

УДК 531.36

© 1994 г. Е.В. Абрарова, А.В. Карапетян

О СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЦЕНТРАЛЬНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Рассматривается задача о плоском поступательно-вращательном движении твердого тела в центральном гравитационном поле. Найдены все стационарные движения тела, исследована их устойчивость, построены бифуркационные диаграммы. Обнаружены новые эффекты, обусловленные использованием точного выражения потенциала гравитационных сил.

1. Рассмотрим задачу о движении сплюснутого тела в поле притяжения неподвижного центра. Тело будем моделировать безмассовым диском радиуса a , на противоположных концах двух взаимно перпендикулярных диаметров d_i которого расположены точечные массы $m_i/2$ ($i = 1, 2$).

Предположим, что диск движется в плоскости, содержащей притягивающий центр. Тогда положение диска полностью определяется тремя обобщенными координатами: расстоянием r от центра масс C тела до притягивающего центра O , углом θ между прямой OC и диаметром d_1 , углом ϕ между некоторым неподвижным в плоскости движения направлением и прямой OC . При этом кинетическая энергия T и потенциальная энергия V диска принимают вид

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + a^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2] \\ V &= F_1(a) + F_1(-a) + F_2(a) + F_2(-a) \\ F_i(a) &= -\frac{1}{2} f M m_i (r^2 + 2 r a \gamma_i + a^2)^{-1/2} \quad (i = 1, 2) \\ \gamma_1 &= \cos \theta, \quad \gamma_2 = \sin \theta \end{aligned}$$

Здесь M – масса притягивающего центра, $m = m_1 + m_2$ – масса тела, f – гравитационная постоянная.

Функция Лагранжа $T - V$ не зависит от угла ϕ . Следовательно, уравнения движения тела допускают помимо интеграла энергии $T + V = h = \text{const}$ интеграл площадей

$$\partial T / \partial \dot{\phi} = k = \text{const} \tag{1.1}$$

а тело может совершать движения вида

$$r = \text{const}, \quad \theta = \text{const}, \quad \phi = \text{const} \tag{1.2}$$

При этом центр масс тела равномерно вращается вокруг притягивающего центра, а тело сохраняет постоянную ориентацию по отношению к этому центру.

Игнорируя циклическую переменную ϕ , введем функцию Рауса $R = R(\dot{r}, \dot{\theta}, r, \theta, k)$ посредством соотношения $R = T - V - k\phi$, в правой части которого переменная ϕ исключена с помощью интеграла площадей (1.1). Функция Рауса имеет вид

$$R = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \frac{r^2 a^2}{r^2 + a^2} \dot{\theta}^2 \right) + k \frac{a^2}{r^2 + a^2} \dot{\theta} - V - \frac{1}{2} \frac{k^2}{m(r^2 + a^2)} \equiv R_2 + R_1 + R_0$$

где R_s — однородная форма позиционных скоростей r и θ степени $s = 0, 1, 2$. Полагая $k = \sqrt{fMm}$ к, приведем эффективный потенциал $-R_0$ тела к виду $-R_0 = fMW$, где

$$W = G_1(a) + G_1(-a) + G_2(a) + G_2(-a) + \frac{1}{2} \kappa^2 (r^2 + a^2)^{-1} \quad (G_i = F_i / fM)$$

Постоянные r и θ в (1.2) отвечают критическим точкам эффективного потенциала, т.е. критическим точкам функции W , а постоянная φ в (1.2) определяется из соотношения (1.1).

2. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} \equiv \frac{ar}{2} [m_1(Q_1 - P_1) \sin \theta + m_2(P_2 - Q_2) \cos \theta] = 0 \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial r} \equiv & \frac{m_1}{2} [P_1(r + a \cos \theta) + Q_1(r - a \cos \theta)] + \\ & + \frac{m_2}{2} [P_2(r + a \sin \theta) + Q_2(r - a \sin \theta)] - \frac{\kappa^2 r}{(r^2 + a^2)^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$P_i = (r^2 + a^2 + 2ar\gamma_i)^{-3/2}, \quad Q_i = (r^2 + a^2 - 2ar\gamma_i)^{-3/2} \quad (i = 1, 2)$$

Уравнение (2.1) тождественно по r удовлетворяется значениями $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2 \pmod{\pi}$. При этом уравнение (2.2) принимает вид

$$\kappa^2 = H_{ij}(r), \quad H_{ij}(r) = m_i(r^2 + a^2)^3 (r^2 - a^2)^{-2} r^{-1} + m_j(r^2 + a^2)^{1/2} \quad (2.3)$$

($i = 1, j = 2$ при $\theta = 0$ или $i = 2, j = 1$ при $\theta = \pi/2$)

Отметим очевидные свойства функции $H_{ij}(r)$ ($r \in (a, +\infty)$)

$$H_{ij}(r) > 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} H_{ij}(r) = \lim_{r \rightarrow a+0} H_{ij}(r) = +\infty$$

и рассмотрим уравнение $H_{ij}(r) = 0$, которое можно представить в виде

$$\frac{m_j}{m_i} = \frac{(r^4 - 10r^2a^2 + a^4)(r^2 + a^2)^{5/2}}{(r^2 - a^2)^3 r^3} \equiv \mu(r) \quad (2.4)$$

Здесь и далее штрих означает производную.

При $r \in (a, +\infty)$ функция $\mu(r)$ монотонно убывает от $+\infty$ до $-1 + 0$, поскольку

$$\lim_{r \rightarrow a+0} \mu(r) = +\infty, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \mu(r) = -1, \quad \mu'(r) < 0 \quad \forall r > a$$

и, следовательно, принимает все положительные значения. Таким образом, уравнение (2.4) имеет при $r > a$ единственный корень $r = r_{ij}^0$ для любых значений параметра $m_j/m_i \in (0; +\infty)$. В точке r_{ij}^0 функция $H_{ij}(r)$ достигает своего минимального значения

$$H_{ij}(r_{ij}^0) = \kappa_{ij}^{02} > 0.$$

Итак, уравнение (2.3) не имеет решений при $\kappa^2 < \kappa_{ij}^{02}$, имеет единственное решение $r = r_{ij}^0$ при $\kappa^2 = \kappa_{ij}^{02}$ и два семейства решений $r = r_{ij}^{\pm}(\kappa^2)$ при $\kappa^2 > \kappa_{ij}^{02}$, причем

$$r_{ij}^+(\kappa^2) > r_{ij}^0 > r_{ij}^-(\kappa^2); \quad H_{ij} \geq 0 \quad \text{при} \quad r = r_{ij}^{\pm}(\kappa^2)$$

Здесь и далее верхний знак неравенства отвечает ветви, помеченной знаком "плюс", а нижний знак — ветви, помеченной знаком "минус".

В дальнейшем без уменьшения общности будем полагать, что $m_1 > m_2$. Тогда $r_{12}^0 > r_{21}^0$, поскольку $\mu(r)$ – монотонно убывающая функция (см. уравнение (2.4), из которого определяются значения r_{12}^0 и r_{21}^0 , первое – при $i = 1, j = 2$, а второе – при $i = 2, j = 1$). Кроме того, при этом имеет место неравенство $H_{12}(r) > H_{21}(r) \forall r > a$, так как

$$H_{12}(r) - H_{21}(r) = (m_1 - m_2)[(r^2 + a^2)^{5/2} - (r^2 - a^2)^2 r](r^2 + a^2)^{1/2}(r^2 - a^2)^{-2} r^{-1} > 0$$

Очевидно, решениям вида

$$\theta = 0, r = r_{12}^{\pm}(\kappa^2) \text{ и } \theta = \pi/2, r = r_{21}^{\pm}(\kappa^2) \quad (2.5)$$

отвечают ориентации тела, при которых одна из его главных центральных осей инерции направлена по радиус-вектору центра масс, а другая – по касательной к орбите.

3. Выясним характер критических точек (2.5) эффективного потенциала, для чего вычислим коэффициенты матрицы второй вариации функции W .

Прежде всего заметим, что

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}\right)^{(ij)} = \left(\frac{r}{(r^2 + a^2)^2} H'_{ij}\right)^{(ij)}, \quad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \theta}\right)^{(ij)} = 0$$

Здесь и далее выражение $(\dots)^{(ij)}$ означает, что функция, стоящая в скобках, вычисляется при $\theta = 0, r = r_{12}^{\pm}(\kappa^2)$ ($i = 1, j = 2$) или при $\theta = \pi/2, r = r_{21}^{\pm}(\kappa^2)$ ($i = 2, j = 1$).

Таким образом, знак $\partial^2 W / \partial r^2$ совпадает со знаком H'_{ij} , т.е.

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}\right)^{(ij)} \geq 0 \text{ при } r = r_{ij}^{\pm}(\kappa^2)$$

Для того чтобы выяснить знак выражения

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}\right)^{(ij)} = a^2 r \left(m_i \frac{3r^2 + a^2}{(r^2 - a^2)^3} - m_j \frac{3r}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \right)^{(ij)}$$

исследуем уравнение $\partial^2 W / \partial \theta^2 = 0$, которое можно представить в виде

$$\frac{m_j}{m_i} = \frac{(3r^2 + a^2)(r^2 + a^2)^{5/2}}{3r(r^2 - a^2)^3} \equiv v(r) \quad (3.1)$$

Функция $v(r)$ при $r \in (a; +\infty)$ монотонно убывает от $+\infty$ до $1 + 0$, поскольку $v(r) > 0, v'(r) < 0, \lim_{r \rightarrow a+0} v(r) = +\infty, \lim_{r \rightarrow +\infty} v(r) = 1$

Следовательно, $v(r) > 1 \forall r > a$, т.е. уравнение (3.1) не имеет решений при $i = 1, j = 2$ (напомним, что $m_1 > m_2$) и имеет единственное решение $r = r_{21}^*$ при $i = 2, j = 1$.

Таким образом,

$$(\partial^2 W / \partial \theta^2)^{(12)} > 0, r > a; (\partial^2 W / \partial \theta^2)^{(21)} > 0 (< 0), r < r_{21}^* (> r_{21}^*)$$

Выясним взаимное расположение точек r_{21}^0 и r_{21}^* . Первая из них определяется из уравнения (2.4), а вторая – из уравнения (3.1) (в обоих случаях при $i = 2, j = 1$). Функции $\mu(r)$ и $v(r)$ при $r \in (a; +\infty)$ монотонно убывают от $+\infty$ до -1 и до $+1$ соответственно и пересекаются в единственной точке

$$r = r_{\mu v} = a[(29 + \sqrt{769})/12]^{1/2} \cong 2,174a$$

При этом

$\mu(r) > \nu(r)$, ($\mu(r) < \nu(r)$) при $r < r_{\mu\nu}$ ($r > r_{\mu\nu}$)

Следовательно, $r_{21}^0 > r_{21}^*$, если

$$\frac{m_2}{m_1} < \frac{1}{\mu(r_{\mu\nu})} = \frac{1}{\nu(r_{\mu\nu})} = \frac{(29 + \sqrt{769})^{1/2} (17 + \sqrt{769})^3}{(41 + \sqrt{769})^{5/2} (33 + \sqrt{769})} \equiv \delta \equiv 0,283$$

и $r_{21}^0 < r_{21}^*$, если $m_2/m_1 > \delta$.

Итак, при $m_1 > m_2$ решение $\theta = 0$, $r = r_{12}^+(\kappa^2)$ устойчиво в вековом смысле (степень неустойчивости $\chi = 0$), а решение $\theta = 0$, $r = r_{12}^-(\kappa^2)$ неустойчиво ($\chi = 1$).

При $m_1 > m_2 > m_1 \delta$ решение $\theta = \pi/2$, $r = r_{21}^+(\kappa^2)$ устойчиво в вековом смысле ($\chi = 0$), если $r_{21}^+(\kappa^2) < r_{21}^*$, и неустойчиво ($\chi = 1$), если $r_{21}^+(\kappa^2) > r_{21}^*$, а решение $\theta = \pi/2$, $r = r_{21}^-(\kappa^2)$ всегда неустойчиво ($\chi = 1$).

При $m_2 < m_1 \delta$ решение $\theta = \pi/2$, $r = r_{21}^+(\kappa^2)$ всегда неустойчиво ($\chi = 1$), а решение $\theta = \pi/2$, $r = r_{21}^-(\kappa^2)$ неустойчиво ($\chi = 1$), если $r_{21}^-(\kappa^2) < r_{21}^*$, и неустойчиво в вековом смысле ($\chi = 2$), если $r_{21}^-(\kappa^2) > r_{21}^*$; в последнем случае возможна гироскопическая стабилизация.

Наконец, при $m_2/m_1 = \delta$ в точке $r = r_{21}^0$ обращаются в нуль сразу два коэффициента устойчивости Пуанкаре и решения $\theta = \pi/2$, $r = r_{21}^\pm(\kappa^2)$ всегда неустойчивы ($\chi = 1$).

4. В точке $\theta = \pi/2$, $r = r_{21}^*$, $\kappa^2 = \kappa_{21}^{*2} \equiv H_{21}(r_{21}^*)$ обращается в нуль вторая производная по θ от эффективного потенциала и изменяется (при $m_2/m_1 \neq \delta$) степень неустойчивости соответствующего решения $\theta = \pi/2$, $r = r_{21}^\pm(\kappa^2)$. Следовательно, в этой точке от указанного решения ответвляются решения системы (2.1), (2.2), для которых $\theta = \pi/2 \pm \psi(\kappa^2)$ ($0 < \psi(\kappa^2) < \pi/2$). Этим решениям отвечают такие ориентации тела, при которых ни одна из его главных центральных осей инерции не совпадает с радиус-вектором центра масс и касательной к орбите.

Укажем основные свойства соответствующих стационарных движений тела

$$\theta = \pi/2 \pm \psi(\kappa^2), \quad r = \rho(\kappa^2) \quad (4.1)$$

Прежде всего заметим, что при $\theta \neq 0, \pi/2 \pmod{\pi}$ уравнения (2.1) и (2.2) можно представить соответственно в виде

$$m_2/m_1 = \Phi(r, \theta) \quad \text{и} \quad \kappa^2 = \Psi(r, \theta)$$

Здесь

$$\Phi(r, \theta) = \frac{P_1 - Q_1}{P_2 - Q_2} \operatorname{tg} \theta, \quad \Psi(r, \theta) = \frac{(r^2 + a^2)^2}{2r} \{m_1 [P_1(r + a \cos \theta) + Q_1(r - a \cos \theta)] + m_2 [P_2(r + a \sin \theta) + Q_2(r - a \sin \theta)]\}$$

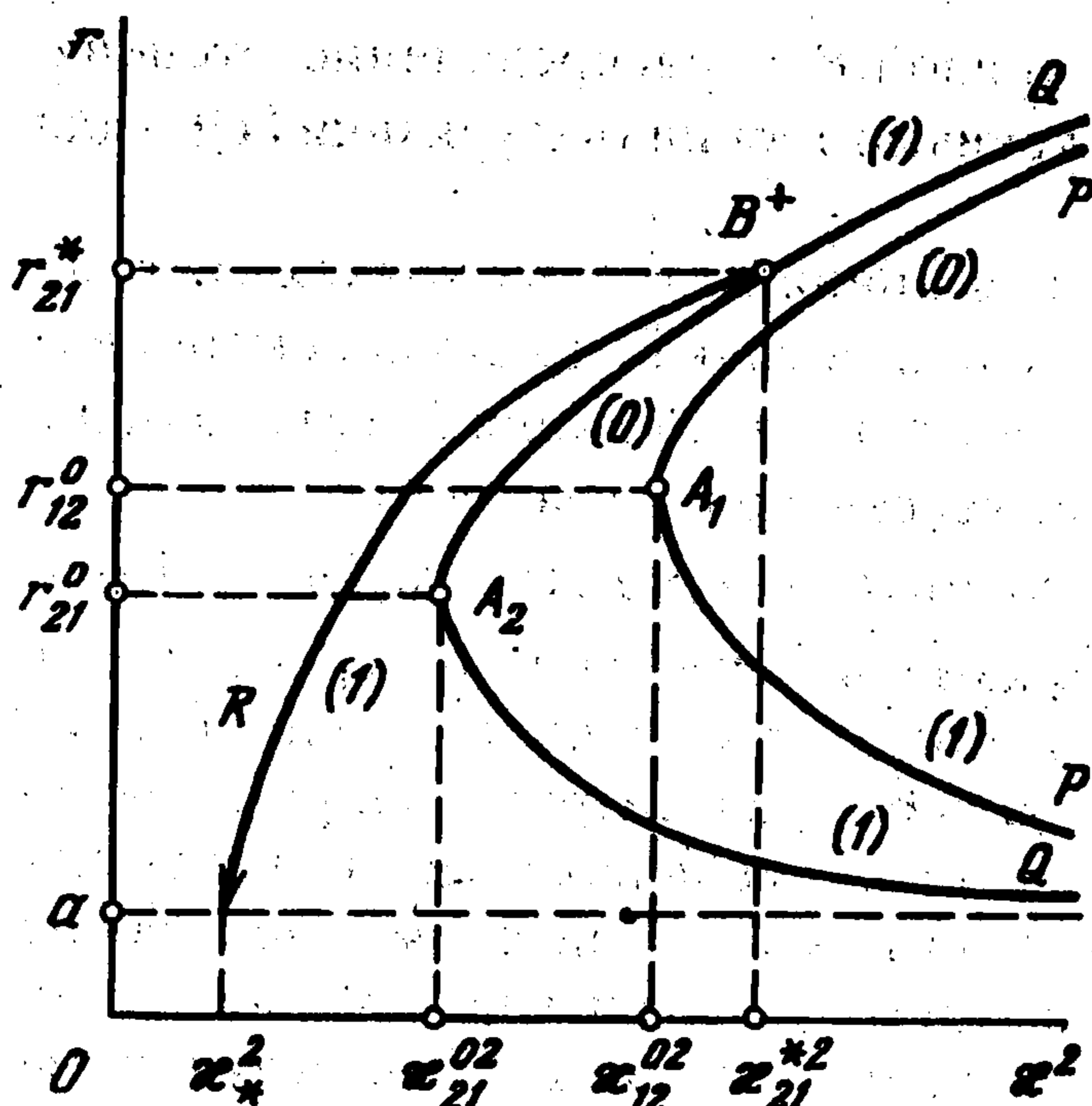
Анализ функции $\Phi(r, \theta)$ ($\theta \in (0, \pi/2)$, $r \in (a, +\infty)$) показывает, что

$$\Phi(r, \pi/4) \equiv 1, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \Phi(r, \theta) \equiv 1$$

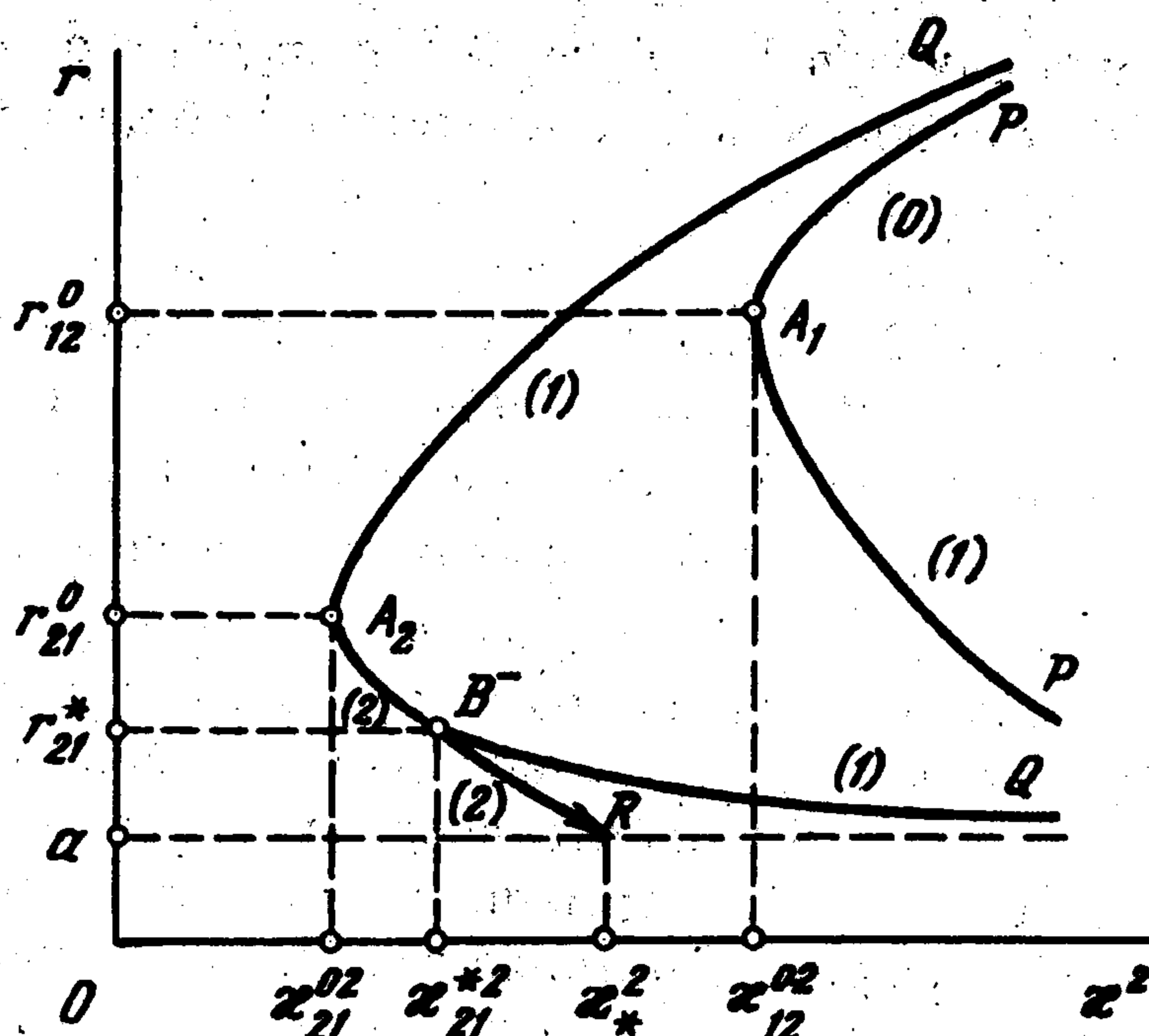
$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \Phi(r, \theta) = \nu(r), \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi/2-0} \Phi(r, \theta) = 1/\nu(r)$$

$$\Phi(a+0, \theta) > \Phi(r, \theta) > \Phi(+\infty, \theta) \quad \text{при} \quad \theta \in (0, \pi/4)$$

$$\Phi(a+0, \theta) < \Phi(r, \theta) < \Phi(+\infty, \theta) \quad \text{при} \quad \theta \in (\pi/4, \pi/2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Следовательно, при $m_2/m_1 < 1$ стационарные движения (4.1) удовлетворяют следующим условиям:

$$\theta \in (\pi/2 - \psi_*, \pi/2 + \psi_*), \quad r \in (a, r_{21}^*]$$

Здесь $\psi_* = \pi/2 - \theta_*$, а θ_* – корень уравнения

$$\frac{m_2}{m_1} = \Phi(a+0, \theta) \equiv \frac{[(1 + \cos \theta)^{3/2} - (1 - \cos \theta)^{3/2}] \cos^2 \theta}{[(1 + \sin \theta)^{3/2} - (1 - \sin \theta)^{3/2}] \sin^2 \theta} \equiv \Phi_*(\theta)$$

Поскольку при $\theta \in (0, \pi/2)$ имеют место соотношения

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \Phi_*(\theta) = +\infty, \quad \Phi_*(\pi/4) = 1, \quad \Phi_*(\pi/2) = 0, \quad \Phi_*(\theta) < 0$$

то этот корень лежит в интервале $(\pi/4; \pi/2)$, причем θ_* стремится к $\pi/4 + 0$, если m_2/m_1 стремится к $1-0$. Следовательно, отклонения θ от $\pi/2$ не превышают $\psi_* \in (0; \pi/4)$, асимптотически приближаясь к предельному отклонению ψ_* при $r \rightarrow a + 0$. При этом (см. уравнение $\kappa^2 = \Psi(r, \theta)$) κ^2 стремится к значению

$$\kappa_*^2 = 2a \left\{ m_1 \frac{(1 + \cos \theta_*)^{1/2} + (1 - \cos \theta_*)^{1/2}}{\sin \theta_*} + m_2 \frac{(1 + \sin \theta_*)^{1/2} + (1 - \sin \theta_*)^{1/2}}{\cos \theta_*} \right\}$$

В зависимости от отношения масс m_2/m_1 значение κ_*^2 может быть как меньше, так и больше значения κ_{21}^* . В частности, если m_2/m_1 мало отличается от единицы, то $\kappa_*^2 < \kappa_{21}^*$, а если $m_2/m_1 \ll 1$, то $\kappa_*^2 > \kappa_{21}^*$.

5. Стационарные движения (1.2) тела определяют в пространстве (r, θ, κ^2) линию L , заданную соотношениями (2.1) и (2.2). На фиг. 1 и 2 указаны проекции этой линии на плоскость (r, κ^2) . Кривые P, Q, R соответствуют движениям, для которых $\theta = 0, \pi/2, \pi/2 \pm \psi(\kappa^2) \pmod{\pi}$. При этом кривые P и Q – проекции плоских ветвей линии L , отвечающих решениям (2.5), а кривая R – проекция пары пространственных ветвей, отвечающих решениям (4.1). Цифрами (0), (1), (2) указана степень неустойчивости соответствующих стационарных движений.

Вид кривых P и Q и распределение степени неустойчивости указаны на фиг. 1 и 2

для случаев $1 > m_2/m_1 > \delta$ и $m_2/m_1 < \delta$, а вид кривой R и распределение степени неустойчивости (в соответствии с общими положениями теории бифуркации [1]) – для случаев $1 - m_2/m_1 \ll 1$ и $m_2/m_1 \ll 1$.

Точки A_1, A_2 и B^\pm являются точками ветвления линии L . В этих точках система (2.1), (2.2) теряет локальную единственность решений (в точках A – по переменной r , в точках B – по переменной θ ; в последнем случае пара ветвей линии L , отвечающих решениям (4.1) выходит из плоскости $\theta = \pi/2$ трансверсально к последней).

Заметим, что бифуркационное значение r_{21}^* стремится к $+\infty$, когда $m_2/m_1 \rightarrow 1 - 0$. Это означает, что даже в тех случаях, когда размеры тела малы по сравнению с радиусом орбиты его центра масс, возможна вековая устойчивость стационарных движений тела, при которых большая ось его эллипсоида инерции направлена по касательной к орбите, средняя – вдоль радиус-вектора, а меньшая (в данном случае – нулевая) – по нормали к плоскости орбиты. Кроме того, при этом существуют стационарные движения тела, для которых две из трех его главных центральных осей инерции не совпадают с осями орбитальной системы координат. Эти результаты обусловлены использованием точного выражения для потенциала сил тяготения и принципиально невозможны при использовании "спутникового" приближения для этого потенциала (по этому поводу см. также [2–4]).

В заключение отметим, что если $m_2/m_1 = 1 - \varepsilon$ ($0 < \varepsilon \ll 1$), то $r_{21}^* = \sqrt{13/2} a \varepsilon^{-1/2} (1 + o(1))$. При этом для $r \sim r_{21}^*$ оставляемые и отбрасываемые в спутниковом приближении потенциала гравитационных сил члены имеют один и тот же порядок малости:

$$(1 - m_2/m_1)(a/r)^2 \sim \varepsilon^2, (a/r)^4 \sim \varepsilon^2$$

Напомним, что спутниковое приближение потенциала гравитационных сил получается из точного выражения этого потенциала отбрасыванием всех членов порядка $(a/r)^3$ и выше, где a – характерный размер тела, r – расстояние от центра масс тела до притягивающего центра, и сохранением членов порядка $(a/r)^2$ независимо от порядка малости коэффициентов при этих членах. В данной задаче в разложении потенциала в ряд по степеням a/r члены порядка $(a/r)^3$ отсутствуют, члены порядка $(a/r)^4$ имеют коэффициенты порядка единицы, а члены порядка $(a/r)^2$, отвечающие за ориентацию тела, – при указанном выше условии $m_2/m_1 = 1 - \varepsilon$, $r \sim r_{21}^*$ – коэффициенты порядка $(a/r)^2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16242).

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
2. Белецкий В.В., Пономарева О.Н. Параметрический анализ устойчивости относительного равновесия в гравитационном поле // Космич. исследования. 1990. Т. 28. № 5. С. 664–675.
3. Карпетян А.В., Шаракин С.А. О стационарных движениях двух взаимно гравитирующих тел и их устойчивости // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1992. № 3. С. 42–48.
4. Карпетян А.В. О бифуркации стационарных движений двух взаимногравитирующих тел // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 1993. С. 20–26.