УДК 531.36

© 1994 г. В.М. Кунцевич, В.Г. Покотило

УСТОЙЧИВОСТЬ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Изучаются достаточные условия устойчивости в малом инвариантных множеств нелинейных дискретных систем с переменными во времени параметрами, а также разностных включений. Полученные результаты представляют собой шаг к обоснованию для рассматриваемых систем аналога первого метода Ляпунова.

Работа примыкает к исследованиям по теории робастной устойчивости [1, 2].

Большинство результатов по устойчивости нелинейных дискретных включений формулируется с использованием функций Ляпунова, и открытой остается проблема обоснования для указанных систем аналога первого метода Ляпунова. Применение идей этого метода для изучения нелинейных систем с неизвестными, переменными во времени параметрами наталкивается на несколько принципиальных трудностей. Во-первых, необходимо уточнить понятие "линеаризация" применительно к многозначной правой части уравнения, задающего поведение системы. Эта проблема относится, вообще говоря, к области анализа многозначных отображений и допускает [3, 4] несколько различных подходов. Во-вторых, для рассматриваемых систем положение равновесия определено, как правило, также неоднозначно, и имеет смысл говорить не о стационарных решениях, а о стационарных множествах решений, которые могут и не совпадать с множеством всех положений равновесия. Таким образом, "линеаризовать" систему необходимо в окрестности не точки, а множества, что затрудняет или делает невозможным использование достаточно хорошо разработанных к настоящему времени идей линейной аппроксимации многозначного отображения в окрестности точки его графика.

1. Множества стационарных решений и инвариантные множества дискретных систем. Рассматривается нелинейная дискретная динамическая система следующего вида

$$x_{i+1} = f(x_i, \xi_i), \quad \xi_i \in \Xi \tag{1.1}$$

Здесь $x_i \in R^n$ – вектор фазового состояния системы, $\xi_i \in R^m$ – неизвестные, переменные во времени параметры, и всюду $i = 1, 2, \ldots$ Во всех случаях предполагается, что функция $f(\cdot,\cdot)$: $R^n \times R^m \to R^n$ непрерывна, а множество $\Xi \subset R^m$ возможных значений параметров компактно.

В качестве обобщения (1.1) рассматривается разностное включение

$$x_{i+1} \in F(x_i) \tag{1.2}$$

где $F(\cdot)$ – заданное, полунепрерывное сверху многозначное отображение с компактными значениями. В частности, (1.1) можно представить в виде (1.2) при $F(x) = f(x, \Xi) = \bigcup_{\xi\in\Xi} f(x,\xi)$.

Самостоятельный интерес представляет исследование частного случая системы (1.1), соответствующего стационарности ее параметров, т.е. при $\xi_i = \xi \in \Xi$. В этом случае (1.1) можно преобразовать к виду

$$y_{i+1} = g(y_i), \quad y_i = (x_i, \xi_i) \in R^n \times R^m \tag{1.3}$$
$$y_1 \in R^n \times \Xi, \quad g(y) = (f(x, \xi), \xi) \in R^n \times R^m$$

В (1.3) неопределенность в задании правых частей переходит в неопределенность по начальному условию.

Пусть $y^0 = (x^0, \xi^0)$ – стационарная точка (1.3), $y^0 = g(y^0)$. Очевидно, что x^0 при этом – стационарное решение системы (1.1), соответствующее условию $\xi_i = \xi^0$. Рассмотрим множество всевозможных стационарных решений такого вида:

$$X_0^s = \{x^0: \ x^0 \in f(x^0, \Xi)\} \tag{1.4}$$

В рассматриваемых условиях множество X_0^s замкнуто, и в случае, когда оно не пусто, представляет интерес исследование его робастной устойчивости.

Определение 1.1. Замкнутое множество X будем называть робастно асимптотически устойчивым (по Ляпунову) относительно стационарной системы (1.1), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякого решения $y_i = (x_i, \xi)$ системы (1.1), удовлетворяющего условиям $d(x_1, X) < \delta$, $\xi \in \Xi$, справедливы соотношения

$$d(x_i, X) < \varepsilon, \quad d(x_i, X) \to 0, \quad i \to \infty \tag{1.5}$$

($d(x, X) = \inf\{\|x - z\|: \ z \in X\}$ – расстояние от точки x до множества X).

Заметим, что из асимптотической устойчивости (в проекции на R^n) каждого из стационарных решений, вообще говоря, не следует робастная устойчивость всего множества X_0^s. Проиллюстрируем справедливость этого утверждения следующим простым примером.

Пример 1.1. Пусть $n = 1$, $\Xi = \{0, 1\}$ и $x_{i+1} = \xi x_i + 1$.

При $\xi = 0$ асимптотически устойчивым стационарным решением служит $x^0 = 1$, а при $\xi = 1$ эта система стационарных решений не имеет. Следовательно $X_0^s = \{1\}$. Очевидно, что эта точка не является робастно устойчивой в силу определения 1.1.

С другой стороны, как показывает следующий пример, устойчивое множество X_0^s не обязательно состоит из асимптотически устойчивых стационарных решений.

Пример 1.2. Допустим, что $n = 1$, $\Xi = [-1, 1]$ и

$$x_{i+1} = \varphi(x_i) + \xi, \quad \varphi(x) = 4x(1 + |x|)^{-1}$$

Можно показать, что в этом случае $X_0^s = [-(2 + \sqrt{5}), (2 + \sqrt{5})]$ будет робастно устойчивым. В то же время точка $x = 0$ при $\xi = 0$ является неустойчивым положением равновесия.

Множество X_0^s состоит из положений равновесия системы (1.1) при условии, что параметры ξ_i не изменяются со временем. В связи с этим его построение представляет собой достаточно ясную проблему по крайней мере с формальной, алгоритмической точки зрения. Однако, основываясь на определении 1.1, можно видеть, что для робастной устойчивости произвольного множества X необходимо выполнения включения [5]

$$f(X,\Xi) = \bigcup_{x \in X, \xi \in \Xi} f(x,\xi) \subset X$$

Таким образом, робастно устойчивыми могут быть только инвариантные относительно (1.1) множества, в определении которых условие стационарности параметров ξ_i не существенно. В связи с этим в дальнейшем исследуется асимптотическая устойчивость инвариантных множеств систем (1.1) и (1.2). Стоит заметить, что построение нетривиальных инвариантных множеств представляет собой, безусловно, уже более сложную проблему, обсуждение которой выходит за рамки настоящей статьи.

Выделим специальный класс инвариантных множеств, обобщающих понятие стационарного решения.

Определение 1.2. Замкнутое множество X_0 назовем стационарным множеством (СМ) системы (1.1) ((1.2)), если выполнено равенство

$$X_0 = f(X_0, \Xi) \quad (X_0 = F(X_0)) \tag{1.6}$$

Соотношение (1.6) определяет СМ неоднозначно. В частности, объединение СМ, очевидно, также является СМ. Для устранения этой неопределенности введем следующее определение.

Определение 1.3. СМ будем называть минимальным, если никакое его истинное подмножество не является СМ.

Проблема существования непустого СМ может решаться на основе теорем существования неподвижных точек отображений, определенных на пространстве компактных (или замкнутых) множеств из R^n. Не останавливаясь на обсуждении этого круга вопросов, сформулируем один критерий существования, обоснование которого не использует теорем о неподвижных точках, но опирается на качественную характеристику динамической системы.

Теорема 1.1. Пусть существует непустое множество Z_0 такое, что все решения (1.2), начинающиеся в этом множестве, не покидают некоторого компакта (система диссипативна в Z_0 [6]). Тогда у системы (1.2) есть непустое, компактное минимальное СМ.

Приведем только схему доказательства этой теоремы. Оно может быть разбито на два этапа. Сначала устанавливается, что в условиях теоремы существует непустое компактное инвариантное множество Y. Для обоснования этого факта достаточно положить,

$$Y = \overline{\lim_{i\to\infty}} X_i, \qquad X_{i+1} = F(X_i), \qquad X_1 = Z_0$$

где $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} X_i$ определяет верхний предел последовательности компактных множеств из R^n [4].

Следующий этап доказательства существенно неконструктивен и опирается на лемму Цорна [7]. Введем на множестве компактных, инвариантных относительно (1.2) множеств отношение порядка по включению. Каждое линейно упорядоченное подмножество $\{Y_\alpha\}$ этого множества имеет минимальный элемент $Y_0 = \bigcap\limits_{\alpha} Y_\alpha \neq \phi$. Следовательно, существует минимальное компактное инвариантное множество, которое будет СМ системы (1.2).

Замечание 1.1. В приведенной терминологии в работе [5] изучается, в частности, вопрос о том, когда все минимальные СМ являются одноточечными.

Стоит заметить, также, что выражения (1.4) и (1.6) приводят к различным множествам, которые могут по-разному соотноситься друг с другом. Проиллюстрируем справедливость этого утверждения двумя одномерными примерами.

Пример 1.3. Пусть $x_{i+1} = x_i/2 + \xi_i$, $\Xi = \{-1, 0, 1\}$.

При этом $X_0^s = \{-2, 0, 2\}$, а $X_0 = [-2, 2]$, т.е. $X_0^s \neq X_0$, $X_0^s \subset X_0$.

Пример 1.4. Допустим, что

$$x_{i+1} = \varphi(x_i) + \xi_i, \quad \Xi = [-1, 1], \qquad \varphi(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x > 1 \\ 0, & x \in [-1,1] \\ -(x+1)^2, & x < -1 \end{cases}$$

В этом случае $X_0^s = [-3, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, 3]$, а $X_0 = [-1, 1]$. Следовательно, X_0 – подмножество X_0^s.

В то же время можно заметить, что инвариантное относительно (1.1) множество стационарных решений X_0^s является СМ. Следовательно, исследование устойчивости СМ позволяет сделать выводы и об устойчивости множеств стационарных решений. В связи с этим в дальнейшем вообще не будем использовать условие стационарности параметров в (1.1).

Определение 1.4. Непустое, замкнутое, инвариантное множество X_0 называется сильно асимптотически устойчивым (по Ляпунову) относительно (1.1) ((1.2)), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что всякая траектория системы (1.1) ((1.2)), начинающаяся из точки x^0, $d(x^0, X_0) < \delta$ удовлетворяет условиям (1.5).

2. Устойчивость по первому приближению. Изучим достаточные условия устойчивости инвариантных множеств системы (1.1), которые могут быть сформулированы в терминах, характеризующих устойчивость "линеаризованной" системы. Характер полученного результата не представляется неожиданным, однако авторам неизвестны аналоги приводимой ниже теоремы.

Теорема 2.1. Пусть X_0 – компактное, инвариантное множество системы (1.1), и $\mathrm{bd}X_0 = X_0 \setminus (\mathrm{int}X_0)$ – его граница. Допустим, что функция $f(x, \xi)$ равномерно по ξ непрерывно-дифференцируема по x в некоторой окрестности $\mathrm{bd}X_0$, так что

$$f(x+u,\xi) = f(x,\xi) + f'_x(x,\xi)u + \|u\| r(x,\xi,u) \tag{2.1}$$

причем $r(x, \xi, u) \to 0$ при $u \to 0$ равномерно по $(x, \xi) \in (\mathrm{bd}X_0) \times \Xi$.

Если для всех $x \in \mathrm{bd}X_0$ и $\xi \in \Xi$ выполнено неравенство $\|f'_x(x,\xi)\| < 1$, то множество X_0 сильно асимптотически устойчиво относительно (1.1). (Здесь и в дальнейшем матричная норма предполагается согласованной с векторной нормой на R^n.)

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и

$$\mu = \max\{\|f'_x(x,\xi)\|: \ (x,\xi) \in (\mathrm{bd}\, X_0) \times \Xi\} \tag{2.2}$$

В условиях теоремы число δ, $0 < \delta < \varepsilon$ можно выбрать таким образом, что

$$\mu + \|r(x, \xi, u)\| \leqslant \nu < 1 \tag{2.3}$$

для всех $x \in \mathrm{bd}X_0$, $\xi \in \Xi$, $\|u\| < \delta$. Допустим, что $d(x^0, X_0) < \delta$, $\{x_i\}$ – произвольная траектория системы (1.1), начинающаяся в точке x^0, и $\xi_i \in \Xi$ – соответствующая ей последовательность неопределенных параметров, т.е.

$$x_{i+1} = f(x_i, \xi_i), \quad x_1 = x^0 \tag{2.4}$$

Построим рекуррентно последовательность точек $s_i \in \mathrm{bd}X_0$, для которых справедливы неравенства

$$\|x_i - s_i\| \leqslant \nu^{i-1}\delta \tag{2.5}$$

что и завершит доказательство теоремы. В качестве s_1 выберем произвольную точку из $\mathrm{bd}X_0$, для которой

$$\|x^0 - s_1\| = d(x^0, X_0) < \delta$$

Предположим, что построены точки $s_1, \ldots, s_l$, лежащие на границе множества X_0 и удовлетворяющие неравенствам (2.5). Для $z_l = f(x_l, \xi_l)$ в силу (2.1)–(2.5) справедливы оценки

$$\|x_{l+1} - z_l\| = \|(f'_x(s_l,\xi_l)(x_l - s_l) + \|x_l - s_l\| r(s_l,\xi_l,x_l - s_l))\| \leqslant$$

$$\leqslant (\|f'_x(s_l,\xi_l)\| + \|r(s_l,\xi_l,x_l - s_l)\|)\|x_l - s_l\| \leqslant$$

$$\leqslant (\mu + \|r(s_l,\xi_l,x_l - s_l)\|)\nu^{l-1}\delta \leqslant \nu^l\delta$$

Множество X_0 инвариантно, и значит, $z_l \in X_0$. Следовательно, можно указать точку $s_{l+1} \in \mathrm{bd}X_0$, для которой справедливо неравенство $\|x_{l+1} - s_{l+1}\| = d(x_{l+1}, X_0) \leqslant \|x_{l+1} - z_l\|$.

Теорема доказана.

Замечание 2.1. Так как свойство устойчивости по Ляпунову не зависит от выбора нормы на R^n, и каждой матричной норме соответствует некоторая согласованная с ней векторная норма [8], то теорема 2.1 верна при произвольном выборе матричной нормы.

При учете этого замечания, можно утверждать, что теорема 2.1 прямо обобщает стандартное условие асимптотической устойчивости по Ляпунову положения равновесия нелинейной стационарной системы при отсутствии неопределенных параметров. Действительно, точка $x^0 \in R^n$, $x^0 = f(x^0)$ в соответствии с теоремой 2.1 будет асимптотически устойчивым положением равновесия системы $x_{i+1} = f(x_i)$, если некоторая матричная норма якобиана $f'(x^0)$ меньше единицы. Так как спектральный радиус произвольной матрицы можно как угодно точно приблизить некоторой нормой этой матрицы, согласованной с векторной нормой на R^n [9], то вывод теоремы эквивалентен тому, что все собственные числа матрицы $f'(x^0)$ лежат внутри единичного круга комплексной плоскости.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих содержание доказанного утверждения.

Пример 2.1. Пусть $n = 1$. Будем рассматривать положительные решения системы

$$x_{i+1} = f(x_i, \xi_i) = \xi\varphi(x_i), \quad x_1 > 0$$

$$\varphi(x) = 2x(|x| + 1)^{-1}, \quad \Xi = [\alpha, \beta], \quad (1/2) < \alpha < \beta$$

Положительные асимптотически устойчивые положения равновесия этой системы образуют отрезок $X_0^s = [2\alpha - 1, 2\beta - 1]$. Действительно, для $x(\xi) = 2\xi - 1$ справедливы соотношения

$$x(\xi) = f(x(\xi), \xi), \quad f_x'(x(\xi), \xi) = (2\xi)^{-1} < 1$$

В рассматриваемых условиях X_0^s – СМ, и его сильную устойчивость согласно теореме 2.1 можно гарантировать при выполнении неравенства

$$\max_{\xi \in [\alpha, \beta]} \max\{f_x'(2\alpha - 1, \xi), f_x'(2\beta - 1, \xi)\} = f_x'(2\alpha - 1, \beta) = (1/2)\beta\alpha^{-2} < 1$$

Пример 2.2. Рассмотрим импульсную реализацию простейшей следящей системы вида

$$\dot{x}(t) = k(u(t) - x(t)), \quad t \geqslant 0 \tag{2.6}$$

где $u(\cdot)$ – входной, $x(\cdot)$ – выходной сигналы, а $k > 0$ – коэффициент усиления. Будем полагать, что скорость изменения входного сигнала $u(t) = \xi(t)$ точно не известна и может изменяться в пределах от $-\delta$ до δ, $\delta > 0$. Если измерение входного сигнала производится в дискретные моменты времени t_i, то дискретная реализация (2.6) приводит к разностному уравнению

$$x(t_{i+1}) = -k(t_{i+1} - t_i)(x(t_i) - u(t_i)) + x(t_i)$$

Вводя величину ошибки $e_i = x(t_i) - u(t_i)$, получим

$$e_{i+1} = (1 - k\Delta t_i)e_i + \xi_i\Delta t_i \tag{2.7}$$

где $(-\xi_i) \in [-\delta, \delta]$ – средняя скорость изменения входного сигнала на интервале $[t_{i+1}, t_i]$, а $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ – длина этого интервала.

Если $\Delta t_i = \tau = \text{const}$, то получаем

$$e_{i+1} = \kappa e_i + \xi_i\tau, \quad \kappa = 1 - k\tau, \quad \xi_i \in [-\delta, \delta] \tag{2.8}$$

Множество E_0^s стационарных решений (2.8) совпадает с отрезком $[-\delta/k, \delta/k]$, который является инвариантным множеством при $\kappa \geqslant 0$. Можно показать, что при $-1 < \kappa < 0$ минимальным СМ системы (2.8) будет отрезок $E_0 = (\tau/(2 - k\tau))[-\delta, \delta]$. В силу теоремы 2.1 эти множества будут асимптотически устойчивыми при $k\tau \leqslant 1$ и $1 < k\tau < 2$ соответственно. При $\kappa \leqslant -1$ система (2.8) не имеет компактных инвариантных множеств.

Предположим теперь, что используется частотно-импульсная модуляция, при которой длина интервала $[t_i, t_{i+1}]$ является функцией ошибки e_i, т.е. $\Delta t_i = \tau(e_i)$. В этом случае (2.7) преобразуется к виду

$$e_{i+1} = f(e_i, \xi_i) = (1 - k\tau(e_i))e_i + \xi_i\tau(e_i) \tag{2.9}$$

Множество стационарных решений E_0^s при переходе от (2.8) к (2.9) не изменяется, однако исследование условий его инвариантности требует уже достаточно громоздких вычислений. Не вдаваясь в детали таких вычислений, которые можно выполнить для конкретных функций $\tau(\cdot)$, отметим, что на основании теоремы 2.1, асимптотическую устойчивость инвариантного множества в виде отрезка $[-\gamma, \gamma]$ можно гарантировать при условии

$$\max_{\xi\in[-\delta,\delta]} |f_e'(\pm\gamma,\xi)| < 1 \tag{2.10}$$

В частности, если функция $\tau(e)$ симметрична относительно нуля, монотонно возрастает при отрицательных e и $1 - k\tau(e) \geqslant 0$ для всех e, то из (2.9), (2.10) получаем неравенство

$$\tau'(-\gamma) = -\tau'(\gamma) < k\tau(\gamma)/(\gamma k + \delta)$$

3. Линеаризация дифференциальных включений. Получим аналог теоремы 2.1 для разностного включения (1.2). Пусть S – замкнутый единичный шар в R^n, а $h(X, Y)$ – расстояние Хаусдорфа между множествами $X, Y \subset R^n$.

Теорема 3.1. Пусть X_0 – стационарное множество (1.2) и выполнено условие

$$\lim_{\delta\searrow 0} \sup \delta^{-1} h(X_0, F(X_0 + \delta S)) < 1 \tag{3.1}$$

Тогда множество X_0 сильно асимптотически устойчиво относительно (1.2).

Доказательство. Из (3.1) следует, что существует $\omega < 1$ и $\delta_0 > 0$ такие, что

$$h(X_0, F(X_0 + \delta S)) \leqslant \omega\delta \tag{3.2}$$

для всех $0 < \delta < \delta_0$. Если $\{x_i\}$ – какое-либо решение (1.2), и для некоторого номера j и числа $\delta_j < \delta_0$ выполнено включение $x_j \in X_0 + \delta_j S$, то из (1.2) и (3.2) следует

$$x_{j+1} \in F(x_j) \subset F(X_0 + \delta_j S) \subset X_0 + \omega\delta_j S$$

Таким образом, произвольное решение разностного включения (1.2) с начальным условием $x_1 = x^0$, $d(x^0, X_0) < \delta \leqslant \delta_0$ удовлетворяет включению

$$x_i \in X_0 + \delta_i S, \quad \delta_{i+1} = \omega\delta_i, \quad \delta_1 = \delta$$

что и требовалось доказать.

Доказанная теорема непосредственно обобщает теорему 2.1. Действительно, в условиях теоремы 2.1 справедливы включения (см. 2.1)–(2.3))

$$f(X_0 + \delta S, \Xi) = \bigcup_{\substack{u\in S,\xi\in\Xi\\ x_0\in X_0}} f(x_0 + \delta u, \xi) =$$

$$= \bigcup_{\substack{u\in S,\xi\in\Xi\\ x_0\in X_0}} \{f(x_0,\xi) + \delta f_x'(x_0,\xi)u + \delta r(x_0,\xi,u)\} \subset \bigcup_{x_0\in X_0} f(x_0,\Xi) + \delta\nu S = X_0 + \delta\nu S$$

из которых следует (3.1).

Замечание 3.1. Из доказательства теоремы 3.1 следует, что расстояние Хаусдорфа в (3.1) можно заменить функцией

$$h_+(X, Y) = \inf\{t \geqslant 0\colon\ Y \subset X + tS\}$$

определяющей уклонение множества Y от множества X.

Замечание 3.2. В теореме 3.1 компактность множества X_0, вообще говоря, не требуется, однако для неограниченных множеств X_0 условие (3.1) является весьма ограничительным.

Утверждение теоремы 3.1 естественно было бы связать с какой-либо конструкцией, определяющей производную многозначного отображения (МО) $F(\cdot)$. Концепции производных, основанные на аппроксимации графика МО в точке [3, 4] представляются в данном случае неподходящими по двум причинам. Первая связана с тем, что исследуется поведение дискретной системы в окрестности не одного (стационарного) решения, а вообще говоря, целого семейства решений. Вторая причина вызвана стремлением исследовать сильную устойчивость решений, в то время как указанные конструкции, по-видимому, более приспособлены для получения условий слабой устойчивости [10].

Формально можно признать удовлетворительным следующий результат, основанный на понятии сильной производной МО [11].

Теорема 3.2. Пусть МО $F(\cdot)$ непрерывно и имеет выпуклые компактные значения, X_0 – компактное СМ (1.2). Если отображение $F(\cdot)$ – сильно дифференцируемо в каждой точке $x^0 \in \mathrm{bd}X_0$ по любому направлению $\upsilon \in S$, так что эта производная непрерывна и ее норма не превосходит некоторого положительного $\nu < 1$, то множество X_0 сильно асимптотически устойчиво относительно (1.2).

Доказательство. Условия теоремы означают следующее. Для всех $x^0 \in \mathrm{bd}X_0$ и $\upsilon \in S$ найдутся выпуклые компактные множества $F'_+(x^0,\upsilon)$ и $F'_-(x^0,\upsilon)$, такие, что

$$h(F'_+(x^0,\upsilon), F'_-(x^0,\upsilon)) \leqslant \nu \tag{3.3}$$

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \delta^{-1} h(F(x^0+\delta\upsilon)+\delta F'_-(x^0,\upsilon), F(x^0)+\delta F'_+(x^0,\upsilon)) = 0$$

Обозначим

$$\rho(x^0,\upsilon,\delta) = h(F(x^0+\delta\upsilon)+\delta F'_-(x^0,\upsilon), F(x^0)+\delta F'_+(x^0,\upsilon))$$

В условиях теоремы функция $\rho(\cdot,\cdot,\cdot)$ непрерывна и

$$\rho_*(\delta) = \max_{x^0\in X_0,\upsilon\in S} \rho(x^0,\upsilon,\delta)$$

удовлетворяет условию $\delta^{-1}\rho_*(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Из (3.3) получаем

$$F(x^0+\delta\upsilon)+\delta F'_-(x^0,\upsilon) \subset F(x^0)+\delta F'_+(x^0,\upsilon)+\rho(x^0,\upsilon,\delta)S \subset$$

$$\subset F(x^0)+\delta F'_-(x^0,\upsilon)+\delta(\nu+\delta^{-1}\rho_*(\delta))S$$

$$F(x^0)+\delta F'_+(x^0,\upsilon) \subset F(x^0+\delta\upsilon)+\delta F'_-(x^0,\upsilon)+\rho(x^0,\upsilon,\delta)S \subset$$

$$\subset F(x^0+\delta\upsilon)+\delta F'_+(x^0,\upsilon))+\delta(\nu+\delta^{-1}\rho_*(\delta))S$$

Отсюда, при учете стационарности множества X_0 для всех достаточно малых δ следуют включения

$$F(X_0+\delta S) \subset X_0+\delta(\nu+\delta^{-1}\rho_*(\delta))S, \quad X_0 \subset F(X_0+\delta S)+\delta(\nu+\delta^{-1}\rho_*(\delta))S$$

которые эквивалентны (3.1). Теорема доказана.

Пример 3.1. Пусть X_0 – СМ относительно включения

$$x_{i+1} \in f(x_i) + \Xi$$

где $f(\cdot)$: $R^n \to R^n$ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция, а Ξ – выпуклое, компактное множество.

МО $F(x) = f(x) + \Xi$ сильно дифференцируемо [12], и при этом $F'_+(x^0,\upsilon) = f'(x^0)\upsilon, F'_-(x^0,\upsilon) = 0$. Из теоремы 3.2 следует, что множество X_0 сильно асимптотически устойчиво, если норма матрицы $f'(x)$ меньше единицы для всех точек $x \in \mathrm{bd}X_0$.

Применение теоремы 3.2 для исследования устойчивости СМ разностных включений сталкивается с существенными проблемами, вызванными чрезмерной ограничительностью условия сильной дифференцируемости МО. Например, это условие не обязательно выполнено для МО вида

$$F(x) = \{Ax:\ A \in \Omega\} \tag{3.4}$$

где Ω – некоторое выпуклое множество $(n \times n)$-матриц. Это по сути обесценивает теорему 3.2, так как разностные включения с правой частью вида (3.4) как раз и являются предметом изучения теории робастной устойчивости линейных дискретных систем.

Указанную трудность можно преодолеть, связав понятие производной МО с функцией вида (3.4). Это позволит обосновать более сильное утверждение. МО (3.4) рассматривались в связи с изучением обобщенных якобианов негладких функций [13] и получили обобщение под названием вееров [14].

Определение 3.1. [15] МО $D(\cdot)$: $R^n \to R^n$ называется веером, если:

1) множества $D(x)$ непусты, выпуклы и компактны;

2) $D(x^1 + x^2) \subset D(x^1) + D(x^2), \quad \forall x^1, x^2$;

3) $D(\lambda x) = \lambda D(x), \quad \forall x \in R^n, \quad \lambda > 0$:

4) $\|D\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \sup\limits_{y \in D(x)} \|y\| < +\infty$.

Понятие веера использовалось для определения предпроизводной негладких функций [14, 15]. Аналогично можно поступить и для МО.

Определение 3.2. Веер $D(\cdot) = D^+F(x^0, \cdot)$ назовем верхней предпроизводной МО $F(\cdot)$ в точке x^0, если справедливо равенство

$$\lim_{\upsilon \to 0} \|\upsilon\|^{-1} h_+(F(x^0) + D(\upsilon), \quad F(x^0 + \upsilon)) = 0 \tag{3.5}$$

Класс МО, которые имеют верхнюю предпроизводную достаточно широк и включает в себя, в частности, МО, удовлетворяющие условию Липшица. Нетрудно, однако, привести пример непрерывного МО для которого (3.5) не выполнено ни для какого веера $D(\cdot)$. Например, $F(x) = [0, |x|^{1/2}]$ не имеет верхней предпроизводной в точке $x = 0$.

В терминах верхних предпроизводных можно сформулировать следующее обобщение теоремы 2.1.

Теорема 3.3. Пусть X_0 – компактное, инвариантное множество относительно (1.2), $F(\cdot)$ – непрерывное МО, которое имеет непрерывную в окрестности $(\mathrm{bd}X_0) \times S$ верхнюю предпроизводную $D^+F(\cdot, \cdot)$. Если для всех $x \in \mathrm{bd}X_0 \|D^+F(x, \cdot)\| < 1$, то X_0 – сильно асимптотически устойчивое множество относительно (1.2).

Доказательство этой теоремы осуществляется по схеме, вполне аналогичной доказательству теоремы 3.2, и здесь не приводится.

Пример 3.2. Допустим, что X_0 – инвариантное (стационарное) множество относительно разностного включения

$$x_{i+1} \in D(x_i) + \Xi \tag{3.6}$$

где $D(\cdot)$ – МО вида (3.4). Очевидно, что МО $F(x) = D(x) + \Xi$ имеет в каждой точке x верхнюю предпроизводную, совпадающую с $D(\cdot)$ и $\|D^+F(x, \cdot)\| = \|D(\cdot)\| = \max\{\|A\|:\ A \in \Omega\}$. Таким образом, инвариантное множество X_0 сильно асимптотически устойчиво относительно (3.6), если $\|A\| < 1$ для всех $A \in \Omega$.

Пример 3.3. Рассмотрим одномерное разностное включение

$$x_{i+1} \in F(x_i), \quad F(x) = [-(\alpha x^2 + 1), (\alpha x^2 + 1)], \quad 0 < \alpha < 1/4$$

Можно показать, что отрезки $X_0^1 = [-x^1, x^1]$ и $X_0^2 = [-x^2, x^2]$, где $x^{12} = (1 \pm \sqrt{1-4\alpha})/(2\alpha)$, являются СМ рассматриваемой системы, причем отрезок X_0^2 будет минимальным СМ. Можно установить также, что

$$D^+F(x, \upsilon) = [-2\alpha x\upsilon, 2\alpha x\upsilon], \quad \|D^+F(x, \cdot)\| = 2\alpha|x|.$$

Следовательно, в силу теоремы 3.3, множество X_0^2 является сильно асимптотически устойчивым. Норма верхней предпроизводной в граничных точках отрезка X_0^1 больше единицы, и это множество не является устойчивым.

Работа выполнена при финансовом содействии Государственного Комитета Украины по науке и технологиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джури Э.И.* Робастность дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 1990. № 5. С. 3–28.
2. *Siljak D.* Parameter space methods for robust control design: a guided tour // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V.AC-34. No. 7. P. 674–688.
3. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
4. *Aubin J.P., Frankowska H.* Set-Valued Analysis. Birkhauser, Boston. 1990. 450 p.
5. *Maschler M., Peleg B.* Stable sets and stable points of setvalued dynamic systems with applications to game theory // SIAM J. Control and Optimiz. 1976. V. 14. No. 6. P. 985–995.
6. *Кунцевич В.М., Чеховой Ю.Н.* Нелинейные системы управления с частотно- и широтно импульсной модуляцией. Киев: Технiка, 1970. 339 с.
7. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с.
8. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969. 447 с.
9. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 455 с.
10. *Смирнов Г.В.* Слабая асимптотическая устойчивость дифференциальных включений по первому приближению. М.: ВЦ АН СССР. 1989. 43 с.
11. *Тюрин Ю.Н.* Математическая формулировка упрощенной модели производственного планирования // Экономика и математические методы. 1965. Т. 1. Вып. 3. С. 391–409.
12. *Печерская Н.А.* О дифференцируемости многозначных отображений // Вестн. ЛГУ. 1981. Вып. 2. № 7. С. 115–117.
13. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
14. *Ioffe A.D.* Nonsmooth analysis: differential calculus of nondifferentiable mapping // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. V. 266. No. 1. P. 1–56.
15. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 431 с.

Киев

Поступила в редакцию
23.III.1993