УДК 532.5:534.1

© 1994 г. С.В. Мелешко

# ОДНОРОДНЫЕ АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ С ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Исследуются решения вида двойной волны уравнений с тремя независимыми переменными. Рассматривается случай, когда в процессе исследования на совместность может быть сформирована однородная автономная система, состоящая из четырех независимых квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Приводятся все такие системы, которые имеют решения с функциональным произволом, не редуцируемые к инвариантным. Находятся их решения.

Одной из основных задач теории $r$-кратных волн является классификация решений с вырожденным годографом. С точки зрения групповых свойств дифференциальных уравнений $r$-кратная волна есть частично инвариантное решение (ЧИР) относительно подгруппы группы преобразований $G^{n+1}$ с алгеброй Ли $L^{n+1}$, базис операторов которой [1]

$$\xi_0\partial = x_i\partial_i, \quad \xi_i\partial = \partial_i \quad (i=1,2,...,n)$$

где $n$ – число независимых переменных.

Среди ЧИР особое место занимают решения, которые не редуцируются к инвариантным. Это связано с тем, что задача построения инвариантных решений намного проще задачи построения ЧИР. А именно, для инвариантной $r$-кратной волны с точностью до преобразований подобия могут быть два типа параметров волны $(\lambda^1,..., \lambda^r)$ [1].

Преобразование подобия определяется линейной заменой независимых переменных $x' = Vx$ с невырожденной квадратной $n \times n$-матрицей $V$. Кроме того, для ЧИР требуется более сложный анализ совместности получаемых переопределенных систем, чем для инвариантных решений. Поэтому полезно априори выяснить вид нередуцируемых кратных волн. В литературе имеются лишь отдельные достаточные условия редуцируемости. Так для двойных волн особую роль играет теорема Л.В. Овсянникова [1] о редукции к инвариантным решениям. В частности, если $n=3$ и имеется пять независимых автономных однородных квазилинейных уравнений первого порядка, которым удовлетворяют параметры волны, то такие решения редуцируются к инвариантным.

Другим ключевым моментом изучения решений с вырожденным годографом является исследование совместности переопределенных систем. Так как общий анализ возникающих систем затруднителен, то он осуществляется при дополнительных предположениях о решении. Первоначально это были кинематические и геометрические условия: потенциальность течений или прямолинейность линий уровня [2–4]. Следует заметить, что требование прямолинейности линий уровня соответствует меньшему дефекту инвариантности. Ограничения конструировались также на основе алгебраической структуры системы, связанной с так называемыми простыми интегральными элементами [5, 6]. Поскольку в любом случае приходится анализировать совместность переопределенной системы, то более естественным с точки зрения теории совместности, является классификация решений с вырожденным годографом по наличию функционального произвола в общем решении.

Исследование решений, имеющих функциональный произвол, основано на том, что всякая совместная система дифференциальных уравнений после конечного числа продолжений приходит в инволюцию. Если система дифференциальных уравнений находится в инволюции, то функциональный произвол в решении определяется характерами Картана, которые связаны определенным образом со старшими параметрическими производными.

Так, для существования решений, имеющих функциональный произвол, необходимо, чтобы ранг матрицы из коэффициентов при старших производных не был равен числу всех старших производных (ни при каком из продолжений).

При классификации двойных волн в случае трех независимых переменных почти всегда приходится исследовать системы, состоящие из четырех квазилинейных однородных уравнений первого порядка

$$\sum_{\alpha=1}^{3}(\lambda_\alpha p_j^\alpha(\lambda,\mu)+\mu_\alpha q_j^\alpha(\lambda,\mu))=0 \qquad (j=1,2,3,4) \tag{0.1}$$

Ниже изучаются такие системы и их решения: приводятся все системы (0.1), имеющие решения с функциональным произволом, не редуцируемые к инвариантным и находятся их общие решения. Выводы данной работы обобщают результаты автора по классификации кратных волн уравнений газовой динамики и теории пластичности [7–10].

**1. Преобразование эквивалентности.** Пусть $u=(\lambda,\mu)$ – параметры двойной волны, $\lambda_i=\partial\lambda/\partial x_i$, $\mu_i=\partial\mu/\partial x_i$, $u_i=(\lambda_i,\mu_i)$ $(i=1,2,3)$. Свойство однородности и автономности для систем (0.1) инвариантно относительно преобразований эквивалентности:

а) выбора параметров волны: $\lambda'=L(\lambda,\mu)$, $\mu'=M(\lambda,\mu)$;

б) линейной невырожденной замены независимых переменных.

При помощи преобразований эквивалентности в силу условия двойной волны: $\operatorname{rank}\partial(\lambda,\mu)/\partial(x_1,x_2,x_3)=2$ можно показать, что любая система (0.1) из четырех независимых уравнений приводится к одному из двух видов:

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=0,\quad \mu_3=0$$

$$\lambda_3+a(\lambda,\mu)\mu_1+b(\lambda,\mu)\mu_2=0 \qquad (a^2+b^2\neq 0) \tag{1.1}$$

или

$$u_3=Au_1,\qquad u_2=Bu_1 \tag{1.2}$$

где $A=(a_{ij}(\lambda,\mu))$, $B=(b_{ij}(\lambda,\mu))$ – квадратные $(2\times 2)$-матрицы.

**2. Решение системы (1.1).** После дифференцирования по $x_3$ последнего уравнения системы (1.1) получаются уравнения (штрих обозначает дифференцирование по $x_3$)

$$\lambda''+(a_\lambda\mu_1+b_\lambda\mu_2)\lambda'=0 \tag{2.1}$$

$$\lambda'''+(a_\lambda\mu_1+b_\lambda\mu_2)\lambda''+(a_{\lambda\lambda}\mu_1+b_{\lambda\lambda}\mu_2)\lambda'=0$$

Из уравнений (1.1) и (2.1) вытекают соотношения

$$(b_\lambda\lambda'^2-b\lambda'')+\Delta_1\lambda'\mu_1=0,\qquad -(a_\lambda\lambda'^2-a\lambda'')+\Delta_1\lambda'\mu_2=0 \tag{2.2}$$

$$(\Delta_1=ab_\lambda-ba_\lambda)$$

Если $\Delta_1\neq 0$, то из уравнений (2.2) находятся выражения для $\mu_1$, $\mu_2$, а после их подстановки в последнее уравнение (2.1) определяется $\lambda'''$. Поэтому в данном случае система (1.1) может иметь не более чем константный произвол. Значит, следует считать $\Delta_1=0$. Тогда $b=g(\mu)a$ (без ограничения общности, считается $a\neq 0$) и

$$D_i(a_\lambda\lambda'^2-a\lambda'')=\mu_i(a_{\lambda\mu}\lambda'^2-a_\mu\lambda'')=0 \quad (i=1,2)$$

(здесь и далее $D_i$ – оператор полного дифференцирования по независимой переменной $x_i$). Поэтому $aa_{\lambda\mu}-a_\lambda a_\mu=0$, или $a=\phi\psi$ с некоторыми функциями $\phi=\phi(\lambda)$, $\psi=\psi(\mu)$. В силу преобразования эквивалентности с $dL=\phi^{-1}d\lambda$, $dM=\psi\, d\mu$ эти функции приводятся к равенствам $\phi=\psi=1$. Тогда система (1.1) расщепляется. Для параметра $\lambda$ получается $\lambda=cx_3$, где $c\neq 0$ – произвольная постоянная, которая ввиду преобразования эквивалентности несущественна. А для $\mu$ имеется уравнение $\mu_1+g(\mu)\mu_2=-c$, интегрирование которого проводится стандартным способом [11].

*Теорма 1*. Системы (1.1), имеющие решения с функциональным произволом, эквивалентны системе

$$\lambda = x_3, \quad \mu_1 + g(\mu)\mu_2 = -1$$

**3. Решение системы (1.2).** Прежде всего замечаем, что

$$D_2(u_3 - Au_1) - D_3(u_2 - bu_1) \equiv Gu_{11} - C\langle u_1, u_1\rangle = 0 \tag{3.1}$$

Здесь $G = AB - BA$ с элементами

$$g_{11} = -g_{22} = a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12}$$

$$g_{12} = a_{12}(b_{22} - b_{11}) - b_{12}(a_{22} - a_{11}), \quad g_{21} = -a_{21}(b_{22} - b_{11}) + b_{21}(a_{22} - a_{11})$$

$C$ – билинейное отображение, координаты которого определяются через матрицы $A$, $B$ и производные от них по $\lambda$, $\mu$.

Если $\det G \neq 0$, то решение системы (1.2) может иметь не более чем константный произвол. А так как рассматриваются системы, имеющие решения с функциональным произволом, то следует считать $\det G = 0$, т.е.

$$a_{12}a_{21}(b_{22} - b_{11})^2 - (a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12})(b_{22} - b_{11})(a_{22} - a_{11}) + b_{12}b_{21}(a_{22} - a_{11})^2 - \Delta^2 = 0 \tag{3.2}$$

$$(\Delta = a_{12}a_{21} - b_{12}b_{21})$$

Если $a_{12}a_{21}\Delta \neq 0$, то из (3.2) следует, что $(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}a_{21} \geqslant 0$. При этом условии матрица $A$ имеет вещественные собственные значения. Этот случай исследуется ниже особо.

Если $a_{12}a_{21}\Delta = 0$, то или $a_{12}a_{21} = 0$, и значит, матрица $A$ также имеет вещественные собственные значения, или

$$\Delta = 0, \quad a_{12}a_{21} \neq 0 \tag{3.3}$$

В последнем случае $G = 0$. Но тогда в (3.1) имеются две однородные квадратичные формы относительно $u_1 = (\lambda_1, \mu_1)$:

$$C\langle u_1, u_1\rangle = 0 \tag{3.4}$$

Если хотя бы один из коэффициентов квадратичных форм (3.4) отличен от нуля, это дает пятое автономное однородное квазилинейное уравнение первого порядка, и в силу теоремы о редукции [1] такие решения редуцируются к инвариантным. Значит, в этом случае необходимо считать $C = 0$. Так как предполагается, что $a_{12}a_{21} \neq 0$, то из (3.2)–(3.4) получаем соотношения

$$b_{21} = \frac{a_{21}b_{12}}{a_{12}}, \quad b_{22} = \xi + b_{11} \quad \left(\xi \equiv \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}}\right)$$

$$\frac{\partial b_{12}}{\partial\lambda} - \frac{\partial b_{11}}{\partial\mu} + \frac{b_{12}}{a_{12}}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial\mu} - \frac{\partial a_{12}}{\partial\lambda}\right) = 0 \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial\lambda} - \frac{a_{21}}{a_{12}}\frac{\partial b_{12}}{\partial\mu} + \xi\frac{\partial b_{11}}{\partial\mu} + \frac{b_{12}}{a_{12}}\left(\frac{a_{21}}{a_{12}}\frac{\partial a_{12}}{\partial\mu} - \frac{\partial a_{11}}{\partial\lambda} - \xi\frac{\partial a_{11}}{\partial\mu}\right) = 0$$

При этих условиях система (1.2) находится в инволюции с произволом в решении две функции одного аргумента.

*Теорема 2*. С точностью до преобразований эквивалентности система (1.2) имеет решения с функциональным произволом, не редуцируемые к инвариантным, только если матрица $A$ имеет вещественные собственные значения или выполняются условия (3.5).

Ниже рассматривается случай, когда матрица $A$ имеет вещественные собственные значения.

**Замечание.** К анализу решений систем (1.2) с вещественными собственными значениями матрицы $A$ сводится вопрос классификации двойных волн, рассматривавшихся во всех известных автору работах. Во многих из них нет прямого указания на это свойство. Оно вытекает из следующего обстоятельства. При классификации двойных волн делается переход в пространство годографа $x_1 = P(\lambda, \mu, x_3)$, $x_2 = Q(\lambda, \mu, x_3)$, после чего получается вырожденное алгебраическое уравнение второй степени относительно $\partial P/\partial x_3$ и $\partial Q/\partial x_3$, распадающееся на произведение двух линейных форм. Можно показать, что это возможно, только когда матрица $A$ имеет вещественные собственные значения.

Пусть теперь матрица $A$ имеет вещественные собственные значения. Без ограничения общности (в силу преобразований эквивалентности) матрица $A$ предполагается жордановой. Здесь необходимо различать две возможности: матрица $A$ имеет треугольный или диагональный вид. Исследование различных случаев осуществляется в зависимости от значения $\operatorname{rank} G$.

Вначале рассматривается случай $\operatorname{rank} G = 0$, т.е. $G = 0$. Если $a_{12} = 1$, то $a_{22} = a_{11}$ и из соотношений $C = 0$ получаются (3.5). Для $a_{12} = 0$ и нередуцируемых к инвариантным решений аналогично вытекают равенства $a_{21} = b_{12} = b_{21} = 0$ и

$$(a_{22} - a_{11})\frac{\partial b_{11}}{\partial \mu} - (b_{22} - b_{11})\frac{\partial a_{11}}{\partial \mu} = 0 \quad (a_{22} - a_{11})\frac{\partial b_{22}}{\partial \lambda} - (b_{22} - b_{11})\frac{\partial a_{22}}{\partial \lambda} = 0 \tag{3.6}$$

При этих условиях система (1.2) также находится в инволюции с произволом в решении две функции одного аргумента.

Пусть теперь $\operatorname{rank} G = 1$. Если матрица $A$ имеет треугольный вид ($a_{22} = a_{11}$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = 0$), то

$$G = \begin{Vmatrix} b_{21} & b_{22} - b_{11} \\ 0 & -b_{21} \end{Vmatrix}$$

и следовательно, $b_{21} = 0$, $b_{22} - b_{11} \neq 0$. Поэтому матрица $B$ приводится к диагональному виду. Но тогда при помощи преобразования эквивалентности изучение этого случая сводится к случаю, когда матрица $A$ имеет диагональный вид, рассматриваемому ниже.

Для диагональной матрицы $A$ получаем

$$G = (a_{22} - a_{11})\begin{Vmatrix} 0 & -b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{Vmatrix}$$

а так как $\operatorname{rank} G = 1$, то $a_{22} - a_{11} \neq 0$ и $b_{12}b_{21} = 0$. Без ограничения общности ниже считается, что $b_{12} = 0$, $b_{21} \neq 0$.

Тогда первое уравнение (3.1) имеет вид

$$\lambda_1 b_{21}\frac{\partial a_{11}}{\partial \mu} + \mu_1\left[\frac{\partial a_{11}}{\partial \mu}(b_{22} - b_{11}) - \frac{\partial b_{11}}{\partial \mu}\right](a_{22}' - a_{11}) = 0$$

В силу запрета на редукцию, отсюда находим

$$a_{11} = a_{11}(\lambda), \quad b_{11} = b_{11}(\lambda)$$

При этом второе уравнение (3.1) записывается так:

$$\lambda_{11} = a\lambda_1^2 + b\lambda_1\mu_1 \tag{3.7}$$

$$a = \eta^{-1}\left[b_{21}\frac{\partial a_{11}}{\partial \lambda} - (a_{22} - a_{11})\frac{\partial b_{21}}{\partial \lambda}\right], \quad \eta = b_{21}(a_{22} - a_{11})$$

$$b = \eta^{-1}\left[(b_{22} - b_{11})\frac{\partial a_{22}}{\partial \lambda} - b_{21}\frac{\partial a_{22}}{\partial \lambda} - (a_{22} - a_{11})\frac{\partial b_{22}}{\partial \lambda}\right]$$

Если $b \neq 0$, то из соотношений

$$D_3(\lambda_{11} - a\lambda_1^2 - b\lambda_1\mu_1) - D_1D_1(\lambda_3 - a_{11}\lambda_1) = 0$$

$$D_2(\lambda_{11} - a\lambda_1^2 - b\lambda_1\mu_1) - D_1D_1(\lambda_2 - b_{11}\lambda_1) = 0 \tag{3.8}$$

определится производная $\mu_{11}$, а это приводит к решениям только с константным произволом. Поэтому следует считать, что

$$b = 0 \tag{3.9}$$

Тогда в (3.9) исключаются все вторые производные, а относительно $u_1$ они представляют собой две однородные квадратичные формы. Поэтому из запрета на редукцию и из уравнений (3.8) получаем

$$a\frac{\partial a_{11}}{\partial\lambda} + \frac{\partial^2 a_{11}}{\partial\lambda^2} = 0, \quad a\frac{\partial b_{11}}{\partial\lambda} + \frac{\partial^2 b_{11}}{\partial\lambda^2} = 0, \quad \frac{\partial a}{\partial\mu} = 0 \tag{3.10}$$

Уравнения (3.9), (3.10) обеспечивают инволютивность системы (1.2) с произволом в одну функцию одного аргумента, а для определения решения необходимо изучить три случая: а) $a'_{11} \neq 0$, б) $a'_{11} = 0$, $b'_{11} \neq 0$, в) $a'_{11} = 0$, $b'_{11} = 0$.

Если $a'_{11} \neq 0$, то из уравнений (3.10) находим $b_{11} = c_1a_{11} + c_2$ с некоторыми постоянными $c_1$, $c_2$. После линейной замены независимых переменных $x'_1 = x_1 + c_2x_2$, $x'_2 = x_2$, $x'_3 = x_3 + c_1x_2$ для системы (1.2), записанной в новой системе координат, следует, что $b_{11} = 0$.

Из уравнений (1.2) и (3.7) в силу (3.10) с точностью до сдвигов по независимым переменным, получаем: $a_{11}(\lambda) = -x_1/x_3$. После преобразования эквивалентности $\lambda' = -a_{11}(\lambda)$, $\mu' = \mu$ в новых переменных ($\lambda'$, $\mu'$) из (3.10) определяется $a = 0$, что дает $\partial b_{21}/\partial\lambda \neq 0$ и $a_{22} = -\lambda - b_{21}(\partial b_{21}/\partial\lambda)^{-1}$. Здесь и ниже штрих опускается. Интегралом (3.9) будет

$$b_{22} = (a_{22} + \lambda)(-\partial b_{21} / \partial\mu + b_{21}\psi(\mu)) \tag{3.11}$$

с некоторой функцией $\psi(\mu)$. Ввиду преобразования эквивалентности $\lambda' = \lambda$, $\mu' = f(\mu)$ с функцией $f(\mu)$, удовлетворяющей уравнению $f'' + \psi f'^2 = 0$, можно считать в (3.11), что $\psi = 0$. Приводя стандартным приемом [11] оставшиеся два уравнения системы (1.2) к однородной линейной системе, находим ее решение $\Phi(\mu - b_{21}x_2/x_3, b_{21}/x_3) = 0$ с произвольной функцией $\Phi(\xi_1, \xi_2)$, ($\xi_1 = \mu - b_{21}x_2/x_3$, $\xi_2 = b_{21}/x_3$). Если $\Phi_{\xi_2} = 0$, то решение инвариантно. Поэтому следует считать, что $\Phi_{\xi_2} \neq 0$. Наконец, замечаем, что полученное решение имеет дефект $\delta = 1$.

Аналогичным образом изучаются случаи *б* и *в*. Здесь приводится только путь исследования. В них в силу преобразований эквивалентности можно считать, что $a_{11} = 0$, а $b_{11} = -\lambda$ в случае *б* и $b_{11} = 0$ в случае *в*. Следовательно, в обоих случаях $\lambda_{11} = 0$. А так как при этом и $a = -b_{21}^{-1}\partial b_{21}/\partial\lambda = 0$, то $b_{21} = f(\mu)$. Но тогда при помощи преобразования $\lambda' = \lambda$, $\mu' = \int f^{-1}(\mu)d\mu$ элемент $b_{21}$ переводится в $b_{21} = 1$. Чтобы не было редукции к инвариантным решениям, необходимо выполнение условия $a_{22} \neq 0$. Если ввести обозначение $\phi_\lambda = 1/a_{22}$, то из уравнения (3.9) определятся выражения для $b_{22}$, после чего, приводя оставшиеся для уравнения системы (1.2) к однородной линейной системе, находим ее решение.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

*Теорема 3*. Пусть у матрицы $A$ в (1.2) собственные значения вещественные. Тогда системы вида (1.2), имеющие не редуцируемые к инвариантным решения с функциональным произволом, эквивалентны одной из систем:

а) с коэффициентами ($b_{21}(\partial b_{21}/\partial\lambda) \neq 0$)

$$a_{11} = -\lambda, \quad b_{11} = 0, \quad a_{22} = -\lambda - b_{21}\left(\frac{\partial b_{21}}{\partial\lambda}\right)^{-1}, \quad b_{22} = b_{21}\frac{\partial b_{21}}{\partial\mu}\left(\frac{\partial b_{21}}{\partial\lambda}\right)^{-1}$$

и общим решением

$$\lambda = x_1 / x_3, \quad \Phi(\mu - b_{21}x_2 / x_3, b_{21} / x_3) = 0$$

б) с коэффициентами

$$a_{11} = 0, \quad b_{11} = -\lambda, \quad a_{22} = 1 / \phi_\lambda, \quad b_{21} = 1, \quad b_{22} = -\lambda + (\phi_\mu + \psi' e^{-\mu}) / \phi_\lambda$$

и общим решением

$$\lambda = x_1 / x_2, \quad \Phi((x_3 / x_2 + \phi)e^{\mu} + \psi, \quad x_2 e^{-\mu}) = 0$$

в) с коэффициентами

$$a_{11} = 0, \quad b_{11} = 0, \quad a_{22} = 1 / \phi_\lambda, \quad b_{21} = 1, \quad b_{22} = \phi_\mu / \phi_\lambda$$

и общим решением

$$\lambda = x_1, \quad \Phi(\mu - x_2, x_3 + \phi) = 0$$

г) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (3.6), и общим решением, произвол которого равен двум функциям одного аргумента.

Здесь $\Phi = \Phi(\xi_1, \xi_2)$, $\phi = \phi(\lambda, \mu)$, $\psi = \psi(\mu)$ – произвольные функции, $\Phi_{\xi_2} \neq 0$. В случае г система (1.2) называется системой, записанной в инвариантах Римана. В [6] требование записи системы в инвариантах Римана закладывается в определение двойной волны.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-17361).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
2. *Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984. 272 с.
3. *Погодин Ю.Я., Сучков В.А., Яненко Н.Н.* О бегущих волнах уравнений газовой динамики // Докл. АН СССР. 1958. Т. 119. № 3. С. 443–445.
4. *Сидоров А.Ф., Яненко Н.Н.* К вопросу о нестационарных плоских течениях политропного газа с прямолинейными характеристиками // Докл. АН СССР. 1958. Т. 123. № 5. С. 832–834.
5. *Kucharczyk P., Peradzynski Z., Zavistowska E.* Unsteady multidimensional isentropic flows described by linear Riemann invariants // Arch. Mech. 1973. V. 25. № 2. P. 319–350.
6. *Peradzynski Z.* Hyperbolic flows in ideal plasticity // Arch. Mech. 1975. V. 27. № 1. P. 141–156.
7. *Мелешко С.В.* К классификации плоских изэнтропических течений газа типа двойной волны // ПММ. 1985. Т. 49. № 3. С. 406–410.
8. *Мелешко С.В.* О неизэнтропических стационарных пространственных и плоских нестационарных двойных волнах // ПММ. 1989. Т. 53. № 2. С. 255–260.
9. *Мелешко С.В.* Двойные волны в идеальном жестко-пластическом теле при плоской деформации // ПМТФ. 1990. № 2. С. 131–136.
10. *Мелешко С.В.* О решениях с вырожденным годографом квазистационарных уравнений теории пластичности с условием текучести Мизеса // ПМТФ. 1991. № 1. С. 82–88.
11. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. Т. 4. 804 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
11.I.1994