

УДК 531.381

© 1994 г. Н.К. Мощук

## О ДВИЖЕНИИ САНЕЙ ЧАПЛЫГИНА ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассматривается движение саней Чаплыгина [1] на наклонной плоскости при наличии трения скольжения и верчения, а также случайных возмущений типа "белых шумов", вызванных, например, поступательной вибрацией основания. Составлены стохастические уравнения движения и ставится задача статистического анализа их решений.

В случае, когда плоскость горизонтальна, а трение и возмущения малы, исследование проводится методом усреднения. Найдены все конечномерные распределения кинетической энергии саней. Показано, что в пределе устанавливается стационарный режим, соответствующий  $\gamma$ -распределению. Кратко рассмотрено движение конька (частный случай саней Чаплыгина) на наклонной плоскости при отсутствии трения верчения. Показано, что при малом трении скольжения конек "в среднем" будет медленно соскальзывать вниз, т.е. математическое ожидание координаты изменяется незначительно, тогда как "в среднеквадратическом" соскальзывание будет существенным, т.е. дисперсия координаты изменяется сильно.

В случае движения саней Чаплыгина на наклонной плоскости при произвольных коэффициентах трения скольжения и верчения исследование проводится методом ортогональных разложений. Представлены результаты численных расчетов.

В детерминированной постановке (т.е. при отсутствии случайных возмущений) задача исследовалась ранее [1–5]. В стохастической постановке она рассматривалась в предположении [6], что центр тяжести лежит на прямой, проходящей через лезвие и перпендикулярной к нему, причем были составлены и проанализированы стохастические уравнения движения, линеаризованные в окрестности положения равновесия детерминированной системы.

1. Рассмотрим движение твердого тела, опирающегося о гладкую наклонную плоскость лезвием и двумя гладкими ножками, в однородном поле тяжести с ускорением  $g$ .

Введем связанную с опорной плоскостью систему координат  $O\xi\eta$ , плоскость  $O\xi\eta$  которой совпадает с опорной, а ось  $O\xi$  направлена по линии наибольшего ската, и жестко связанную с санями систему координат  $Axuz$ , ось  $Ax$  которой направлена по лезвию, ось  $Au$  – параллельна опорной плоскости. Обе системы координат – правые (здесь и далее сохраняются обозначения [5]). Будем использовать следующие обозначения:  $\alpha, \beta, \delta$  – координаты центра тяжести  $G$  саней в связанной системе координат,  $m$  – масса саней,  $\rho$  – радиус инерции саней относительно оси  $Gz \parallel Az$ ,  $r = \sqrt{\alpha^2 + \rho^2}$ ,  $\theta$  – угол наклона опорной плоскости к горизонтальной.

В качестве обобщенных координат можно взять координаты  $\xi, \eta$  лезвия в неподвижной системе координат  $O\xi\eta\zeta$  и угол  $\varphi(\text{mod } 2\pi)$  поворота лезвия вокруг оси  $Az \parallel O\zeta$ . Допустим, что лезвие не может скользить в направлении, перпендикулярном его

плоскости. Тогда уравнение неголономной связи имеет вид

$$\dot{\xi} \sin \varphi - \dot{\eta} \cos \varphi = 0$$

Предположим, что на систему действуют диссипативные силы с функцией Релея

$$\Phi = (m/2)[h(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + h_1 \dot{\varphi}^2]$$

где  $h > 0$  и  $h_1 \geq 0$  – коэффициенты вязкого трения скольжения и вращения, а также некоторая, действующая в плоскости  $O\xi\eta$ , внешняя возмущающая сила  $F(t)$ , компоненты которой в плоскости  $O\xi\eta$  обозначим через  $F_1$  и  $F_2$ .

Уравнения движения удобнее записать, введя квазиординату  $κ$

$$κ = q - \beta\varphi, \quad \dot{\xi} = q' \cos \varphi, \quad \dot{\eta} = q' \sin \varphi$$

и безразмерные величины

$$t^* = \sqrt{\frac{g}{r}} t, \quad κ^* = \frac{κ}{r}, \quad p_1^* = \frac{r^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{gr}}, \quad p_2^* = \frac{κ'}{\sqrt{gr}}, \quad a = \frac{\alpha}{r}, \quad b = \frac{\beta}{r}$$

$$\xi^* = \frac{\xi}{r}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{r}, \quad \xi_G^* = \frac{\xi_G}{r}, \quad \eta_G^* = \frac{\eta_G}{r}, \quad k_{11} = \frac{h\beta^2 + h_1}{r\sqrt{gr}}$$

$$k_{12} = \frac{h\beta}{\sqrt{gr}}, \quad k_{22} = h\sqrt{\frac{r}{g}}, \quad \varepsilon F_i^* = \frac{F_i}{mg} \quad (i=1,2; \varepsilon = \text{const})$$

В канонической форме они имеют вид (звездочки для простоты обозначений опускаем, а точка будет обозначать дифференцирование по "новому" времени)

$$\varphi^* = p_1$$

$$p_1^* = -ap_1 p_2 - a \sin \theta \sin \varphi - k_{11} p_1 - k_{12} p_2 - (\varepsilon a \sin \varphi) F_1 + (\varepsilon a \cos \varphi) F_2 \quad (1.1)$$

$$p_2^* = ap_1^2 + \sin \theta \cos \varphi - k_{12} p_1 - k_{22} p_2 + (\varepsilon \cos \varphi) F_1 + (\varepsilon \sin \varphi) F_2$$

Уравнения (1.1) при известной функции  $F(t)$  образуют замкнутую систему, описывающую движение саней относительно центра  $A$ . Их следует дополнить уравнениями

$$\dot{\xi} = (bp_1 + p_2) \cos \varphi, \quad \dot{\eta} = (bp_1 + p_2) \sin \varphi$$

$$\dot{\xi}_G = -ap_1 \sin \varphi + p_2 \cos \varphi, \quad \dot{\eta}_G = ap_1 \cos \varphi + p_2 \sin \varphi \quad (1.2)$$

определяющими движение лезвия и центра тяжести  $G$  относительно опорной плоскости  $O\xi\eta$ . Уравнение для  $κ$   $κ' = p_2$  отделяется от уравнений (1.1) и в дальнейшем рассматриваться не будет.

2. Пусть вектор внешних возмущающих сил  $F$  представляет собой вектор  $V = [V_1, V_2]^m$  независимых нормальных белых шумов с постоянной  $(2 \times 2)$  матрицей интенсивности  $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{E}$ ,  $v_0 = \text{const}$ ,  $\mathbf{E} = \text{diag}(1,1)$  (широкополосное, однородное и изотропное в пространстве возмущение). В этом случае уравнения движения (1.1) составляют систему стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) Ито (см., например, [7]). Эти уравнения определяют однородный по времени диффузионный процесс на многообразии  $S^1 \times R^2$  – фазовом пространстве рассматриваемой стохастической неголономной системы Чаплыгина.

Из теоремы Р.З. Хасьминского ([8], с. 119) следует, что при  $h\varepsilon_{11}\varepsilon_{21} \neq 0$  в рассматриваемой стохастической системе (1.1) существует предельный стационарный в узком смысле режим. Для доказательства достаточно в качестве функции Ляпунова взять функцию  $(p_1^2 + p_2^2)/2$  (кинетическую энергию саней).

Так как уравнение (1.1) отделяется от уравнений (1.2), то по переменным  $\xi, \eta, \xi_G, \eta_G$  возможен систематический и флуктуационный дрейф [9], т.е. математические ожидания и дисперсии этих переменных могут неограниченно возрастать.

Несмотря на то, что диффузия исследуемых СДУ вырождается, эти уравнения имеют сильное решение и решение сильно единственно, так как все коэффициенты уравнений – гладкие функции своих переменных, а матрица диффузии (т.е. матрица  $\mathbf{V}\mathbf{V}^m$ , где  $\mathbf{V}$  – матрица, стоящая в уравнениях движения перед вектором белых шумов), зависящая только от ориентации саней, положительна и ограничена. Кроме того, процесс, определяемый этими СДУ, регулярен (т.е. остановки или взрыва процесса не будет) и выполняются условия Хермандера, гарантирующие гладкость переходной плотности по обратным переменным [10].

Основная цель работы – статистический анализ движения саней Чаплыгина.

Пусть опорная плоскость горизонтальна ( $\theta = 0$ ), а трение и возмущение малы, т.е. величины  $k_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) и  $\varepsilon^2$  одного порядка малости. Для эффективного применения метода усреднения вместо переменных  $\varphi, p_1, p_2$  введем новые переменные [5]  $w(\text{mod } 2\pi), I, w_1$  по формулам

$$I = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \geq 0$$

$$w = \varphi + \frac{1}{a} \arcsin \frac{p_1 / p_2}{\sqrt{1 + (p_1 / p_2)^2}}, \quad w_1 = \frac{1}{2a} \ln \frac{I + p_2}{I - p_2} \quad (2.1)$$

Формально, чтобы привести уравнения движения к стандартной форме и воспользоваться методом усреднения, следует вместо переменной  $w_1$  ввести медленную переменную  $w_1 - It$ . Однако, так как уравнение для этой переменной рассматриваться не будет, то и вводить ее не будем.

В невозмущенном движении  $I, w, w_1 = I$  постоянны.

Уравнения движения относительно новых переменных  $I, w, w_1$  удобны для применения метода усреднения и для краткости здесь не приводятся.

Следуя процедуре усреднения для уравнений диффузионного типа в стандартной форме [11–13], надо отдельно усреднить вектор сноса и матрицу диффузии. Это по существу сводится к усреднению коэффициентов производящего оператора марковского процесса, описываемого СДУ движения в новых (медленных) переменных. Усредненная система достаточно точно описывает поведение точной системы на интервале времени порядка  $1/\varepsilon_*$ ,  $\varepsilon_* = \max\{k_{ij}, \varepsilon^2 (i, j = 1, 2)\}$ . Точнее, это означает, что все конечномерные распределения вектора состояния исходной системы при  $\varepsilon_* \rightarrow 0$  можно приблизить равномерно на отрезке времени длины  $O(1/\varepsilon_*)$  в любой компактной области фазового пространства конечномерными распределениями вектора состояния усредненной системы.

В рассматриваемом случае усредненная система СДУ Ито имеет вид (для усредненных величин сохраняем прежние обозначения)

$$I' = -k_{22}I + v_0 a^2 / (2I) + V_1, \quad w' = V_2 / I \quad (2.2)$$

Удобнее вместо переменной  $I$  ввести переменную  $J = I^2/2$ , пропорциональную кинетической энергии саней Чаплыгина. Стохастическое уравнение для переменной  $J$

$$J' = -2k_{22}J + v_0(1+a^2)/2 + \sqrt{2J}V_1 \quad (2.3)$$

может быть исследовано независимо.

Отметим, что усредненная система стохастических уравнений (2.2), строго говоря, не позволяет рассматривать уравнение для  $J$  отдельно, так как начальные значения  $J(t_0), w(t_0), w_1(t_0)$ , вообще говоря, зависимы. Однако  $J(t)$  образует диффузионный

процесс и распределения величины  $J$ , как одной из компонент вектора состояния, такие же, как и в стохастической системе (2.3).

Для уравнения (2.3) задача анализа решается полностью, так как соответствующие уравнения В.С. Пугачева [7] для  $n$ -мерных характеристических функций  $g_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n; t_1, \dots, t_n)$  линейны, имеют первый порядок и интегрируются стандартным методом. Выпишем эти уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_n}{\partial t_n} &= \lambda_n (-2k_{22} + i\nu_0 \lambda_n) \frac{\partial g_n}{\partial t_n} + \frac{1}{2} i\nu_0 (1 + a^2) \lambda_n g_n, \quad i^2 = -1 \\ g_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n; t_1, \dots, t_{n-1}, t_{n-1}) &= g_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}, \lambda_{n-1} + \lambda_n; t_1, \dots, t_{n-1}) \\ n &= 2, 3, \dots; \quad g_1(\lambda, t_0) = g_0(\lambda) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь  $g_0(\lambda)$  – характеристическая функция начального значения  $J(t_0)$  представляющего случайную величину, независимую от значений белого шума  $V(t)$  при  $t > t_0$ . Решения уравнений (2.4) имеют вид

$$\begin{aligned} g_1(\lambda; t) &= g_0(\lambda \exp[-2k_{22}(t - t_0)] \Psi^{-1}(\lambda, t - t_0)) \Psi^{-(1+a^2)/2}(\lambda, t - t_0) \\ \Psi(\lambda, \tau) &= 1 - i\nu_0 \lambda (1 - \exp[-2k_{22}\tau]) / (2k_{22}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} g_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n; t_1, \dots, t_n) &= g_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}, \lambda_{n-1} + \\ &+ \lambda_n \exp[-2k_{22}(t_n - t_{n-1})] \Psi^{-1}(\lambda_n, t_n - t_{n-1}); t_1, \dots, t_{n-1}) \Psi^{-(1+a^2)/2}(\lambda_n, t_n - t_{n-1}) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что с течением времени устанавливается стационарный режим флуктуаций с одномерной характеристической функцией

$$g_{st}(\lambda) = (1 - i\nu_0 \lambda / (2k_{22}))^{-(1+a^2)/2}$$

соответствующей  $\gamma$ -распределению.

Отметим, что в механике голономных механических систем под действием случайных возмущающих сил типа белых шумов энергия системы чаще всего имеет распределение, являющееся частным случаем  $\gamma$ -распределения: экспоненциальное или  $\chi^2$ -распределение с  $n$  степенями свободы. Например, в стохастическом уравнении Эйлера – Пуансо [14] стационарное распределение кинетической энергии тела является  $\chi^2$ -распределением с тремя степенями свободы.

Из уравнения (2.3) (или (2.2)) следует система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для моментов  $\mu_n = MJ^n$  ( $M$  – оператор математического ожидания)

$$\mu_n' = n[-4k_{22}\mu_n + \nu_0(a^2 + 2n - 1)\mu_{n-1}] / 2 \quad (2.6)$$

Решение ее нетрудно получить. Выпишем здесь выражение лишь для  $\mu_1(t)$  и для стационарных моментов

$$\mu_1(t) = \mu_1(t_0) \exp(-2k_{22}t) + \nu_0(1 + a^2)(1 - \exp(-2k_{22}t)) / (4k_{22})$$

$$\mu_n^{st} = [\nu_0 / (4k_{22})]^n (a^2 + 2n - 1)(a^2 + 2n - 3) \dots (a^2 + 1)$$

Как видно из (2.2), в стохастическом уравнении для угловой переменной  $w$  снос отсутствует, т.е. по переменной  $w$  будет только диффузия:

$$w(t) = \int_{t_0}^t \frac{dW_2(\tau)}{I(\tau)} \quad (I > 0)$$

где  $W_2(\tau)$  – стандартный одномерный винеровский процесс ( $V_2 = W_2$ ).

В частном случае  $a = 0$  (центр тяжести саней лежит на прямой, проходящей через лезвие и перпендикулярной лезвию) точные уравнения движения (1.1) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= p_1, \quad \dot{p}_1 = -k_{11}p_1 - k_{12}p_2 \\ \dot{p}_2 &= -k_{12}p_1 - k_{22}p_2 + V', \quad V' = V_1 \cos \varphi + V_2 \sin \varphi \end{aligned} \quad (2.7)$$

Вследствие однородности и изотропности возмущений матрица диффузии СДУ (2.7) имеет вид  $\text{diag}(0, 0, \nu_0)$ . Поэтому все распределения вектора состояния  $[\varphi, p_1, p_2]^m$  такие же, как и в линейной системе (2.7), где  $V'$  – уже скалярный нормальный белый шум постоянной интенсивности  $\nu_0$ .

Все конечномерные распределения вектора состояния  $[\varphi, p_1, p_2]^m$  можно найти по известным формулам [7]. Заметим лишь, что в пределе при  $t \rightarrow \infty$  по переменным  $p_1, p_2$  распределение будет нормальным, а по угловой переменной  $\varphi$  – равномерным (на окружности).

3. В случае конька ( $\alpha = \beta = 0$ ) на наклонной плоскости и отсутствии трения верчения ( $h_1 = 0$ ) стохастические уравнения движения (1.1) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= p_1, \quad \dot{p}_1 = 0, \quad \dot{p}_2 = \sin \theta \cos \varphi - k_{22}p_2 + V' \\ \dot{\xi} &= p_2 \cos \varphi, \quad \dot{\eta} = p_2 \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.1)$$

Далее для простоты ограничимся случаем, когда начальные условия для  $\varphi$  и  $p_1$  детерминированные,  $\varphi(t_0) = \varphi_0, p_1(t_0) = p_{10}$ . Тогда последние три уравнения (3.1) линейны, и эволюцию математического ожидания  $M\xi$  и дисперсии  $D\xi$  координаты  $\xi$  можно определить по известным формулам [7]. Выпишем выражения для  $M\xi$  и  $D\xi$ , предполагая, что по переменной  $p_2$  установился периодический режим

$$\begin{aligned} M\xi &= \frac{k_{22} \sin \theta}{p_{10}^2 + k_{22}^2} u(t) + c_1, \quad D\xi = \frac{\nu}{p_{10}^2 + k_{22}^2} u(t) + c_2 \\ u(t) &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4p_{10}} \sin 2\varphi - \frac{1}{4k_{22}} \cos 2\varphi, \quad \varphi = p_{10}t + \varphi_0 \\ c_i &= \text{const} \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что отношение приращений  $D\xi$  и  $M\xi$  за один период колебаний  $t = 2\pi/p_{10}$  угла  $\varphi$  равно

$$(D\xi)_T / (M\xi)_T = \nu / (k_{22} \sin \theta) \quad (3.2)$$

Видно, что при малых  $k_{22}$  конек "в среднем" будет очень медленно соскальзывать вниз, тогда как "в среднеквадратическом" соскальзывание будет значительным. Этот результат можно рассматривать как стохастический аналог известного эффекта детерминированной задачи: при отсутствии возмущений и трения конек (если только  $\varphi(t_0) \neq 0$ ) никогда не соскальзывает вниз.

4. Для анализа движения стохастических саней Чаплыгина на наклонной плоскости при произвольных коэффициентах трения скольжения и верчения, воспользуемся приближенным методом [15]. Следуя ему, задачу нахождения одномерной плотности распределения  $f(t; \varphi, p_1, p_2): R^1 \times S \times R^2 \rightarrow R$  решений СДУ (1.1) сведем к задаче нахождения коэффициентов разложения этой плотности в следующий ряд:

$$\begin{aligned} f &\sim (2\pi)^{-2} (\gamma_1 \gamma_2)^{1/2} \exp[-p_1^2 / (2\gamma_1) - p_2^2 / (2\gamma_2)] \times \\ &\times \sum_{i,j=0}^{\infty} H_i(\gamma_1, p_1) H_j(\gamma_2, p_2) \left[ d_{ij} + \sqrt{2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_{ijn} \sin n\varphi + b_{ijn} \cos n\varphi \right) \right] \quad (d_{00} = 1) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь  $\gamma_1, \gamma_2$  – положительные постоянные, подбираемые из соображений удобства,  $H_i$  – полиномы Эрмита.

Неизвестные коэффициенты  $a_{ijn}(t), b_{ijn}(t), d_{ij}(t)$  определяются формулами

$$a_{ijn} = MH_i(\gamma_1, p_1)H_j(\gamma_2, p_2)\sqrt{2} \sin n\varphi$$

$$b_{ijn} = MH_i(\gamma_1, p_1)H_j(\gamma_2, p_2)\sqrt{2} \cos n\varphi$$

$$d_{ij} = MH_i(\gamma_1, p_1)H_j(\gamma_2, p_2)$$

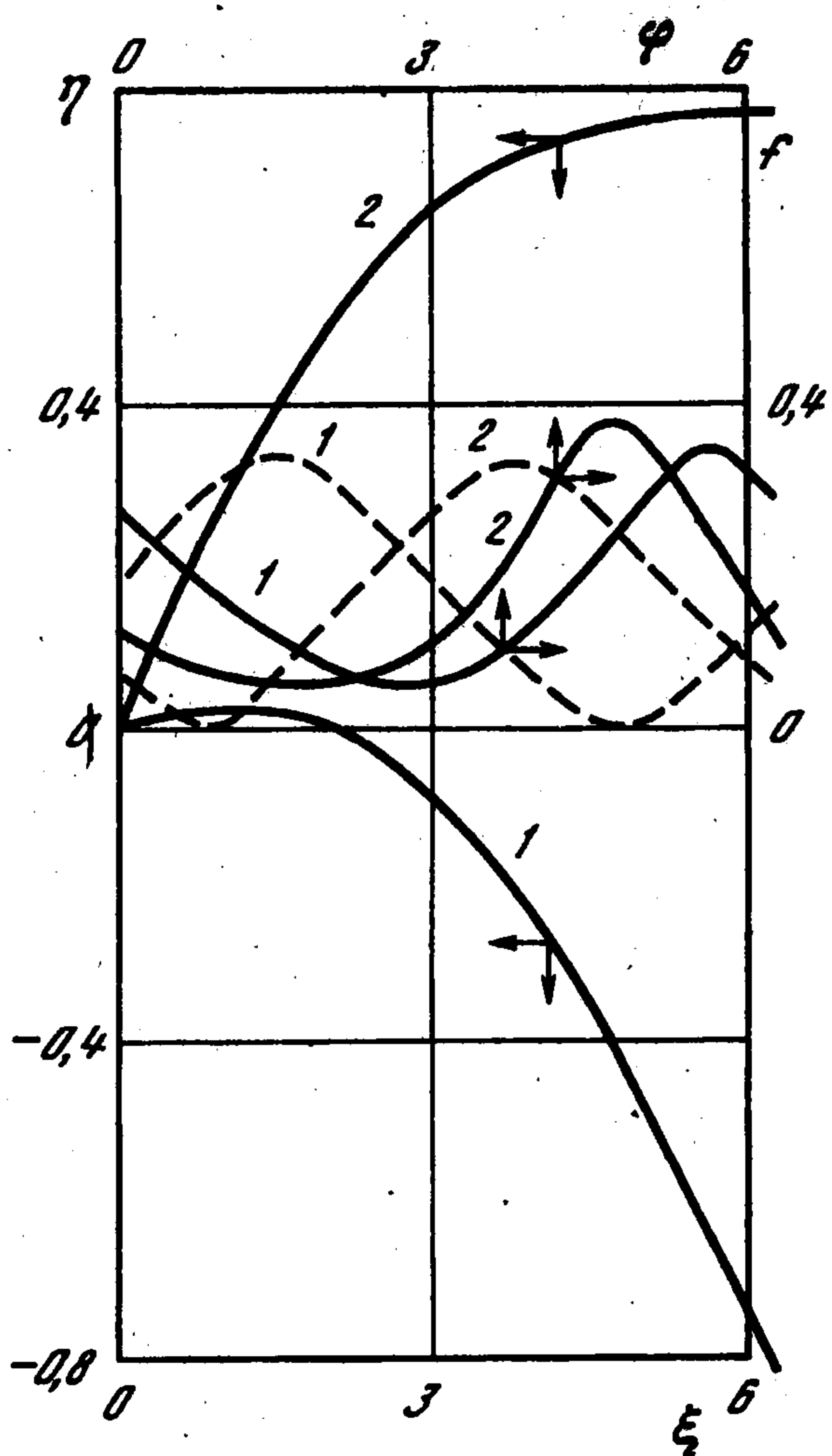
и удовлетворяют следующей бесконечной счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими начальными условиями:

$$\begin{aligned} a_{ijn} = & -(k_{11}i + k_{22}j)a_{ijn} + n\sqrt{\gamma_1}(\sqrt{i+1}b_{i+1,j,n} + \sqrt{i}b_{i-1,j,n}) - \\ & - a\sqrt{\gamma_2} \left[ \sqrt{j} \left( i \left( 1 - 2\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) a_{i,j-1,n} + \sqrt{i(i-1)}j \left( 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) a_{i-2,j-1,n} + i\sqrt{j+1}a_{i,j+1,n} + \right. \\ & \left. + \sqrt{i(i-1)(j+1)}a_{i-2,j+1,n} - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \sqrt{(i+1)(i+2)j} a_{i+2,j-1,n} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \sin \theta \left[ \sqrt{\frac{j}{\gamma_2}} (\dot{a}_{i,j-1,n+1} + a_{i,j-1,n-1}) - a \sqrt{\frac{i}{\gamma_1}} (b_{i-1,j,n-1} - b_{i-1,j,n+1}) \right] - \\ & - k_{12} \left[ \sqrt{i\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} (\sqrt{j}a_{i-1,j-1,n} + \sqrt{j+1}a_{i-1,j+1,n}) + \sqrt{j\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} (\sqrt{i+1}a_{i+1,j-1,n} + \sqrt{i}a_{i-1,j-1,n}) + \right. \\ & \left. + \sqrt{i(i-1)} \left( -k_{11} + \frac{v_0 a^2}{2\gamma_1} \right) a_{i-2,j,n} + \sqrt{j(j-1)} \left( -k_{22} + \frac{v_0}{2\gamma_2} \right) a_{i,j-2,n} \right. \\ b_{ijn} = & -(k_{11}i + k_{22}j)b_{ijn} - n\sqrt{\gamma_1}(\sqrt{i+1}a_{i+1,j,n} + \sqrt{i}a_{i-1,j,n}) - \\ & - a\sqrt{\gamma_2} \left\{ \sqrt{j} \left[ i \left( 1 - 2\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right] b_{i,j-1,n} + \sqrt{i(i-1)}j \left( 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) b_{i-2,j-1,n} + i\sqrt{j+1}b_{i,j+1,n} + \right. \\ & \left. + \sqrt{i(i-1)(j+1)}b_{i-2,j+1,n} - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \sqrt{(i+1)(i+2)j} b_{i+2,j-1,n} \right\} + \\ & + \chi \left\{ \frac{1}{2} \sin \theta \left[ a \sqrt{\frac{i}{\gamma_1}} (-a_{i-1,j,n+1} + a_{i-1,j,n-1}) + \sqrt{\frac{j}{\gamma_2}} (b_{i,j-1,n-1} + b_{i,j-1,n+1}) \right] \right\} - \\ & - k_{12} \left[ \sqrt{i\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} (\sqrt{j}b_{i-1,j-1,n} + \sqrt{j+1}b_{i-1,j+1,n}) + \sqrt{j\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} (\sqrt{i+1}b_{i+1,j-1,n} + \sqrt{i}b_{i-1,j-1,n}) \right] + \\ & + \sqrt{i(i-1)} \left( -k_{11} + \frac{v_0 a^2}{2\gamma_1} \right) b_{i-2,j,n} + \sqrt{j(j-1)} \left( -k_{22} + \frac{v_0}{2\gamma_2} \right) b_{i,j-2,n}, \quad \chi = 1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

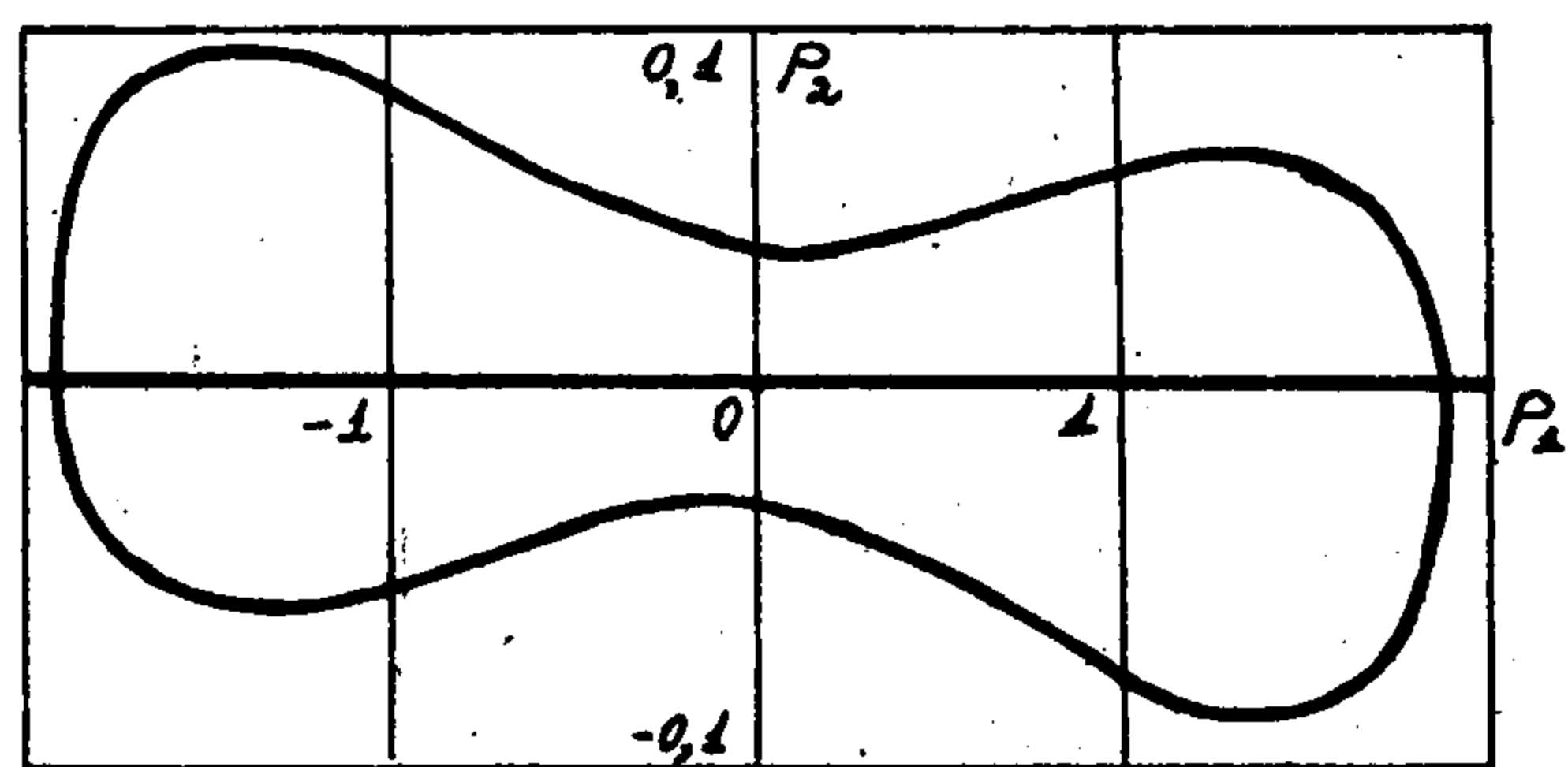
Уравнения для  $d_{ij}$  получаются из уравнений для  $b_{ijn}$  при  $n = 0$ , если положить параметр  $\chi = 1/\sqrt{2}$ . Из (1.2) следуют уравнения для математических ожиданий координат лезвия  $A$  и центра тяжести  $G$  в системе координат  $O\xi\eta$

$$(M\xi)' = b\sqrt{\gamma_1/2}b_{101} + \sqrt{\gamma_2/2}b_{011}, \quad (M\eta)' = b\sqrt{\gamma_1/2}a_{101} + \sqrt{\gamma_2/2}a_{011}$$

$$(M\xi_G)' = -a\sqrt{\gamma_1/2}a_{101} + \sqrt{\gamma_2/2}b_{011}, \quad (M\eta_G)' = a\sqrt{\gamma_1/2}b_{101} + \sqrt{\gamma_2/2}a_{011}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Ограничившись в (4.2) такими  $i, j, n$ , что  $0 \leq i \leq N_1, 0 \leq j \leq N_2, 0 \leq n \leq N_3$  (прямоугольный метод суммирования), и решив полученную систему линейных дифференциальных уравнений, например на ЭВМ, получим приближенное выражение для плотности распределения, а также приближенные значения моментов процесса  $[\varphi, p_1, p_2]^T$ .

В вычислительных экспериментах значения следующих параметров были фиксированными:  $\beta = 0,1; r = 1; g = 9,8; v_0 = 1; \sin\theta = 0,1$ . Значения остальных параметров менялись, и в соответствии с этим выделим три случая: 1)  $\alpha = 0,1; h = 2,4; h_1 = 2$ ; 2)  $\alpha = 0; h = 4; h_1 = 2$ ; 3)  $\alpha = 0; h = 4; h_1 = 0,01$ .

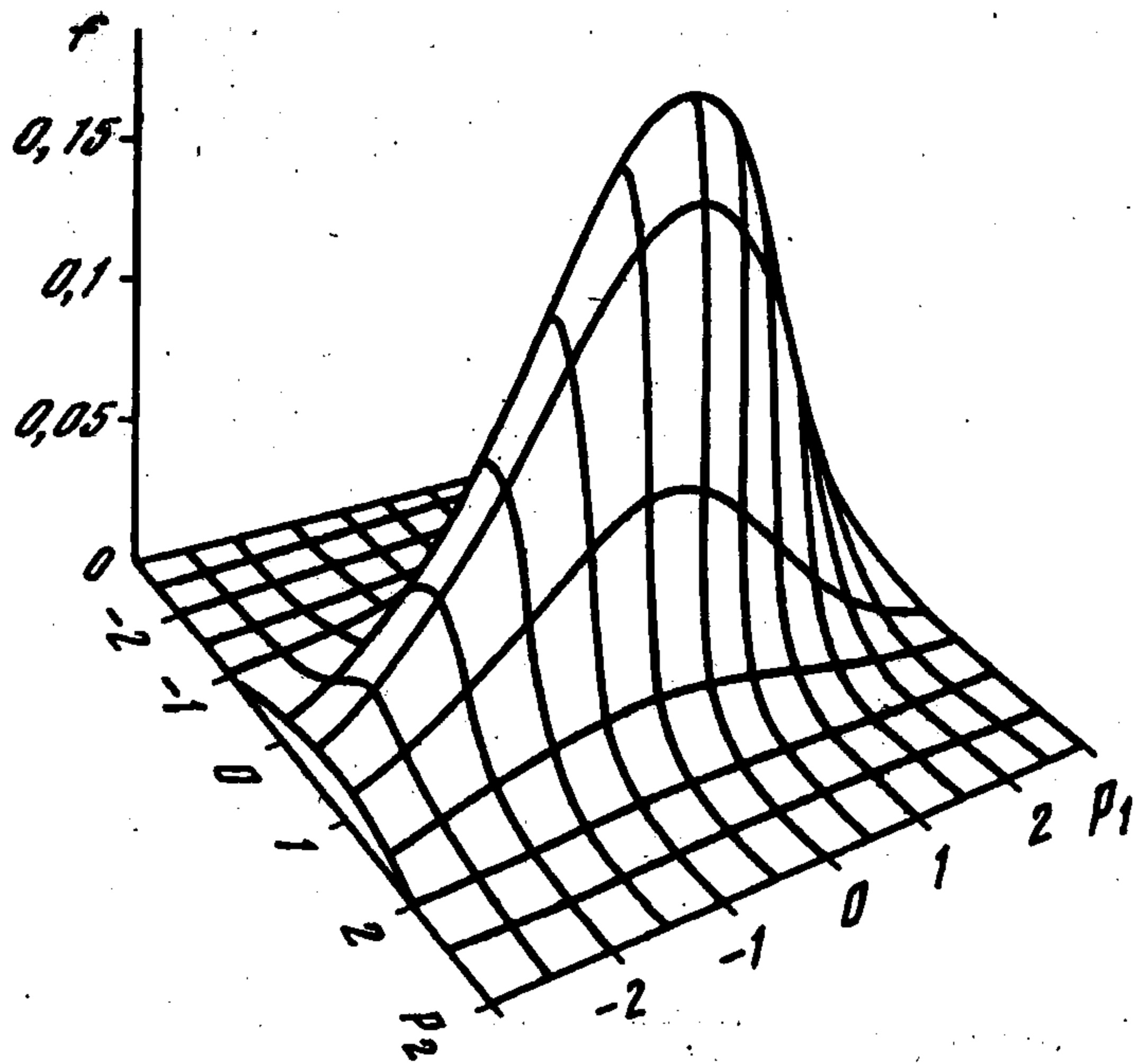
В отсутствие случайных возмущений финальным движением саней в первом случае будет спуск саней вдоль некоторой прямой с постоянной скоростью ( $\varphi = \text{const}, p_1 = 0, p_2 = \text{const}$ ), во втором случае – положение устойчивого равновесия ( $\varphi = 3\pi/2, p_1 = p_2 = 0$ ), в третьем случае – режим автоколебаний (в фазовом пространстве  $\{\varphi, p_1, p_2\}$  ему соответствует предельный цикл).

Начальные значения  $\varphi, p_1, p_2$  выбирались статистически независимыми. Распределение  $p_j$  ( $j = 1, 2$ ) при  $t = 0$  было нормальным с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\gamma_j$  ( $j = 1, 2$ ), а распределение угла  $\varphi$  при  $t = 0$  в каждом из трех случаев было следующим:

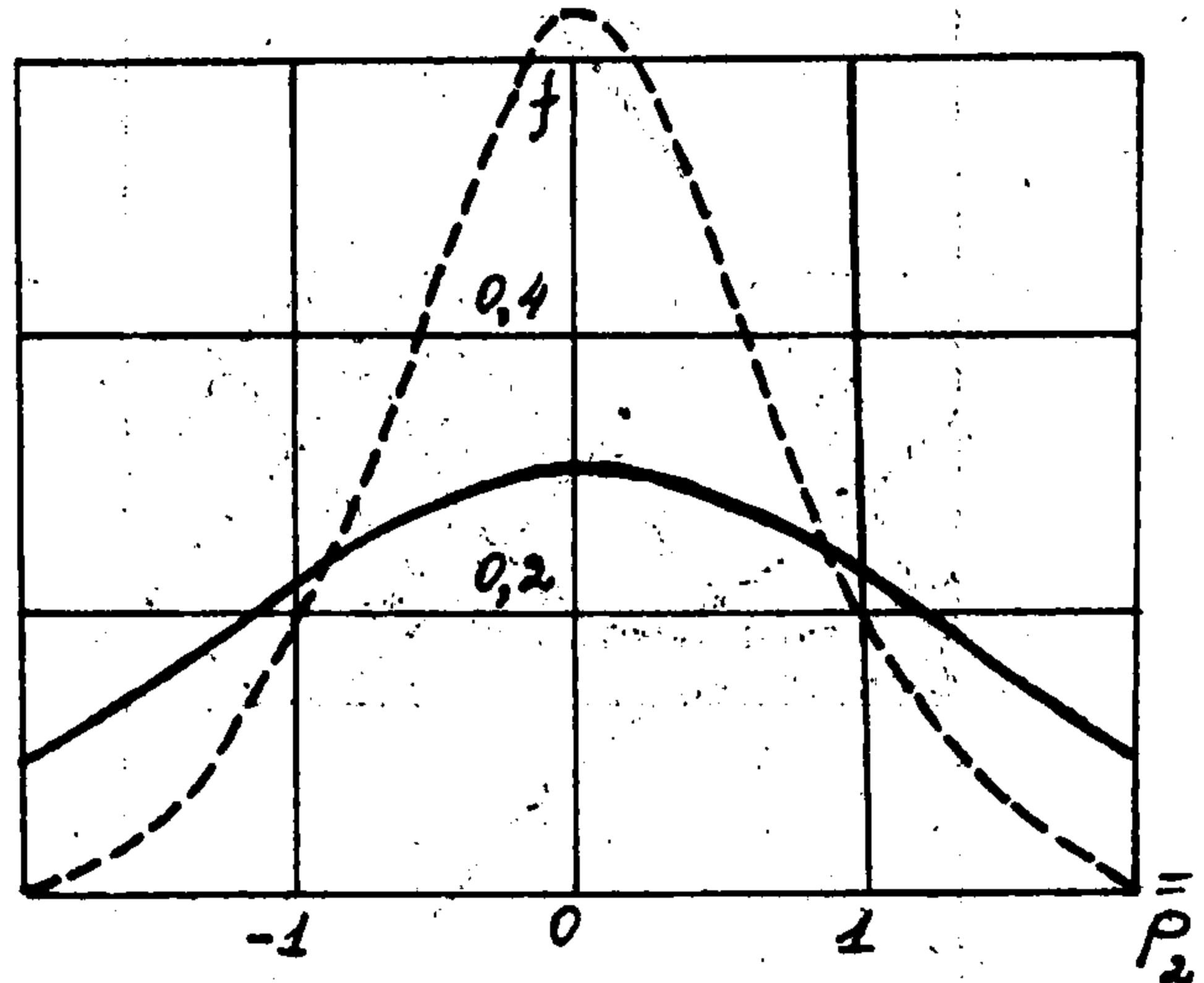
- 1)  $f_0(\varphi) = [1 + \cos(\varphi - \pi/2)] / (2\pi)$ , 2)  $f_0(\varphi) = [1 + \cos(\varphi - 5\pi/4)] / (2\pi)$ ,
- 3)  $f_0(\varphi) = 1 / (2\pi)$ .

Система (4.2) при  $N_1 = N_2 = 32, N_3 = 6$  интегрировалась методом Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом  $10^{-3}$  на интервале времени  $[0, 10^3]$ .

Параметры  $\gamma_j$  подбирались приблизительно равными стационарным значениям  $Mr_j^2$  и имели следующие численные значения в рассматриваемых случаях: 1)  $\gamma_1 = 0,05; \gamma_2 = 0,7$ ;



Фиг. 3



Фиг. 4

2)  $\gamma_1 = 0,01$ ;  $\gamma_2 = 0,4$ ; 3)  $\gamma_1 = 1,56$ ;  $\gamma_2 = 0,41$ . Все вещественные части собственных чисел матрицы линейной системы (4.2) при этом были отрицательны, а ряд Парсеваля

$$\sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{n=1}^{N_3} (d_{ij}^2 + a_{ijn}^2 + b_{ijn}^2)$$

с ростом  $N_1, N_2, N_3$  достаточно быстро сходился на интервале времени  $[0, 1000]$  и при  $N_1, N_2 \geq 32, N_3 \geq 6$  с точностью до  $10^{-2}$  оставался постоянным. Это гарантирует хорошую точность метода.

Результаты расчетов представлены на фиг. 1–4. Первому набору значений параметров задачи соответствуют на фиг. 1 кривые 1, второму – кривые 2, третьему – фиг. 2–4.

На фиг. 1 представлены кривые  $[M\xi(t), M\eta(t)]$  при  $t \in [0, 1000]$  и нулевых начальных значениях, они иллюстрируют "в среднем" след конька  $A$  на опорной плоскости. Здесь же показана эволюция одномерной плотности угла  $\varphi$

$$f(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{N_3} (a_{00n} \sin n\varphi + b_{00n} \cos n\varphi) \right]$$

Штриховые кривые соответствуют начальному распределению, а сплошные – стационарному. Хорошо заметно, что максимум вероятности сдвигается от  $\pi/2$  к  $\varphi^* = 5,65$  в первом случае, и от  $5\pi/4$  к  $3\pi/2$  – во втором случае.

Из вида кривых 2 на фиг. 1 следует, что во втором случае сани в среднем очень медленно спускаются вниз вдоль оси наибольшего ската (систематический дрейф). При этом конек совершает случайные колебания вблизи положения  $\varphi = 3\pi/2$  (устойчивого положения равновесия детерминированной задачи).

На фиг. 2 изображена проекция предельного цикла на плоскость  $p_1, p_2$  в отсутствие возмущений, а на фиг. 3 – стационарная одномерная плотность  $f(p_1, p_2)$ . Интересно отметить, что стационарная одномерная плотность переменной  $p_2$  существенно негауссовская, что иллюстрирует фиг. 4, где штриховая кривая соответствует нормальному распределению с той же дисперсией, что и  $p_2$ , а сплошная кривая соответствует  $f(p_2)$ . В то же время стационарная одномерная плотность распределения  $f(p_1)$  практически не отличается от соответствующего гауссовского распределения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С.А. Исследования по динамике неавтономных систем. М.; Л.: Гостехиздат. 1949. 112 с.
2. Caratheodory C. Der Schlitten // Z. angew. Math. and Mech. 1933. В. 13. Н. 2. S. 71–76.
3. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неавтономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
4. Емельянова И.С. К вопросу о динамике саней Чаплыгина на наклонной плоскости // Проблемы механики управляемого движения. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1974. Вып. 4. С. 52–60.
5. Мощук Н.К. О движении саней Чаплыгина // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 546–551.
6. Пятецкий В.А. О вынужденных случайных колебаниях неавтономных систем // Прикл. механика. 1970. Т. 6. Вып. 8. С. 49–54.
7. Пугачев В.С., Сеницын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1990. 630 с.
8. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 367 с.
9. Мощук Н.К., Сеницын И.Н. О стохастических неавтономных системах // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 2. С. 213–223.
10. Анулова С.В., Веретенников А.Ю., Крылов Н.В., Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Стохастическое исчисление // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундамен. направления. М.: ВИНТИ, 1989. Т. 45. С. 5–253.
11. Хасьминский Р.З. О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией // Теория вероятностей и ее применения. 1963. Т. 8. Вып. 1. С. 3–25.
12. Хасьминский Р.З. Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью // Теория вероятностей и ее применения. 1966. Т. 11. Вып. 3. С. 444–462.
13. Митропольский Ю.А., Коломиец В.Г. Усреднение в стохастических системах // Укр. мат. ж. 1971. Т. 23. N 3. С. 318–345.
14. Мощук Н.К., Сеницын И.Н. О флуктуациях в случайной среде тела с неподвижной точкой // Изв. РАН. МТТ. 1993. N 1. С. 39–44.
15. Мощук Н.К. Приближенный метод анализа стохастических механических систем // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 907–917.

Москва

Поступила в редакцию  
30.VIII.1993