad (4.12)$$

(верхний индекс (0) при u_0, υ_0 опущен). Учитывая в (2.12) соотношение (4.3), из (4.12) выводим

$$C_i^{(-2)} = -1 + O(\varepsilon)$$

Отсюда получаем

$$\omega_i(t) = -u_0^{(0)}(t)\varepsilon^{-2} + O(\varepsilon^{-1}), \quad \psi_i(t) = -\upsilon_0^{(0)}(t)\varepsilon^{-2} + O(\varepsilon^{-1}) \quad (i = 1,2)$$

Учитывая теперь последние формулы, используя соотношение (4.9) и вычисляя интегралы, имеем

$$L_{300} = \frac{d_n^2}{8l^2}\varepsilon^{-3} + O(\varepsilon^{-2}), \quad b = -\frac{d_n^2}{8l^2}\varepsilon^{-2} + O(\varepsilon^{-1}) \tag{4.13}$$

Отсюда следует, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ точка бифуркации $P_n^{(0)} \in \sigma^{(0)}(\varepsilon, U)$ переходит в предельную точку $P_{n,s}^{(0)}$, где

$$P_{n,s}^{(0)} = P_n^{(0)} - \frac{3}{2}\left(\frac{K(\zeta)d_n\xi}{l\varepsilon}\right)^{2/3} + \ldots \tag{4.14}$$

Здесь точками отмечены члены более высокого порядка малости по ξ; предполагается что $\xi = O(\varepsilon^2)$, т.е. амплитуда начальных несовершенств пропорциональна относительной тонкостенности оболочки.

Введем обозначение

$$P_s = \min_n P_{n,s}^{(0)} \tag{4.15}$$

и назовем P_s предельной точкой, соответствующей множеству точек бифуркации $P_n^{(0)} \in \sigma^{(0)}(\varepsilon, U)$.

При подходящем выборе функции ζ предельная точка P_s может соответствовать произвольной точке бифуркации из множества $\sigma^{(0)}(\varepsilon, U)$.

Действительно, пусть

$$\zeta(x, y) = \sum_i \alpha_i W_i(x, y)$$

где $W_i(x, y)$ – первые координаты СВФ краевой задачи (2.1), отвечающие СЗ P_i. Учитывая условия ортогональности

$$\langle W_i, W_{j,xx} \rangle = 0, \quad i \neq j$$

из (3.11) выводим $L_{001} = P_n^{(0)}\alpha_n l_{110}$.

Отсюда имеем

$$K(\zeta) = -P_n^{(0)}\alpha_n / \kappa_1 = -\alpha_n / (4l) + O(1)$$

Тогда

$$P_{n,s}^{(0)} = 1 - \frac{3}{2l}\left(\frac{\pi n\alpha_n\xi}{2\varepsilon}\right)^{2/3} + \ldots \tag{4.16}$$

Пусть теперь $\zeta(x, y) = 2W_j(x, y)/(\pi j)$. Тогда из (4.15), (4.16) следует соотношение

$$P_s = P_{j,s}^{(0)} = 1 - \frac{3}{2l}\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)^{2/3} + \ldots \tag{4.17}$$

Полученный выше результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. Пусть $P_n \in \sigma^{(0)}(\varepsilon, U)$, $\xi \sim O(\varepsilon^2)$ $(\varepsilon \to 0)$. Тогда точке бифуркации P_n

соответствует предельная точка $P_{n,s} < P_n$, для которой имеет место асимптотическое представление (4.14). Кроме того, для каждого j, такого, что $P_j \in \sigma^{(0)}(\varepsilon, U)$, можно подобрать функцию несовершенств ζ так, что $P_{s,j}$ будет предельной точкой, соответствующей множеству точек бифуркации $\sigma^{(0)}(\varepsilon, U)$.

5. Асимптотика параметра b при $P_0 \in \sigma^{(1)}(\varepsilon, U)$. В этом случае $S_0(t, y) = (u_n^{(1)}, \upsilon_n^{(1)})(t) \times \times \sin(d_n y + \pi n / 2)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Учитывая асимптотические формулы

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad \eta_2 = O(\varepsilon^2),$$

$$C = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) + (1 - i\sqrt{3})\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$Q = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) + 2\left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad J = \left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right) - (1 - i\sqrt{3})\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

и действуя как и в разд. 4, снова приходим к формулам (4.4), (4.5) для κ_1, l_{110}.

Аналогично предыдущему получим

$$L_{300} = -\frac{5d_n^4}{8l^2}\varepsilon^{-2} + O(\varepsilon^{-1}), \quad b = \frac{5d_n^4}{8l^2}\varepsilon^{-1} + O(1) \tag{5.1}$$

Из (5.1) следует, что $b > 0$. Следовательно, точки бифуркации $P_n^{(1)}$ не переходят в предельные точки, а соответствующие собственные формы (нечетные по осевой координате) устойчивы.

Автор благодарит Л.С. Срубщика за советы и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Есипов А.А., Юдович В.И.* Асимптотика собственных значений первой краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения на длинном отрезке // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. № 2. С. 342–349.
2. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.
3. *Ворович И.И.* О поведении пластин произвольной формы после потери устойчивости // Проблемы механики твердого деформированного тела. М.: Наука, 1970, С. 113–119.
4. *Срубщик Л.С., Треногин В.А.* О выпучивании гибких пластин // ПММ. 1962. Т. 32. Вып. 4. С. 721–727.
5. *Ямаки Н.* Закритическое поведение и чувствительность к несовершенствам круглой цилиндрической оболочки, подверженной осевому сжатию // Теоретическая и прикладная механика. М.: Мир, 1979. С. 715–750.
6. *Вишик М.М., Люстерник Л.А.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15. Вып. 3. С. 3–80.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
19.VII.1993