УДК 531.38:532.5

© 1994 г. С.В. Богатырев

МЕДЛЕННЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Рассматривается известная задача о движении твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью. Эта задача описывается сингулярно возмущенной системой дифференциальных уравнений, состоящей из уравнений движения твердого тела и уравнений Навье–Стокса. Малым параметром является число Рейнольдса. Показывается, что для исследования такой системы уравнений может быть применен метод интегральных многообразий [1, 2]. Он позволяет исследование полной сингулярно возмущенной системы заменить исследованием регулярной укороченной системы меньшей размерности, описывающей медленные движения полной системы. Находятся уравнения медленных движений, которые оказываются уравнениями движения твердого тела с дополнительными слагаемыми в правой части, появляющимися в силу учета влияния вязкой жидкости на движение тела.

Ранее в подобной постановке эта задача изучалась [3] методом Вишика–Люстерника [4], а также [5] методом пограничных функций [6]. Используемый ниже метод интегральных многообразий [7] применялся для разделения движений в задаче о вращении проводящего твердого тела в магнитном поле.

1. Описание задачи. Движение твердого тела с полостью D, целиком заполненной вязкой несжимаемой жидкостью плотности ρ и кинематической вязкости ν, в потенциальном поле массовых сил с потенциалом $U(r, t)$ описывается следующей системой уравнений в жестко связанной с телом системе координат x_1, x_2, x_3 [3]:

$$
\begin{aligned}
&dz / dt = k(z,\omega)\\
&I d\omega / dt + \rho (d / dt)\int_D (r\times u)dr = M(z,\omega) - \omega\times I\omega - \omega\times\rho\int_D (r\times u)dr\\
&\partial u / \partial t + \partial(\omega\times r) / \partial t = \nu\Delta u - [\nabla q + (u\nabla)u + 2(\omega\times u)] \qquad (1.1)\\
&\operatorname{div} u = 0 \quad (r\in D), \quad u|_{\partial D} = 0, \quad q = p/\rho + U - (\omega\times r)^2/2 - r d\upsilon / dt
\end{aligned}
$$

Здесь $z = z(t)$ – вектор-функция, компонентами которой являются кинематические параметры, характеризующие ориентацию твердого тела (например, углы Эйлера, или направляющие косинусы), а также (в случае незакрепленного тела) – координаты и скорость центра масс системы, $\omega = \omega(t)$ – вектор абсолютной угловой скорости твердого тела, $u = u(r, t)$ – вектор относительной скорости частиц жидкости, $p = p(r, t)$ – давление в жидкости, $\upsilon = \upsilon(t)$ – абсолютная скорость центра масс системы, r – радиус-вектор данной точки в связанной системе координат, t – время. Далее, $I = I_0 + I_1$, где I_0 – тензор инерции твердого тела, I_1 – тензор инерции жидкости, "отвердевшей" в теле, $M = M(z, \omega)$ – момент внешних сил.

Пусть t_0 – характерное время в движении твердого тела относительно центра масс, l_0 – характерный линейный размер области D. Исследование системы (1.1) будем проводить при условии малости числа Рейнольдса $R = l_0^2 t_0^{-1} \nu^{-1}$ (равного отношению характерного времени $l_0^2 \nu^{-1}$, за которое вязкость существенно изменяет течение в полости, к характерному времени t_0 относительного движения тела). Без ограничения общности можем считать, что $l_0 = 1$, $t_0 = 1$. Тогда, при сделанных предположениях, параметр $\mu \equiv \nu^{-1}$ будет малым, а система (1.1) – сингулярно возмущенной.

2. Переформулировка задачи. Перепишем систему (1.1) в виде следующей системы уравнений:

$$\dot{z} = k(z,\omega), \quad a_{11}\dot{\omega} + a_{12}\dot{u} = f(z,\omega,u) \tag{2.1}$$

$$\mu[a_{21}\dot{\omega} + a_{22}\dot{u}] = Au - \mu\nabla q + \mu g(z,\omega,u) \tag{2.2}$$

Здесь и далее точка означает дифференцирование по времени, переменные $(z, \omega, u) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{L}^2(D)$, где $\mathbb{Z}$ – конечномерное вещественное пространство подходящей размерности, а $\mathbb{L}^2(D)$ – пространство квадратично суммируемых векторов, определенных на области D. Оператор

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\| : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{L}^2(D) \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{L}^2(D)$$

определяется равенствами

$$a_{11}\omega = I\omega, \quad a_{12}u = \rho\int_D (r \times u)dr, \quad a_{21}\omega = \omega \times r, \quad a_{22}u = u \tag{2.3}$$

и является линейным и ограниченным. Оператор $A : \mathrm{L}^2(D) \to \mathbb{L}^2(D) : u \to \Delta u$ имеет область определения

$$D(A) = \{u \in \mathbb{W}_2^2(D) \mid \operatorname{div} u = 0, \quad u|_{\partial D} = 0\}$$

где $\mathbb{W}_2^2(D)$ – пространство Соболева. Наконец, функции f и g определяются равенствами

$$\begin{gathered} f(z,\omega,u) = f_0(z,\omega) - \omega \times a_{12}u, \quad f_0(z,\omega) = M(z,\omega) - \omega \times I\omega \\ g(z,\omega,u) = -2(\omega \times u) - (u\nabla)u \end{gathered} \tag{2.4}$$

и являются гладкими.

Имеет место следующее разложение $\mathbb{L}^2(D)$ в ортогональную прямую сумму [8]:

$$\mathbb{L}^2(D) = \mathbb{S}_n(D) \oplus \mathbb{G}(D)$$

где пространство $\mathbb{S}_n(D)$ получается замыканием по норме пространства $\mathbb{L}^2(D)$ множества гладких, соленоидальных в D векторов, имеющих на ∂D нулевую нормальную компоненту, а пространство $\mathbb{G}(D)$ получается замыканием по норме пространства $\mathbb{L}^2(D)$ множества градиентов гладких в D функций. Пусть $\Pi : \mathbb{L}^2(D) \to \mathbb{L}^2(D)$ – ортогональный проектор на подпространство $\mathbb{S}_n(D)$ [9]. Проектируя уравнение (2.2) на $\mathbb{S}_n(D)$, получим уравнение

$$\mu[\Pi a_{21}\dot{\omega} + a_{22}\dot{u}] = \Pi Au + \mu\Pi g(z,\omega,u) \tag{2.5}$$

Система уравнений (2.1), (2.5) замкнута относительно переменных z, ω, u. Оператор $\Pi A : \mathbb{S}_n(D) \to \mathbb{S}_n(D)$ плотно определен и, как показано в [10], самосопряжен и отрицательно определен. Отметим, что так как область D ограничена, то отсюда будет следовать, что оператор ΠA имеет вещественный дискретный спектр, целиком лежащий в левой полуплоскости $\mathbb{C}^-$, и полную в $\mathbb{S}_n(D)$ систему собственных векторов. Система (2.1), (2.5) будет предметом дальнейшего исследования.

3. Преобразование системы. Приведем систему (2.1), (2.5) к стандартному виду. Для этого введем оператор

$$L = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \Pi a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}_n(D) \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}_n(D)$$

и перепишем систему (2.1), (2.5) в виде

$$\dot z = k(z,\omega) \tag{3.1}$$

$$\mu L \frac{d}{dt}\begin{Vmatrix} \omega \\ u \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Pi A \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \omega \\ u \end{Vmatrix} + \mu \begin{Vmatrix} f(z,\omega,u) \\ \Pi g(z,\omega,u) \end{Vmatrix}$$

Покажем, что оператор L обратим. Прежде всего заметим, что

$$(a_{22} - \Pi a_{21} a_{11}^{-1} a_{12})u = u - \Pi(\rho I^{-1} \int_D (r \times u) dr \times r) \equiv (E - \Pi B)u$$

Последнее равенство используется для определения оператора $B : \mathbb{L}^2(D) \to \mathbb{L}^2(D)$. Было показано [5], что $\| B \| < 1$. Так как Π – проектор, то $\| \Pi B \| < 1$. Поэтому оператор $(E - \Pi B)$ обратим в $\mathbb{L}^2(D)$, а следовательно, и в $\mathbb{S}_n(D)$. Так как операторы a_{11} и a_{22}, очевидно, обратимы, то отсюда будет следовать обратимость L.

Теперь найдем явный вид оператора

$$L^{-1} \equiv \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \Pi b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}_n(D) \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}_n(D)$$

Имеем

$$b_{11} = (a_{11} - a_{12} a_{22}^{-1} \Pi a_{21})^{-1} = J^{-1}, \quad b_{12} = -J^{-1} a_{12} a_{22}^{-1}$$

$$b_{21} = -(a_{22} - \Pi a_{21} a_{11}^{-1} a_{12})^{-1} \Pi a_{21} a_{11}^{-1} = -(E - \Pi B)^{-1} \Pi a_{21} I^{-1} \tag{3.2}$$

$$b_{22} = (E - \Pi B)^{-1}$$

(первое равенство служит для определения оператора $J : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$).

Отметим для дальнейшего, что

$$b_{22}^{-1} b_{21} = -\Pi a_{21} I^{-1}, \quad b_{12} b_{22}^{-1} = -I^{-1} a_{12}, \quad b_{11} - b_{12} b_{22}^{-1} b_{21} = I^{-1} \tag{3.3}$$

Теперь можно систему (3.1) записать в стандартном виде

$$\dot z = k(z,\omega), \quad \mu\dot\omega = \xi_1, \quad \mu\dot u = \xi_2 \tag{3.4}$$

$$\xi_k = b_{k2} \Pi A u + \mu[b_{k1} f(z,\omega,u) + b_{k2} \Pi g(z,\omega,u)], \quad k = 1,2$$

4. Схема построения интегрального многообразия и уравнения медленных движений. Пусть сингулярно возмущенная система

$$\dot x = F(x,y,\mu), \quad \mu\dot y = G(x,y,\mu) \tag{4.1}$$

удовлетворяет следующим двум условиям:

1) порождающее уравнение $G(x, y, 0) = 0$ имеет изолированное решение $y = h_0(x)$,

2) на изолированном решении $y = h_0(x)$ для каждого x имеет место следующее условие устойчивости:

$$\operatorname{spec}\left(\frac{\partial}{\partial y} G(x, h_0(x), 0)\right) \subset \mathbb{C}^- \tag{4.2}$$

Тогда [1, 2] система (4.1) имеет инвариантное многообразие $y = h(x, \mu)$, лежащее в некоторой окрестности поверхности $y = h_0(x)$ и удовлетворяющее условию устойчивости и принципу сведения.

Условие устойчивости. Решения системы (4.1), начинающиеся вблизи многообразия $y = h(x, \mu)$, представимы в виде суммы некоторого решения, лежащего на многообразии $y = h(x, \mu)$, и малой экспоненциально убывающей добавки. Движение по многообразию $y = h(x, \mu)$ осуществляется в соответствии с уравнением

$$\dot{x} = F(x, h(x, \mu), \mu), \quad y = h(x, \mu) \tag{4.3}$$

которое называется уравнением медленных движений (УМД).

Принцип сведения [11]. Задачи об устойчивости для уравнений (4.1) и (4.3) эквивалентны. Если, в частности, $F(0, 0, \mu) = 0$, $G(0, 0, \mu) = 0$, то $h(0, \mu) = 0$ и нулевое решение уравнений (4.1) устойчиво (асимптотически устойчиво, неустойчиво) тогда и только тогда, когда аналогичным свойством обладает нулевое решение уравнения (4.3).

Инвариантное многообразие $y = h(x, \mu)$ называется интегральным многообразием (медленных движений) системы (4.1). Приведенные свойства интегрального многообразия позволяют свести исследование исходной системы (4.1) к исследованию системы (4.3).

Функция $h(x, \mu)$ может быть найдена в виде асимптотического разложения

$$h(x, \mu) = h_0(x) + \mu h_1(x) + \mu^2 h_2(x) + \ldots$$

из уравнения

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} F(x, h, \mu) = G(x, h, \mu) \tag{4.4}$$

5. Уравнения медленных движений. Если в (3.4) заменить u на μu, то получим систему, в которой уравнения для z, ω регулярные, а уравнение для u – сингулярно возмущенное. Положив $\mu = 0$ в этом уравнении для u, получим порождающее уравнение

$$b_{22}\Pi(Au + g(z, \omega, 0)) + b_{21} f(z, \omega, 0) = 0 \tag{5.1}$$

Так как оператор ΠA обратим, то это уравнение имеет единственное решение. Используя соотношения (2.4), (3.3), представим это решение в виде

$$u = h_0(z, \omega) = (\Pi A)^{-1} \Pi a_{21} I^{-1} f_0(z, \omega) \tag{5.2}$$

Условие (4.2) в рассматриваемом случае должно иметь вид

$$\operatorname{spec}(b_{22}\Pi A) \subset \mathbb{C}^-$$

Так как оператор b_{22} обратим, то спектр оператора $b_{22}\Pi A$ совпадает со спектром оператора ΠA, а следовательно, лежит в левой полуплоскости $\mathbb{C}^-$. Поэтому условие (4.2) выполняется.

Таким образом, система (3.4) имеет интегральное многообразие медленных движений, которое может быть найдено в виде $u = \mu h(z, \omega, \mu)$ из уравнения

$$\begin{aligned} b_{22}\Pi A h = {} & -b_{21} f_0 + \mu[2b_{22}\Pi(\omega \times h) + b_{21}(\omega \times a_{12} h) + \\ & + \left(E + \mu \frac{\partial h}{\partial \omega} I^{-1} a_{12}\right)^{-1} \left(\frac{\partial h}{\partial z} k + \frac{\partial h}{\partial \omega} I^{-1} f_0\right)\Bigg] + \\ & + \mu^2 \left[b_{22}(h\nabla)h - \left(E + \mu \frac{\partial h}{\partial \omega} I^{-1} a_{12}\right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial \omega} I^{-1}(\omega \times a_{12} h) \right] \end{aligned} \tag{5.3}$$

(использованы представления (2.4)).

Разыскивая решение этого уравнения в виде

$$h(z, \omega, \mu) = h_0(z, \omega) + \mu h_1(z, \omega) + \ldots \tag{5.4}$$

для $h_0(z, \omega)$ получим представление (5.2), а для h_1 получим выражение

$$h_1(z,\omega) = (\Pi A)^{-1}[2\Pi(\omega \times h_0) - \Pi a_{21} I^{-1}(\omega \times a_{12} h_0) +$$
$$+(\Pi A)^{-1}\Pi a_{21} I^{-1}\left(\frac{\partial f_0}{\partial z}k + \frac{\partial f_0}{\partial z} I^{-1} f_0\right)\Bigg]$$

Аналогичным образом могут быть найдены остальные коэффициенты $h_k(z, \omega)$ в разложении (5.4).

Из (4.4) следует, что УМД для системы (3.4) будет иметь вид

$$\dot{z} = k(z,\omega), \quad \dot{\omega} = b_{11} f(z,\omega,\mu h) + b_{12}\Pi g(\dot{z},\omega,\mu h) + b_{12}\Pi A h$$

Подставляя сюда вместо $\Pi A h$ выражение из (5.3), получим для ω уравнение

$$I\dot{\omega} = f_0 - \mu\left[(\omega \times a_{12} h) + a_{12}\left(E + \mu \frac{\partial h}{\partial \omega} I^{-1} a_{12}\right)^{-1}\left(\frac{\partial h}{\partial z}k + \frac{\partial h}{\partial \omega} I^{-1} f_0\right)\right] +$$
$$+\mu^2\left[a_{12}\left(E + \mu \frac{\partial h}{\partial \omega} I^{-1} a_{12}\right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial \omega} I^{-1}(\omega \times a_{12} h)\right] \tag{5.5}$$

Подставляя сюда вместо h разложение (5.4), раскладывая по степеням μ, вводя обозначение

$$P = -\rho^{-1} a_{12}(\Pi A)^{-1}\Pi a_{21} \tag{5.6}$$

используя представление (5.2), получим УМД системы (3.4), а значит, и системы (1.1) в виде

$$\dot{z} = k(z,\omega) \tag{5.7}$$
$$I\dot{\omega} = f_0 + \mu\rho\left[\omega \times P I^{-1} f_0 + P I^{-1}\left(\frac{\partial f_0}{\partial z}k + \frac{\partial f_0}{\partial \omega} I^{-1} f_0\right)\right] + O(\mu^2)$$

Уравнения (5.7) совпадают с полученными ранее [3, 5]. Здесь УМД (5.7) выписаны с точностью до членов $O(\mu^2)$, но пользуясь уравнением для интегрального многообразия (5.3) и уравнением (5.5) для ω, легко выписать УМД с любой степенью точности.

6. Свойства оператора P. Докажем, что оператор P, определенный по формуле (5.6), самосопряженный и положительно определенный. Отсюда будет следовать, в частности, что в некоторой системе координат матрица оператора P диагональна и имеет положительные значения на главной диагонали.

Прежде всего заметим, что оператор $\Pi a_{21} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{S}_n(D)$ можно представить в виде

$$(\Pi a_{21})\omega = \omega \times r + \Psi(r)\omega$$

где $\Psi(r) = \mathrm{mat}[\nabla\psi_1, \nabla\psi_2, \nabla\psi_3]$ – матрица (в системе координат x_1, x_2, x_3), столбцами которой будут векторы $\nabla\psi_k$, а функции ψ_k – решения задачи Стокса–Жуковского [12]

$$\Delta\psi_k = 0, \quad \partial\psi_k / \partial n + (e_k \times r, n)|_{\partial D} = 0 \quad (k = 1,2,3)$$

где e_k – орты системы координат x_1, x_2, x_3. Оператор $(\Pi A)^{-1} : \mathbb{S}_n(D) \to \mathbb{S}_n(D)$ является биективным, самосопряженным, отрицательно определенным [10], а $(\Pi A)^{-1}u = w$ в случае, если w – решение задачи

$$-\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, w = u, \quad \mathrm{div}\, w = 0 \quad (r \in D), \quad w|_{\partial D} = 0$$

Наконец, напомним, что оператор $a_{12} : \mathbb{S}_n(D) \to \mathbb{R}^3$ определяется равенством (2.3).

Далее, для всех $u \in \mathbb{S}_n(D)$ и $\omega \in \mathbb{R}^3$ имеем

$$(\rho^{-1}a_{12}u, \omega) = \int_D (r \times u, \omega)dr = \int_D (\omega \times r, u)dr =$$

$$= \int_D (\Pi(\omega \times r), u)dr - \int_D (\Psi(r)\omega, u)dr = (u, \Pi a_{21}\omega)$$

Это означает, что $(\rho^{-1}a_{12})^* = \Pi a_{21}$, где звездочка означает переход к сопряженному оператору. Отсюда и из самосопряженности оператора ΠA следует самосопряженность оператора P.

Далее, для всех $\omega \in \mathbb{R}^3$, $\omega \neq 0$ имеем

$$(P\omega, \omega) = -(\Omega, \Pi A\Omega) = (\Omega, \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\Omega) =$$

$$= \|\mathrm{rot}\,\Omega\|^2 + \int_{\partial D} (\Omega, n \times \mathrm{rot}\,\Omega)ds = \|\mathrm{rot}\,\Omega\|^2 > 0 \quad (\Omega = (\Pi A)^{-1}\Pi a_{21}\omega)$$

Это означает, что оператор P положительно определен.

Отметим, что в преобразованиях разд. 6 одним и тем же символом $(\cdot, \cdot)$ обозначали скалярное произведение как в пространстве $\mathbb{R}^3$, так и в пространстве $\mathbb{L}^2(D)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука. 1973. 512 с.
2. *Стрыгин В.В., Соболев В.А.* Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988. 256 с.
3. *Черноусько Ф.Л.* Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1965. Т. 5. № 6. С. 1049–1070.
4. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук, 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
5. *Кобрин А.И.* К задаче о движении тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, относительно центра масс в потенциальном поле массовых сил // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 3. С. 431–440.
6. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
7. *Богатырев С.В., Соболев В.А.* Разделение быстрых и медленных движений в задачах динамики систем твердых тел и гироскопов // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 1. С. 47–54.
8. *Быховский Э.Б., Смирнов Н.В.* Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично-суммируемых по заданной области и операторах векторного анализа // Тр. Мат. Ин-та им. В.А. Стеклова. 1960. Т. 59. С. 5–36.
9. *Крейн С.Г.* О функциональных свойствах операторов векторного анализа и гидродинамики // Докл. АН СССР. 1953. Т. 93. № 6. С. 969–972.
10. *Юдович В.И.* Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов: Изд-во Рост. ун-та, 1984. 191 с.
11. *Плисс В.А.* Принцип сведения в теории устойчивости движения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т. 28. № 6. С. 1297–1324.
12. *Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.

Самара

Поступила в редакцию
9.XI.1993