УДК 531.38

© 1994 г. Н.Н. Болотник

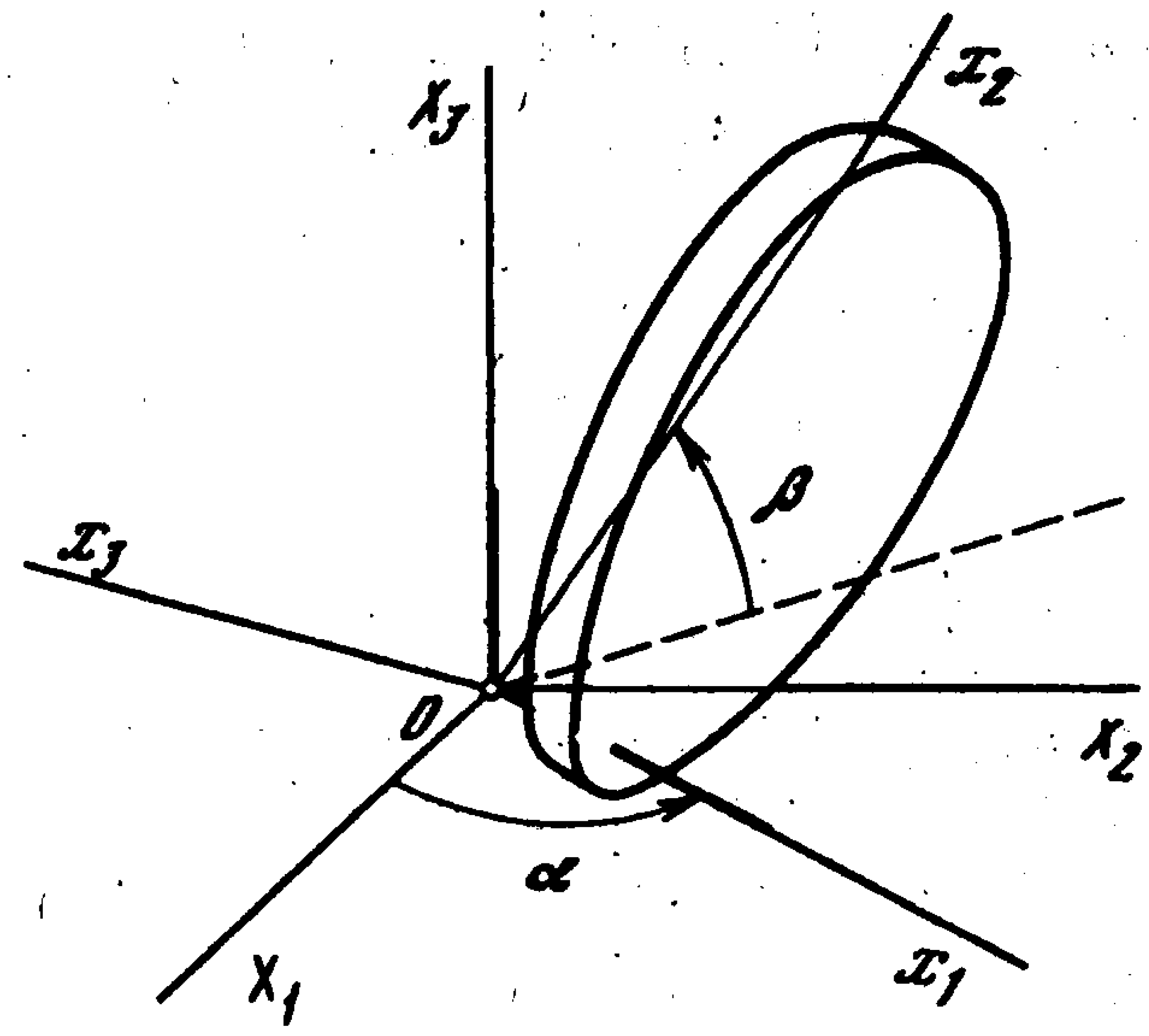
О ДВИЖЕНИИ ПО ИНЕРЦИИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ДВУХСТЕПЕННОМ ШАРНИРЕ

Выводятся уравнения движения абсолютно твердого тела, закрепленного на двухстепенном шарнире. Исследуется поведение этой системы в частном случае, когда внешние силы, за исключением сил реакции в шарнире, отсутствуют. Выявлены возможные типы движений, реализующиеся в зависимости от соотношений между компонентами тензора инерции твердого тела и значениями первых интегралов системы (кинетической энергии и проекции момента импульса на неподвижную ось шарнира). Приводятся качественные и некоторые количественные характеристики указанных движений.

В работах, посвященных динамике абсолютно твердого тела с неподвижной точкой, считается, что рассматриваемая механическая система имеет три степени свободы. Такая ситуация, в частности, реализуется, когда тело закреплено на неподвижном основании посредством шарового шарнира. Вместе с тем в технических системах часто встречается случай крепления твердого тела к основанию при помощи двухстепенного шарнира, состоящего из неподвижной и подвижной осей, которые, как правило, взаимно перпендикулярны. В этом случае система имеет две степени свободы, однако множество кинематически возможных движений остается достаточно богатым. В настоящей статье исследуется движение такой системы по инерции, т.е. в отсутствие внешних сил, за исключением реакции в шарнире. Отметим, что движение по инерции других механических систем с двумя степенями свободы исследовалось рядом авторов. По методике исследования предлагаемая работа близка к [1, 2], где изучалось движение по инерции плоского двузвенника (шарнирной связки двух твердых тел), у которого ось одного из шарниров неподвижна в инерциальной системе отсчета.

1. Уравнения движения. Рассмотрим абсолютно твердое тело, связанное с неподвижным основанием посредством двухстепенного шарнира со взаимно перпендикулярными осями (фиг. 1). Шарнир считается идеальным, т.е. трение в его осях не учитывается. Для описания движения введем две правые декартовы системы координат: неподвижную (инерциальную) систему $X_1X_2X_3$ и систему $x_1x_2x_3$, жестко связанную с твердым телом. Полюсы обеих систем координат поместим в точке O пересечения осей шарнира, оси X_3 и x_1 направим вдоль неподвижной и подвижной осей шарнира соответственно. Все кинематически возможные положения твердого тела (подвижной системы координат $x_1x_2x_3$) относительно неподвижной системы координат $X_1X_2X_3$ можно описать при помощи двух углов: угла α между осями X_1 и x_1 и угла β между осью x_2 и плоскостью X_1X_2. Углы α и β, которые принимаются за обобщенные координаты системы, можно трактовать как углы двух последовательных поворотов, при помощи которых можно привести твердое тело из исходного положения ($\alpha = \beta = 0$, подвижная система координат совпадает с неподвижной) в текущее. Первый поворот (на угол α) производится вокруг оси X_3 (неподвижной оси шарнира) и описывается матрицей

$$\Gamma_\alpha = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$



Фиг. 1

Второй поворот (на угол β) осуществляется вокруг подвижной оси шарнира x_1 и соответствует матрице

$$\Gamma_\beta = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{Vmatrix}$$

Матрица перехода от системы координат $X_1X_2X_3$ к системе координат $x_1x_2x_3$ определяется следующим образом: $\Gamma = \Gamma_\beta\Gamma_\alpha$.

Обозначим через ω_i проекцию вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ вращения твердого тела на ось x_i ($i = 1, 2, 3$). Кинематические уравнения, выражающие величины ω_i через обобщенные координаты α, β и скорости $\dot\alpha, \dot\beta$, имеют вид

$$\omega_1 = \dot\beta, \quad \omega_2 = \dot\alpha\sin\beta, \quad \omega_3 = \dot\alpha\cos\beta \tag{1.1}$$

Уравнения (1.1) могут, в частности, быть выведены непосредственно из матрицы Γ, а именно (см., например, [3])

$$\omega_1 = (\Gamma\dot\Gamma')_{32}, \quad \omega_2 = (\Gamma\dot\Gamma')_{13}, \quad \omega_3 = (\Gamma\dot\Gamma')_{21}$$

Здесь $(\Gamma\dot\Gamma')_{ij}$ – соответствующие элементы матрицы $\Gamma\dot\Gamma'$, штрих означает транспонирование, а точка – производную по времени.

Кинетическая энергия движения твердого тела с неподвижной точкой имеет вид

$$T = \tfrac{1}{2}(J\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}), \quad \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \tag{1.2}$$

где J – тензор инерции тела относительно неподвижной точки. Раскрыв скалярное произведение в (1.2) с учетом (1.1), получим:

$$T = \tfrac{1}{2}K(\beta)\dot\alpha^2 + \tfrac{1}{2}J_{11}\dot\beta^2 - b(\beta)\dot\alpha\dot\beta \tag{1.3}$$

$$K(\beta) = J_{22}\sin^2\beta + J_{33}\cos^2\beta - 2J_{23}\sin\beta\cos\beta$$

$$b(\beta) = J_{12}\sin\beta + J_{13}\cos\beta$$

Здесь J_{ii} ($i = 1, 2, 3$) – осевые моменты инерции, а $J_{ij} = J_{ji}$ ($i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$) – центробежные моменты инерции твердого тела в системе координат $x_1x_2x_3$. В дальнейшем предполагается, что эллипсоид инерции твердого тела – невырожденный и тензор инерции J – положительно-определенный.

Уравнения Лагранжа, соответствующие (1.3), имеют вид:

$$K(\beta)\ddot\alpha - b(\beta)\ddot\beta + [(J_{22} - J_{33})\sin 2\beta - 2J_{23}\cos 2\beta]\dot\alpha\dot\beta - (J_{12}\cos\beta - J_{13}\sin\beta)\dot\beta^2 = Q_\alpha \tag{1.4}$$

$$-b(\beta)\ddot\alpha + J_{11}\ddot\beta - \tfrac{1}{2}[(J_{22} - J_{33})\sin 2\beta - 2J_{23}\cos 2\beta]\dot\alpha^2 = Q_\beta$$

Здесь Q_α и Q_β – обобщенные силы, отвечающие обобщенным координатам α и β – соответственно. С физической точки зрения, Q_α и Q_β – моменты активных сил, действующих на твердое тело, относительно осей X_3 и x_1 соответственно.

2. Движение по инерции ($Q_\alpha = Q_\beta = 0$). В рассматриваемом случае система уравнений (1.4) имеет два первых интеграла. Такими интегралами являются кинетическая энергия T (1.3) и величина

$$L = \partial T / \partial\dot{\alpha} = K(\beta)\dot{\alpha} - b(\beta)\dot{\beta} \tag{2.1}$$

Этот факт можно усмотреть из общих теорем механики, не обращаясь к уравнениям Лагранжа. Сохранение кинетической энергии вытекает из того, что рассматриваемая механическая система голономная и склерономная, а действующие на нее обобщенные силы равны нулю. Сохранение величины L (2.1) есть следствие цикличности обобщенной координаты α. Величина L представляет собой проекцию кинетического момента $J\boldsymbol{\omega}$ системы на неподвижную ось X_3.

Разрешив (3.1) относительно $\dot{\alpha}$ и подставив получившееся выражение в (2.3), будем иметь

$$a(\beta)\dot{\beta}^2 / 2 + \Pi(\beta, L) = T \tag{2.2}$$

$$a(\beta) = [(J_{11}J_{22} - J_{12}^2)\sin^2\beta + (J_{11}J_{33} - J_{13}^2)\cos^2\beta -$$

$$-2(J_{11}J_{23} + J_{12}J_{13})\sin\beta\cos\beta] / K(\beta), \quad \Pi(\beta, L) = L^2 / (2K(\beta))$$

$$a > 0, \quad K > 0$$

Неравенства $a > 0$, $K > 0$ вытекают из положительной определенности тензора инерции твердого тела.

Действительно, непосредственная проверка показывает, что выражения для a и K можно записать в виде скалярных произведений

$$a = (J\mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad K = (J\mathbf{v}, \mathbf{v})$$

$$\mathbf{u} = \|1, b(\beta)\sin\beta / K(\beta), \ b(\beta)\cos\beta / K(\beta)\|, \quad \mathbf{v} = \|0, \sin\beta, \cos\beta\|$$

которые положительны вследствие положительной определенности тензора инерции J. Положительность a и K усматривается также из того факта, что $\Pi = L^2/(2K)$ – кинетическая энергия тела при $\dot{\beta} = 0$, а $a\dot{\beta}^2/2$ – кинетическая энергия при $L = 0$. Так как кинетическая энергия твердого тела с невырожденным эллипсоидом инерции положительна при $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, то $a > 0$ и $K > 0$.

Уравнение (2.2) описывает изменение угла β и сводится к квадратуре

$$\int_{\beta_0}^{\beta} \left\{ \frac{a(\xi)}{2[T - \Pi(\xi, L)]} \right\}^{1/2} d\xi = \pm(t - t_0) \tag{2.3}$$

где $\beta_0 = \beta(t_0)$, а t_0 – некоторый момент времени, принятый за начальный. Знак в правой части (2.3) совпадает со знаком $\dot{\beta}$ при $\dot{\beta} \neq 0$ или со знаком выражения $-\partial\Pi/\partial\beta$ при $\dot{\beta} = 0$. Отметим, что интеграл в левой части (2.3) может быть выражен в терминах элементарных и эллиптических функций.

С геометрической точки зрения, уравнение (2.2) описывает проекцию фазовой траектории системы (1.4) при $Q_\alpha = Q_\beta = 0$ на фазовую плоскость β, $\dot{\beta}$, отвечающую обобщенной координате β. Из (2.2) вытекает, что движение по угловой переменной β аналогично движению консервативной механической системы с одной степенью свободы с кинетической энергией $a(\beta)\dot{\beta}^2/2$ и потенциальной энергией $\Pi(\beta, L)$. Постоянная T при этом есть аналог полной механической энергии системы с одной степенью свободы. Поэтому качественно движение по переменной β можно исследовать, используя метод фазовой плоскости, как это делается при построении фазовых траекторий консервативной системы с одной степенью свободы.

Исследуем сначала приведенную потенциальную энергию $\Pi(\beta, L)$ как функцию β на отрезке $0 \leqslant \beta \leqslant 2\pi$. Переходя к двойному аргументу 2β, выражение (2.2) для Π можно представить в виде

$$\Pi(\beta, L) = L^2/(2K), \quad 2K = J_{22} + J_{33} + R\cos(2\beta + \nu) \tag{2.4}$$

$$\cos\nu = (J_{33} - J_{22})/R, \quad \sin\nu = 2J_{23}/R$$

$$R = [(J_{33} - J_{22})^2 + 4J_{23}^2]^{1/2}$$

Рассмотрим случай, когда равенства $J_{33} = J_{22}$, $J_{23} = 0$ не выполняются одновременно. Из (2.4) вытекает, что функция $\Pi(\beta, L)$ при $L \neq 0$ имеет на отрезке $0 \leqslant \beta \leqslant 2\pi$ четыре точки экстремума $\beta = \beta_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), совпадающие с точками экстремума функции $\cos(2\beta + \nu)$:

$$\beta_i = \{-\arccos[(J_{33} - J_{22})/R] + \pi i\}/2, \quad J_{23} > 0 \tag{2.5}$$

$$\beta_i = \{\arccos[(J_{33} - J_{22})/R] + \pi(i-1)\}/2, \quad J_{23} < 0$$

$$\beta_i = \pi(i-1)/2, \quad J_{23} = 0; \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Если $J_{23} > 0$ ($J_{23} < 0$), то в точках β_1 и β_3 функция $\Pi(\beta, L)$ достигает максимума (минимума), а в точках β_2 и β_4 – минимума (максимума). Если $J_{23} = 0$ и $J_{22} > J_{33}$ ($J_{22} < J_{33}$), то β_1 и β_3 – точки максимума (минимума), а β_2 и β_4 – точки минимума (максимума) функции $\Pi(\beta, L)$. В точках экстремумов (2.5) имеем

$$\Pi(\beta_i, L) = L^2(J_{22} + J_{33} \mp R)^{-1} \tag{2.6}$$

где знак минус перед R отвечает максимуму, а плюс – минимуму. Во всех точках максимума (минимума) функция $\Pi(\beta, L)$ принимает одно и то же значение, которое в дальнейшем обозначается Π_{max} (соответственно Π_{min}).

Из (2.2) вытекает, что $T - \Pi(\beta, L) \geqslant 0$ и, следовательно, при учете (2.6), значения первых интегралов T и L связаны неравенством $T \geqslant \Pi_{min}(L^2)$.

На фиг. 2 иллюстрируется метод построения фазовых траекторий на плоскости β, $\dot\beta$ и изображены фазовые кривые, отвечающие различным соотношениям между T и L^2. Кривая *1* соответствует $T > \Pi_{max}$, кривая *2* – $T = \Pi_{max}$, кривая *3* – $\Pi_{min} < T < \Pi_{max}$.

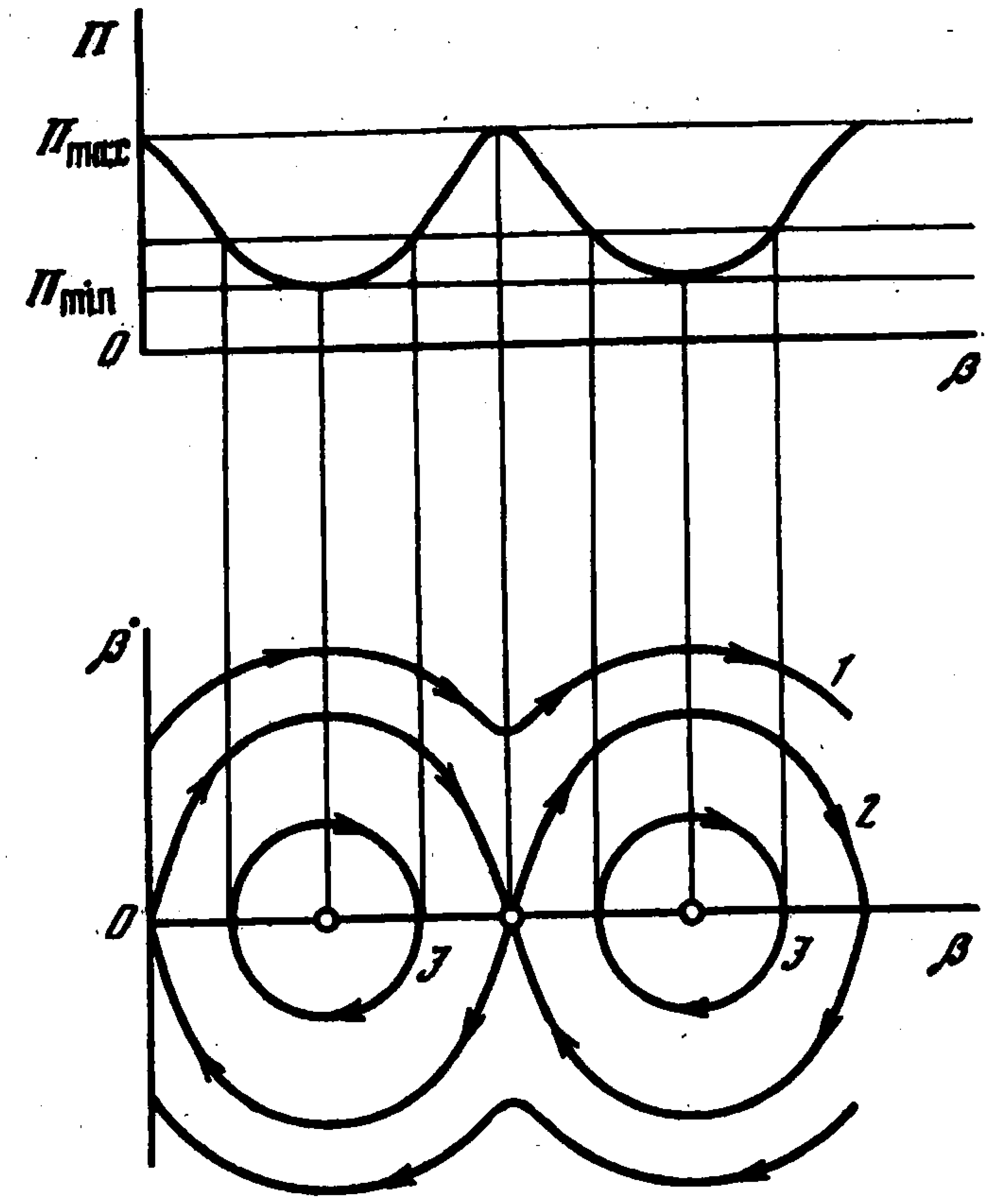
Если $\Pi_{min} < T < \Pi_{max}$, то по углу β твердое тело совершает периодические колебания около точек β_i (см. (2.5)), отвечающих минимуму приведенной потенциальной энергии $\Pi(\beta, L)$. Период τ_υ этих колебаний равен удвоенному значению интеграла в левой части равенства (2.3), если положить $\beta_0 = \beta_-$, $\beta = \beta_+$ где β_- и β_+ – два последовательных значения угла β, при которых угловая скорость $\dot\beta$ обращается в нуль и между которыми лежит точка минимума функции $\Pi(\beta, L)$:

$$\tau_\upsilon = 2\int_{\beta_-}^{\beta_+} \left\{\frac{a(\beta)}{2[T - \Pi(\beta, L)]}\right\}^{1/2} d\beta, \quad \beta_- < \beta_i < \beta_+ \tag{2.7}$$

Значения β_- и β_+ находятся из уравнения $\Pi(\beta, L) - T = 0$, где $\Pi(\beta, L)$ определяется соотношениями (2.4). Решение этого уравнения дает

$$\beta_\mp = \beta_i \mp A, \quad A = \frac{1}{2}\arccos\frac{L^2 - T(J_{22} + J_{33})}{TR} \tag{2.8}$$

откуда следует, что амплитуда рассматриваемых колебаний равна A.



Фиг. 2

Если $T > \Pi_{max}$, то угол β изменяется монотонно, что отвечает вращательному движению тела вокруг подвижной оси x_1. Это вращение периодично, с периодом

$$\tau_r = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{a(\beta)}{2[T - \Pi(\beta, L)]} \right\}^{1/2} d\beta \qquad (2.9)$$

При $T = \Pi_{max}$ изображающая точка системы движется по сепаратрисе, а при $T = \Pi_{min}$ фазовые траектории вырождаются в точки ($\beta = \beta_i$, $\dot{\beta} = 0$), что отвечает движению с постоянным значением угла $\beta = \beta_i$, при котором функция $\Pi(\beta, L)$ достигает минимума. В случае $T = \Pi_{max}$ также возможны движения с постоянным значением $\beta = \beta_i$, при котором функция $\Pi(\beta, L)$ достигает максимума. Как следует из (2.1), если $\beta = \beta_i = \text{const}$, то скорость изменения угла α постоянна и равна

$$\dot{\alpha} = 2\Pi / L = 2T / L = 2L(J_{22} + J_{33} \mp R)^{-1} \qquad (2.10)$$

Это означает, что твердое тело равномерно вращается с угловой скоростью (2.10) вокруг неподвижной оси X_3, а его подвижная ось x_2 наклонена под постоянным углом $\beta = \beta_i$ к плоскости X_1X_2. Из теории Рауса (см. также фиг. 2) следует, что если β_i отвечает $\Pi(\beta_i, L) = \Pi_{min}$, то такое движение устойчиво по переменным β, $\dot{\beta}$. Если $\Pi(\beta_i, L) = \Pi_{max}$, то движение неустойчиво.

Отметим, что величина $K = K(\beta)$, определенная в (1.3) и фигурирующая в формулах (2.2), (2.4) для функции $\Pi(\beta, L)$, есть момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси X_3, если подвижная ось x_2 составляет угол β с координатной плоскостью X_1X_2. Действительно, момент инерции I_e твердого тела относительно произвольной оси (с ортом $\mathbf{e}$), проходящей через точку O, выражается через тензор инерции J:

$$I_e = (J\mathbf{e}, \mathbf{e}) \qquad (2.11)$$

При вычислении I_e тензор инерции J и орт $\mathbf{e}$ должны быть представлены в одной и той же системе координат. В рассматриваемом случае $\mathbf{e}$ – орт оси X_3, имеющий в подвижной системе отсчета $x_1x_2x_3$ следующее координатное представление:

$$\mathbf{e} = (0, \sin\beta, \cos\beta) \tag{2.12}$$

Подставляя (2.12) в (2.11), получим $I_e = K(\beta)$. В соответствии с этим минимизация (максимизация) функции $\Pi(\beta, L)$ в (2.2) эквивалентна максимизации (минимизации) момента инерции твердого тела относительно оси X_3.

Из изложенного вытекает, что твердое тело, закрепленное на двухстепенном шарнире, в отсутствие внешних активных сил может равномерно вращаться вокруг неподвижной оси X_3 только в таких положениях, когда момент инерции тела относительно этой оси либо максимален, либо минимален. В случае максимального момента инерции данное движение устойчиво, а в случае минимального – неустойчиво.

Замечание. Выше из рассмотрения был исключен случай, когда одновременно выполнены соотношения $J_{22} = J_{33}, J_{23} = 0$. В этом случае выражения для $a(\beta)$, $\Pi(\beta, L)$ и $K(\beta)$ в (2.2) существенно упрощаются:

$$a(\beta) = [J_{11}J_{22} - b^2(\beta)]/J_{22}, \quad \Pi(\beta, L) = L^2/(2J_{22}), \quad K(\beta) = J_{22}$$

Функции $\Pi(\beta, L)$ и $K(\beta)$ здесь постоянны и от β не зависят. Напомним, что $K(\beta)$ – момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси X_3, и постоянство этой величины означает, что указанный момент инерции остается неизменным при всех возможных конфигурациях системы. В рассматриваемом частном случае возможны только два качественно различных типа движения. Если $T - \Pi = T - L^2/(2J_{22}) > 0$, то по углу β происходят периодические вращения, период которых определяется формулой (2.9). Если $T - L^2/(2J_{22}) = 0$, то любые постоянные значения угла β (и только они) удовлетворяют дифференциальному уравнению (2.2). При этом твердое тело равномерно вращается вокруг оси X_3 с угловой скоростью $\dot{\alpha} = L/J_{22}$. В отличие от общего случая, такое вращение возможно при произвольном наклоне подвижной оси x_2 к плоскости X_1X_2. Колебательные движения по углу β при $J_{22} = J_{33}$, $J_{23} = 0$ невозможны.

Исследуем теперь движение по координате α. Разрешив (2.1) относительно $\dot{\alpha}$, получим

$$\dot{\alpha} = L / K(\beta) + b(\beta)\dot{\beta} / K(\beta) \tag{2.13}$$

где $K(\beta)$ определяется соответствующими равенствами (1.3) или (2.4). Отметим здесь, что $K(\beta)$ – периодическая функция с периодом π.

В принципе из уравнения (2.13) с использованием равенства (2.3) можно найти угол α в виде явной функции времени. Для этого надо из (2.3) выразить β как функцию времени, подставить $\beta(t)$ в (2.13) и от обеих частей (2.13) взять интеграл по времени в пределах от t_0 (начальный момент времени) до t (текущий момент времени). Однако в общем случае это можно сделать только численно, поскольку интегралы, с которыми приходится иметь дело, в частности интеграл (2.3), не выражаются в терминах функций, удобных для аналитического исследования. Ограничимся поэтому только качественным исследованием характера движения по координате α.

Рассмотрим сначала случай, когда $T > \Pi_{max}$, и система совершает периодическое вращение по углу β и с периодом τ_r, см. (2.9). Докажем вспомогательное утверждение.

Утверждение. Пусть $f(x)$ – интегрируемая периодическая функция периода π. Тогда для любого x справедливы равенства

$$\int_x^{x+2\pi} f(\xi)\sin\xi d\xi = 0, \qquad \int_x^{x+2\pi} f(\xi)\cos\xi d\xi = 0 \tag{2.14}$$

Докажем первое из равенств (2.14), второе доказывается аналогично. Представим интеграл (2.14) в виде суммы двух слагаемых, разбивая отрезок интегрирования точкой $x + \pi$. Сделав в интеграле по отрезку $[x + \pi, x + 2\pi]$ замену переменной $\xi = \eta + \pi$ и учитывая свойства функций $f(\eta)$ и $\sin\eta$, получим

$$\int\limits_{x+\pi}^{x+2\pi} f(\xi)\sin\xi d\xi = -\int\limits_{x}^{x+\pi} f(\xi)\sin\xi d\xi$$

откуда следует первое равенство (2.14)

Проинтегрируем уравнение (2.13) по t от t_0 до $t_0 + n\tau_r$, где τ_r – период вращения по углу β, а n – произвольное натуральное число. При учёте равенств (см. (2.3))

$$\dot\beta dt = d\beta, \quad dt = \pm\{a(\beta) / [2(T - \Pi(\beta, L))]\}^{1/2} d\beta \tag{2.15}$$

после преобразований получим

$$\alpha(t_0 + n\tau_r) - \alpha(t_0) = n[L\Omega(T, L) \pm B] \tag{2.16}$$

$$\Omega(T, L) = \int\limits_0^{2\pi} F(T, L, \beta)d\beta, \quad B = \int\limits_0^{2\pi} \frac{b(\beta)}{K(\beta)} d\beta$$

$$F(T, L, \beta) = \frac{1}{K(\beta)}\left[\frac{K(\beta)J_{11} - b^2(\beta)}{2K(\beta)T - L^2}\right]^{1/2}$$

Двойной знак ($\pm$) в (2.15), (2.16) отражает тот факт, что направление вращения твердого тела вокруг подвижной оси x_1 может быть различным. Положительному направлению (против часовой стрелки, если смотреть из конца орта оси x_1) отвечает знак плюс, отрицательному – минус.

Из доказанного выше утверждения вытекает, что $B = 0$. Отсюда следует, что если $L \neq 0$, то при условии $T > \Pi_{max}$ (вращение по углу β) с каждым оборотом тела вокруг оси x_1 угол α получает систематическое приращение, равное по абсолютной величине $|L|\Omega(T, L)$. Направление этого приращения зависит от знака постоянной L. Таким образом, величина угла α с течением времени может стать сколь угодно большой. Здесь следует отметить, что $\alpha(t)$ изменяется, вообще говоря, немонотонно.

Если существуют такие натуральные числа m и n, что

$$n|L|\Omega = 2\pi m \tag{2.17}$$

то движение тела в целом периодическое (в том смысле, что периодически тело возвращается в исходное состояние движения, хотя углы α и β определяются с точностью до кратных 2π), а наименьший период равен $\tau = n\tau_r$, где n – наименьшее из натуральных чисел n, удовлетворяющих (2.17) Иными словами, движение системы периодическое, если число $\mu = |L|\Omega(T, L)/(2\pi)$ рационально, при этом наименьший период равен $\tau = n\tau_r$, где n – наименьший натуральный знаменатель дроби μ. Если число μ иррационально, то движение непериодично.

В частном случае $L = 0$ движение по углу α периодично с наименьшим периодом $\tau = \tau_r$ и, в отличие от общего случая $L \neq 0$, ограничено (координата α не может принимать сколь угодно больших значений). В этом смысле можно сказать, что при $T > \Pi_{max}$ движение по переменной α носит вращательный характер (хотя это вращение, вообще говоря, немонотонно), если $L \neq 0$ и колебательный характер, если $L = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\Pi_{min} < T < \Pi_{max}$ и система совершает колебания по углу β с периодом τ_υ и амплитудой A, см. (2.7) и (2.8). Интегрируя уравнение (2.13) по времени в пределах от t_0 до $t_0 + n\tau_\upsilon$, где n – натуральное число, получим

$$\alpha(t_0 + n\tau_\upsilon) - \alpha(t_0) = L\Omega_1(L, T)n, \quad \Omega_1(L, T) = 2\int\limits_{\beta_-}^{\beta_+} F(T, L, \beta)d\beta \tag{2.18}$$

Здесь β_- и β_+ – минимальное и максимальное значения колеблющегося угла β, определяемые равенствами (2.8). Отметим, что интеграл второго слагаемого в правой части (2.13) по t от t_0 до $t_0 + n\tau_\upsilon$ равен нулю, т.к. после замены переменной интегрирования согласно (2.15) этот интеграл для каждого периода колебаний сводится к сумме двух интегралов от функции $b(\beta)/K(\beta)$, один из которых берется в пределах от β_- до β_+, а второй – от β_+ до β_-. Уравнение (2.18) является аналогом (2.16) в случае колебаний по углу β.

Анализируя равенство (2.18) подобно тому, как выше анализировалось равенство (2.16), приходим к следующим выводам. Т.к. колебания по переменной β возможны только при $L \neq 0$, то угол α может принимать сколь угодно большие значения. Если при этом отношение $\nu = |L\Omega_1|/(2\pi)$ – рациональное число, то движение тела в целом периодично, а наименьший период равен $\tau = n\tau_\upsilon$, где n – наименьший натуральный знаменатель дроби ν. Если число ν иррационально, то движение непериодично.

В заключение установим простые достаточные условия монотонности вращения по углу α, т.е. достаточные условия знакопостоянства обобщенной скорости $\dot{\alpha}$. Поскольку $K(\beta) > 0$, то из (2.13) вытекает что $\dot{\alpha}$ не изменяет знака, если $|L| > |b(\beta)\dot{\beta}|$ или, что эквивалентно,

$$L^2 > b^2(\beta)\dot{\beta}^2 \tag{2.19}$$

Разрешая (2.2) относительно $\dot{\beta}^2$ и подставляя результат в (2.19), приходим к неравенству

$$L^2 J_{11} > 2Tb^2(\beta) \tag{2.20}$$

которое эквивалентно (2.19). Поскольку $b^2(\beta) = (J_{12}\sin\beta + J_{13}\cos\beta)^2 \leqslant J_{12}^2 + J_{13}^2$, то неравенство (2.20) будет заведомо выполнено, если выполнено неравенство

$$L^2 J_{11} > 2T(J_{12}^2 + J_{13}^2) \tag{2.21}$$

Поэтому соотношение (2.21) есть достаточное условие монотонности вращения по углу α.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–013–16262).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д.* Относительные колебания и вращения плоской шарнирной связки двух твердых тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 2. С. 8–17.
2. *Мохамед Э.А., Смольников Б.А.* Свободное движение шарнирной связки двух твердых тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 28–33.
3. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 416 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.XI.1993