

УДК 531.36:534.1

© 1994 г. А.П. Сейранян

## СТОЛКНОВЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Рассматриваются автономные колебательные системы, зависящие от многих параметров. Исследуется поведение собственных значений в окрестности кратной точки. Методом возмущений показано, что взаимодействие собственных значений в окрестности исследуемой точки описывается семейством гипербол. Коэффициенты уравнений этих гипербол вычисляются с помощью собственного и присоединенного векторов и собственного вектора сопряженной задачи в точке кратности, а также приращений параметров. Полученные соотношения позволяют дать аналитическое описание и геометрическую интерпретацию двух интересных явлений, неоднократно обсуждавшихся в литературе: явления смены критического тона колебательной системы [1–3] и эффекта дестабилизации системы малым демпфированием [4–8]. В качестве примеров рассмотрены смена критического тона составной трубы, по которой течет жидкость, и дестабилизация малым демпфированием неконсервативной модели Циглера с двумя степенями свободы.

I. Рассмотрим линейную колебательную систему

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Aq = 0 \quad (1.1)$$

где  $M$ ,  $D$  и  $A$  – вещественные квадратные матрицы порядка  $m$ , характеризующие инерционные, демпфирующие и жесткостные свойства системы соответственно,  $q$  – вектор обобщенных координат размерности  $m$ . Предполагается, что элементы матриц  $M$ ,  $D$  и  $A$  гладко зависят от компонентов вектора параметров  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ , и матрица  $M$  неособая.

Отыскивая решение уравнения (1.1) в виде  $q = u \exp(\lambda t)$  ( $t$  – время) приходим к обобщенной задаче на собственные значения

$$[\lambda^2 M + \lambda D + A]u = 0 \quad (1.2)$$

где  $\lambda$  – собственное значение,  $u$  – собственный вектор размерности  $m$ .

Предположим, что вектору параметров  $p_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)$  отвечает алгебраически двукратное собственное значение  $\lambda_0$  (двукратный корень характеристического уравнения  $\det[\lambda^2 M + \lambda D + A] = 0$ ) с единственным, с точностью до множителя, собственным вектором  $u_0$ . Это означает, что матрица  $\lambda^2 M + \lambda D + A$  при  $\lambda = \lambda_0$ ,  $p = p_0$  имеет дефект, равный единице. В этом случае собственный вектор  $u_0$  и присоединенный вектор  $u_1$  определяются из уравнений

$$Lu_0 = 0 \quad (1.3)$$

$$Lu_1 = -[2\lambda_0 M_0 + D_0]u_0 \quad (1.4)$$

$$L = \lambda_0^2 M_0 + \lambda_0 D_0 + A_0, \quad M_0 = M(p_0), \quad D_0 = D(p_0), \quad A_0 = A(p_0) \quad (1.5)$$

где  $L$  – матричный оператор. В комплексном пространстве векторов  $C^m$  введем скалярное произведение  $(a, b)$  обычным образом и рассмотрим задачу на собственные значения для оператора, сопряженного к (1.5),

$$L^*v_0 = 0 \quad (1.6)$$

где  $L^* = \overline{L}^T$ . Умножив обе части (1.4) скалярно на  $v_0$ , получим соотношение

$$([2\lambda_0 M_0 + D_0]u_0, v_0) = 0 \quad (1.7)$$

поскольку  $(Lu_1, v_0) = (u_1, L^*v_0) = 0$  ввиду (1.6).

Исследуем поведение собственных значений  $\lambda$  в окрестности точки  $p = p_0$  в пространстве параметров  $R^n$ . С этой целью придадим вектору  $p_0$  приращение  $p = p_0 + \varepsilon k$ , где  $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  – произвольный нормированный вектор вариации,  $|k| = (k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2)^{1/2} = 1$ ,  $\varepsilon$  – малый параметр,  $\varepsilon > 0$ . Вследствие этого матрицы  $M, D, A$  также получают приращения

$$M = M_0 + \varepsilon M_1 + \dots, \quad D = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \quad A = A_0 + \varepsilon A_1 + \dots$$

$$M_1 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial M}{\partial p_j} k_j, \quad D_1 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial D}{\partial p_j} k_j, \quad A_1 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial A}{\partial p_j} k_j \quad (1.8)$$

Для решения задачи о возмущении спектра (1.2) целесообразно свести задачу (1.2) с помощью удвоения размерности к эквивалентной задаче на собственные значения  $B\tilde{u} = \lambda\tilde{u}$ . Это дает возможность воспользоваться результатами работы [9] о возмущении спектра несамосопряженных операторов. Используя в данном случае разложения

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon^{1/2}\lambda_1 + \varepsilon\lambda_2 + \dots, \quad u = u_0 + \varepsilon^{1/2}w_1 + \varepsilon w_2 + \dots \quad (1.9)$$

получим выражение для первой поправки  $\lambda_1$  в виде [10, 11]

$$\lambda_1^2 = \sum_{j=1}^n f_j k_j \quad (1.10)$$

$$f_j = -([\partial L / \partial p_j]u_0, v_0) \left[ ([2\lambda_0 M_0 + D_0]u_1, v_0) + (M_0 u_0, v_0) \right]^{-1} \quad (1.11)$$

В последнем соотношении векторы  $u_0, u_1, v_0$  определяются из решения задач (1.3), (1.4), (1.6), а производные  $\partial L / \partial p_j$  находятся в явном виде

$$\partial L / \partial p_j = \lambda_0^2 \partial M / \partial p_j + \lambda_0 \partial D / \partial p_j + \partial A / \partial p_j \quad (1.12)$$

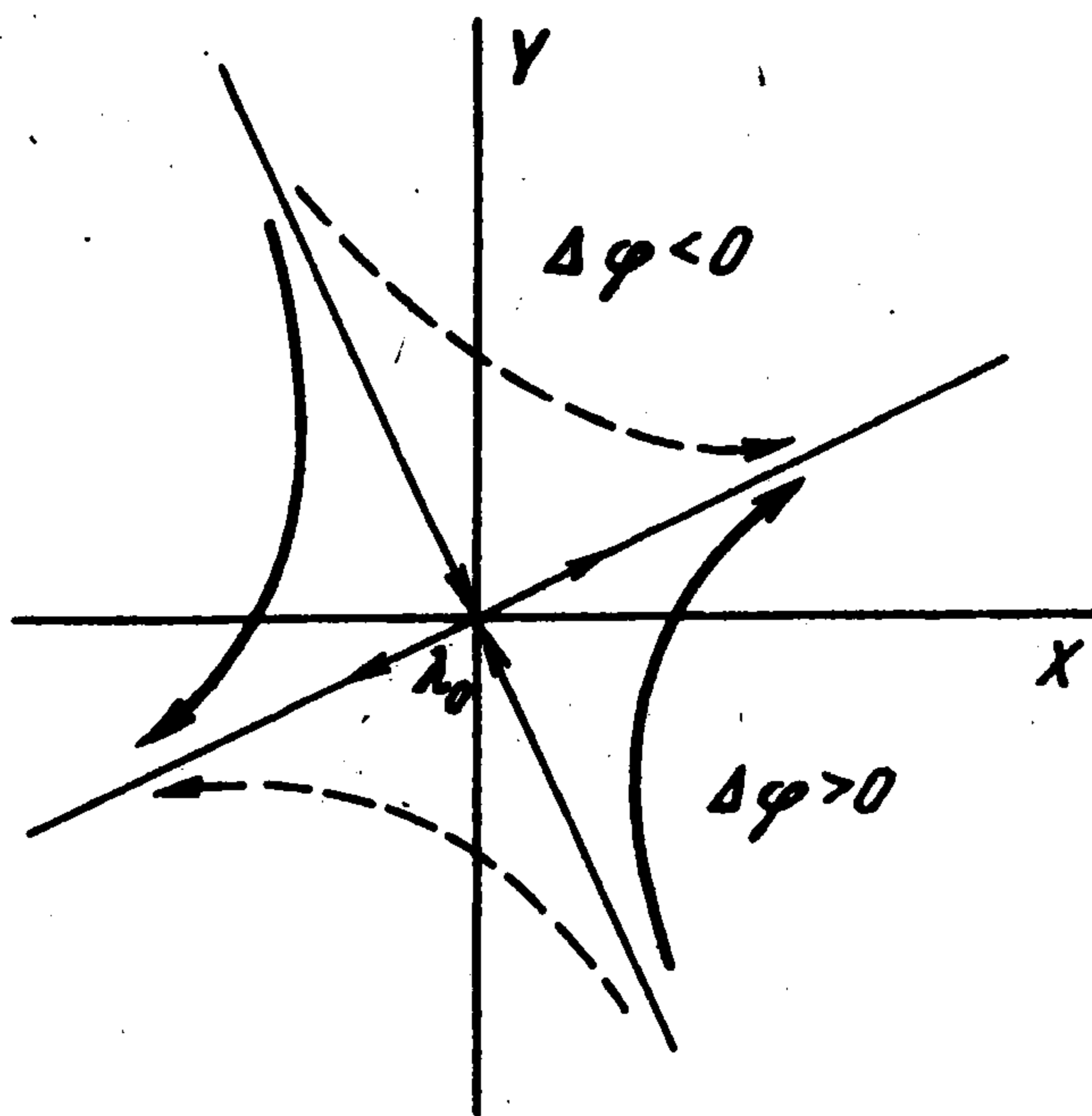
Заметим, что коэффициенты  $f_j$  в (1.11) выражаются через величины в точке  $p = p_0$  и не зависят от вектора вариации  $k$ . Вводя обозначения

$$a_j = \operatorname{Re} f_j, \quad b_j = \operatorname{Im} f_j, \quad \Delta p_j = \varepsilon k_j \quad (1.13)$$

и умножая (1.10) на  $\varepsilon$ , получим

$$\sqrt{\varepsilon}\lambda_1 = \left( \sum_{j=1}^n (a_j + ib_j)\Delta p_j \right)^{1/2} \quad (1.14)$$

Согласно (1.9) правая часть соотношения (1.14) является первым приближением изменения двукратного собственного значения  $\lambda_0$  (порядка  $\sqrt{\varepsilon}$ ) при изменении параметров  $\Delta p_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Заметим, что разложения (1.9) справедливы при достаточно



Фиг. 1

малых  $\varepsilon$ . Используя нормировку  $|k| = 1$  и обозначения  $\Delta p_j$  из (1.13), получим условие малости  $\varepsilon$  в виде

$$\varepsilon = \left( \sum_{j=1}^n (\Delta p_j)^2 \right)^{1/2} \ll 1 \quad (1.15)$$

Для исследования поведения собственных значений на комплексной плоскости  $\lambda$  введем обозначение для действительной и мнимой частей приращения

$$\sqrt{\varepsilon} \lambda_1 = X + iY \quad (1.16)$$

Используя (1.16) и возведя в квадрат (1.14), получим

$$X^2 - Y^2 = \sum_{j=1}^n a_j \Delta p_j, \quad 2XY = \sum_{j=1}^n b_j \Delta p_j \quad (1.17)$$

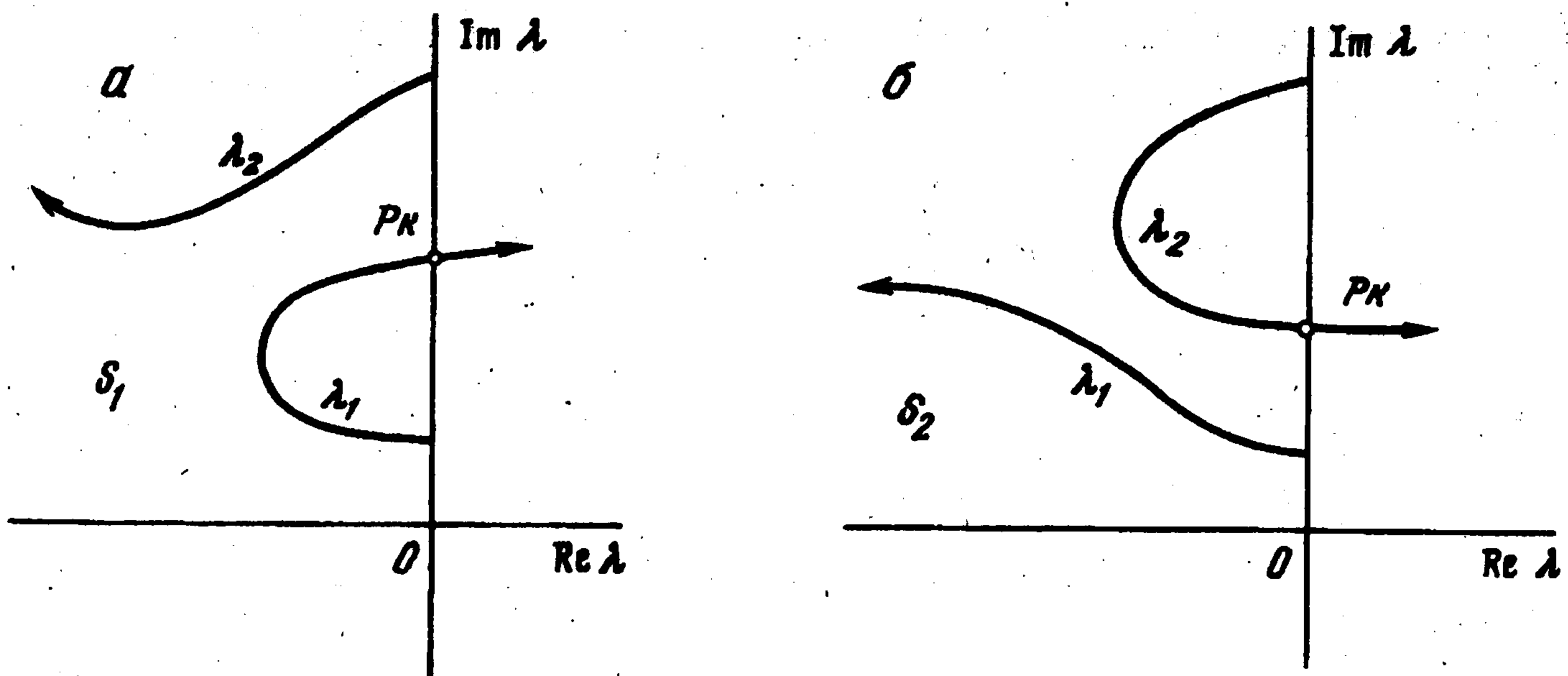
Исключая из системы уравнений (1.17) один из параметров, например  $\Delta p_1$ , имеем

$$b_1(X^2 - Y^2) - 2a_1XY = \Delta\varphi = \text{const} \quad (1.18)$$

$$\Delta\varphi = \sum_{j=2}^n (b_1 a_j - a_1 b_j) \Delta p_j \quad (1.19)$$

Уравнение (1.18) относительно  $X$  и  $Y$  представляет собой уравнение гиперболы с взаимно ортогональными асимптотами  $b_1 X = Y(a_1 \pm (a_1^2 + b_1^2)^{1/2})$ . На фиг. 1 показано асимптотическое поведение собственных значений на комплексной плоскости  $\lambda$  вблизи двукратного  $\lambda_0$  с единственным собственным вектором при фиксированных величинах  $\Delta p_j$  ( $j = 2, 3, \dots, n$ ) и изменении  $\Delta p_1$ . Стрелками показано "движение" собственных значений при монотонном увеличении параметра  $p_1$  в окрестности значения  $p_1^0$ . Собственные значения сближаются, сталкиваются, а затем расходятся под прямым углом к линии сближения. Эта картина реализуется при значении константы  $\Delta\varphi = 0$ , что согласно (1.18) означает вырождение гиперболы. Этот случай, в частности, реализуется, когда все параметры, кроме изменяющегося  $p_1$ , остаются неизменными:  $\Delta p_j = 0$  ( $j = 2, \dots, n$ ). При малых приращениях  $\Delta p_j$  ( $j = 2, \dots, n$ ), отвечающих постоянной  $\Delta\varphi \neq 0$  из (1.19), картина лобового столкновения "смазывается". Квадранты, в которых лежат ветви гиперболы, изменяются на смежные при смене знака константы  $\Delta\varphi$ , фиг. 1.

Для построения гипербол (1.18) следует с помощью решения задач на собственные



Фиг. 2

значения (1.3), (1.4), (1.6) определить величины  $\lambda_0, u_0, u_1, v_0$ , затем по формулам (1.11), (1.13) найти постоянные  $a_j, b_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) и построить асимптоты. Далее, задавшись приращениями  $\Delta p_j$  ( $j = 2, \dots, n$ ), по формулам (1.18), (1.19) окончательно найдем семейство гипербол. Заметим, что формулы (1.18), (1.19) и фиг. 1 дают не только качественную, но и количественную картину взаимодействия собственных значений в окрестности двукратного корня  $\lambda_0$  с матрицей  $L$ , дефект которой равен единице. Если нужно исследовать взаимодействие собственных значений при изменении параметра  $p_s$  и фиксированных вариациях  $\Delta p_j$  ( $j = 1, \dots, n; j \neq s$ ), то в соотношениях (1.18), (1.19) индекс 1 надо заменить на  $s$ , а суммирование в (1.19) производить по всем индексам  $j = 1, \dots, n; j \neq s$ .

2. Рассмотрим более подробно наличие в системе (1.1) двух независимых параметров  $p_1$  и  $p_2$ . В этом случае уравнение гиперболы (1.18), (1.19) принимает вид

$$b_1(X^2 - Y^2) - 2a_1XY = \Delta p_2(b_1a_2 - b_2a_1) \quad (2.1)$$

Так как параметры  $p_1$  и  $p_2$  по предположению независимы, то векторы  $(a_1, b_1)$  и  $(a_2, b_2)$  в общем случае также независимы, и величина  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ . Поэтому гипербола (2.1) вырождается лишь при  $\Delta p_2 = 0$ , т.е. когда варьируется лишь параметр  $p_1$ . При изменении знака  $\Delta p_2$  квадранты, в которых лежат ветви гиперболы, заменяются на смежные. Итак, при  $\Delta p_2 \neq 0$  взаимодействие собственных значений описывается невырожденной гиперболой (2.1). Это говорит о том, что в пространстве двух параметров двукратное комплексное собственное значение  $\lambda_0$  с единственным собственным вектором в общем случае является изолированной точкой. Приведенные выше рассуждения согласуются с результатами [12, 13], согласно которым двухпараметрическое семейство вещественных матриц в случае общего положения имеет своей особенностью двукратное изолированное собственное значение с жордановой клеткой второго порядка.

Проведенный анализ взаимодействия собственных значений позволяет описать и объяснить явление смены критического тона, часто наблюдаемое в колебательных системах при параметрических исследованиях. Это явление наблюдалось при исследованиях аэроупругой устойчивости (флаттера) крыльев самолетов, колебательной устойчивости трубопроводов, по которым течет жидкость и т.д. [1-3]. Качественно этот эффект показан на фиг. 2, где изображено поведение ветвей собственных значений при изменении параметра неконсервативной нагрузки  $p \geq 0$ . Говорят, что система  $S_1$ , показанная на фиг. 2, а, теряет устойчивость по первому тону, а система  $S_2$ , полученная из  $S_1$  непрерывным изменением параметров и показанная на фиг. 2, б, теряет устойчивость по второму тону.

В качестве примера рассмотрим плоские колебания составной трубы, состоящей из трех

жестких звеньев, соединенных упругими шарнирами с жесткостью  $c$  [3]. Предполагается, что каждое звено имеет длину  $l$  и обладает массой  $ml$ . Первое звено жестко закреплено, а два других могут перемещаться в горизонтальной плоскости. Таким образом, данная система имеет две степени свободы  $\varphi_1, \varphi_2$  и представляет собой модель Бенджамина упругой трубы, по которой течет жидкость. Предполагается, что жидкость несжимаема и течет с постоянной скоростью  $U$  относительно стенок трубы. Массу жидкости на единицу длины трубы обозначим через  $m_f$ ; демпфирование не учитывается. Тогда уравнения малых колебаний составной трубы принимают вид [3]

$$\begin{vmatrix} 4/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{vmatrix} + \eta p \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2-p^2 & p^2-1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.2)$$

где  $p$  и  $\eta$  – безразмерные параметры: скорость истечения жидкости и относительная масса соответственно:

$$p = Ul(m_f / (cl))^{1/2}, \quad p \geq 0, \quad \eta = (m_f / (m + m_f))^{1/2}, \quad 0 < \eta < 1 \quad (2.3)$$

Точками в (2.2) обозначено дифференцирование по безразмерному времени  $\tau = t(c / (m + m_f)l^3)^{1/2}$ .

Подставляя в (2.2) выражения  $\varphi_j = \xi_j \exp(\lambda\tau)$  ( $j = 1, 2$ ) и приравнявая определитель нулю, получим характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + (24/7)\eta p \lambda^3 + (1/7)(108 - 30p^2 + 36\eta^2 p^2)\lambda^2 + (36/7)\eta p(5 - p^2)\lambda + 36/7 = 0 \quad (2.4)$$

Собственные значения  $\lambda$  зависят от двух параметров  $p$  и  $\eta$ , введенных в (2.3). Система (2.2) устойчива, если для всех собственных значений выполняется  $\text{Re } \lambda \leq 0$ ; в противном случае система неустойчива.

Численно анализировалось [3] поведение собственных значений  $\lambda$  от параметра скорости  $p$  при фиксированных значениях параметра относительной массы  $\eta$ . Было обнаружено явление смены критического тона: при некоторых  $\eta$  критическим был первый тон, а при других  $\eta$  критическим становился второй тон.

Для анализа этого явления прежде всего отыщем двукратные собственные значения. Если  $\lambda = \alpha + i\omega$  является двукратным собственным значением, то  $\bar{\lambda} = \alpha - i\omega$  также является двукратным собственным значением. Поэтому характеристическое уравнение для системы второго порядка имеет вид

$$(\lambda - \alpha - i\omega)^2 (\lambda - \alpha + i\omega)^2 = \lambda^4 - 4\alpha\lambda^3 + 2(3\alpha^2 + \omega^2)\lambda^2 - 4\alpha(\alpha^2 + \omega^2)\lambda + (\alpha^2 + \omega^2)^2 = 0 \quad (2.5)$$

Приравнявая соответствующие члены уравнений (2.4) и (2.5), найдем единственную пару комплексно-сопряженных двукратных корней  $\lambda_0 = \alpha_0 \pm i\omega_0$ :

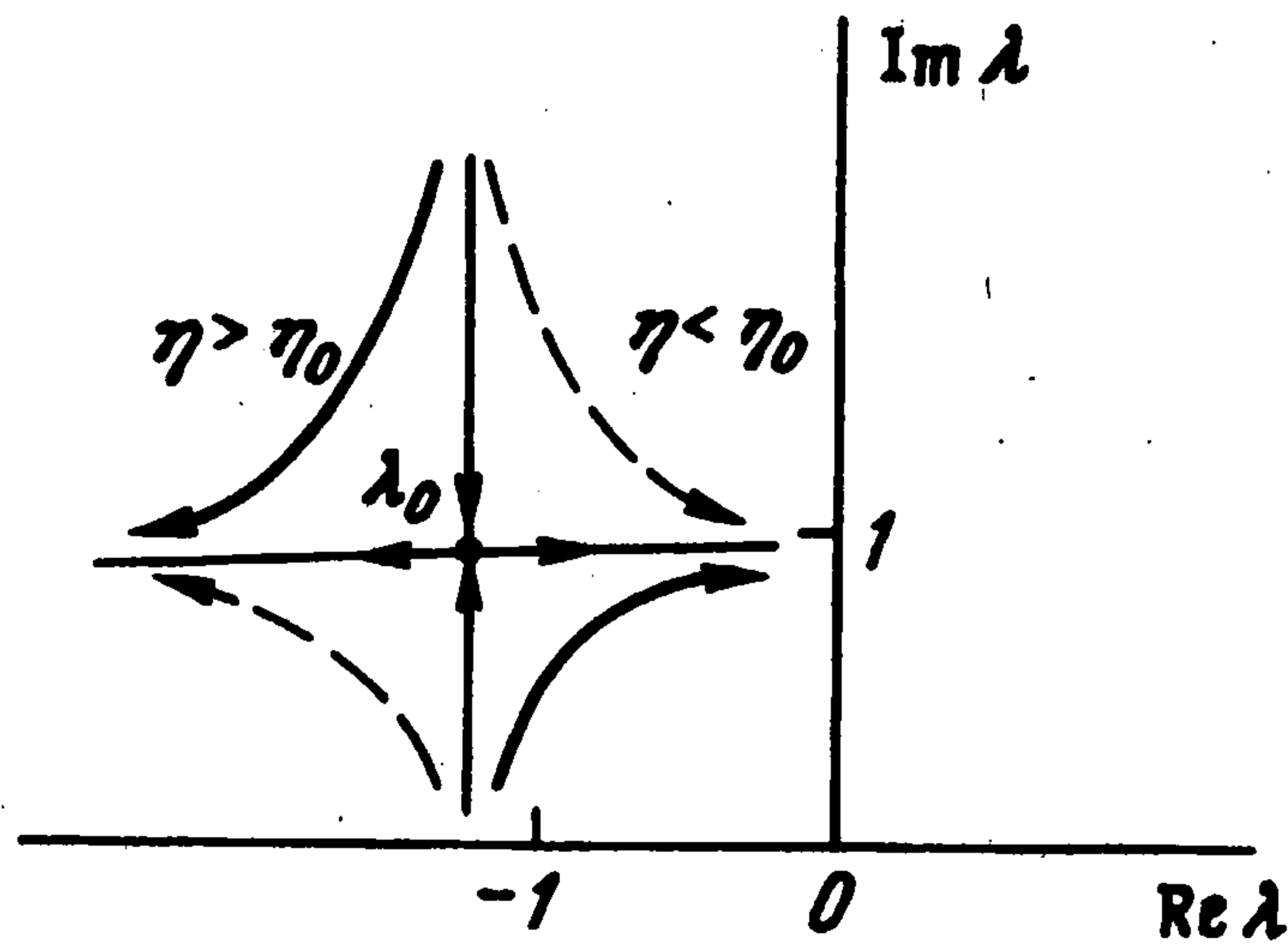
$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -\left(2\left(1 - 6/(7\sqrt{7})\right)\right)^{1/2} = -1,1628 \\ \omega_0 &= \left(2\left(27/(7\sqrt{7}) - 1\right)\right)^{1/2} = 0,9569 \end{aligned} \quad (2.6)$$

соответствующую значениям параметров  $p_0, \eta_0$ :

$$\begin{aligned} p_0 &= \left(5 - 4/\sqrt{7}\right)^{1/2} = 1,8677 \\ \eta_0 &= \left(7(7\sqrt{7} - 6) / (18(5\sqrt{7} - 4))\right)^{1/2} = 0,7264 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Решив уравнения (1.3), (1.4), (1.6), вычислим постоянные  $a_j, b_j$  ( $j = 1, 2$ ). Из (1.10), (1.13) и согласно уравнениям (1.14), (1.16) найдем

$$\begin{aligned} X + iY &= ((a_1 + ib_1)\Delta p + (a_2 + ib_2)\Delta\eta)^{1/2} \\ a_1 &= 6,8832, \quad b_1 = 0,2788; \quad a_2 = 1,3304, \quad b_2 = -6,7855 \end{aligned} \quad (2.8)$$



Фиг. 3

В результате уравнение гиперболы (2.1) принимает вид

$$X^2 - 49,3717XY - Y^2 = 168,8375\Delta\eta \quad (2.9)$$

Таким образом, взаимодействие собственных значений  $\lambda$  в окрестности точки  $p_0, \eta_0$  описывается гиперболой (2.9) с ортогональными асимптотами  $X = 49,3919Y$  и  $X = -0,02024Y$ , фиг. 3. Стрелками показано "движение"  $\lambda$  при увеличении  $p$ . Выражения (2.6)–(2.9) находятся в полном соответствии с результатами численных расчетов [3]. Они иллюстрируют явление смены критического тона: при  $\eta > \eta_0$  флаттер происходит по первому тону, а при  $\eta < \eta_0$  устойчивость теряется по второму тону.

3. Взаимодействие собственных значений вблизи двукратного  $\lambda_0$  позволяет в общем виде описать и эффект дестабилизации неконсервативной системы малым демпфированием. Суть этого явления состоит в том, что критическая нагрузка системы с малым демпфированием оказывается меньше, чем критическая нагрузка идеальной системы (без демпфирования). Этот эффект был обнаружен Циглером [4] и исследовался другими авторами ([5–8] и др.).

Для описания эффекта дестабилизации рассмотрим колебательную систему с малым демпфированием

$$M\ddot{q} + \beta D\dot{q} + A(p)q = 0 \quad (3.1)$$

зависящую от двух параметров: параметра нагрузки  $p$  и малого параметра  $\beta > 0$ .

Соответствующая задача на собственные значения имеет вид

$$Lu = 0, \quad L = \lambda^2 M + \lambda \beta D + A(p) \quad (3.2)$$

Рассмотрим сначала идеальную систему, положив в (3.2)  $\beta = 0$ . Допустим, что значению  $p = p_0$  отвечает чисто мнимый двукратный корень  $\lambda_0 = i\omega_0$  характеристического уравнения  $\det[\lambda_0^2 M + A(p_0)] = 0$  с единственным собственным вектором  $u_0$ . Значение  $p_0$ , как будет показано ниже, является границей области устойчивости идеальной системы. Согласно уравнениям (1.3), (1.4), (1.6), (3.2) имеем

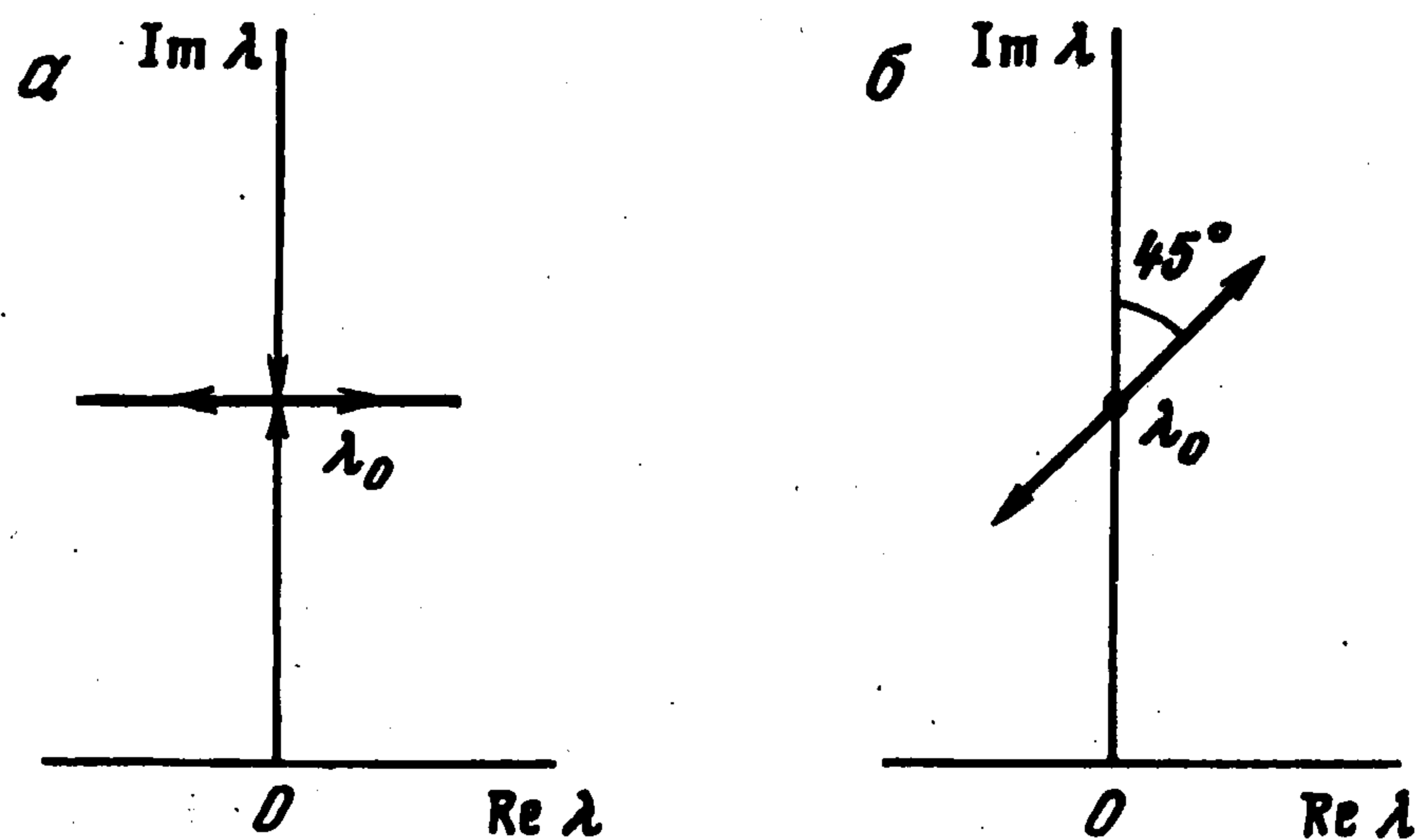
$$[A(p_0) - \omega_0^2 M]u_0 = 0, \quad [A^T(p_0) - \omega_0^2 M^T]v_0 = 0, \quad [A(p_0) - \omega_0^2 M]u_1 = -2i\omega_0 M u_0 \quad (3.3)$$

Из уравнений (3.3) найдем собственный вектор  $u_0$ , присоединенный вектор  $u_1$  и собственный вектор сопряженной задачи  $v_0$ . Согласно (3.2) найдем

$$\partial L / \partial p = \partial A / \partial p, \quad \partial L / \partial \beta = \lambda D \quad (3.4)$$

Из уравнений (1.7), (1.10), (1.11) и (3.4) получим

$$\epsilon \lambda_1^2 = -[(\partial A / \partial p)u_0, v_0] \Delta p + \lambda_0 (D u_0, v_0) \beta \left( 2\lambda_0 (M u_1, v_0) \right)^{-1} \quad (3.5)$$



Фиг. 4

Заметим, что согласно (3.3) векторы  $u_0, v_0$  — действительные величины, а вектор  $u_1$ , определенный с точностью до слагаемого  $\gamma u_0$ ,  $\gamma = \text{const}$ , можно выбрать чисто мнимым. Поэтому соотношение (3.5) можно записать в виде

$$X + iY = \sqrt{\epsilon} \lambda_1 = (a\Delta p + ib\beta)^{1/2} \quad (3.6)$$

$$a = -([\partial A / \partial p]u_0, v_0)(2\lambda_0(Mu_1, v_0))^{-1}, \quad b = -(Du_0, v_0)(2i(Mu_1, v_0))^{-1}$$

Здесь  $a$  и  $b$  — действительные постоянные.

Рассмотрим соотношение (3.6), в котором положим  $\beta = 0$ , а постоянная  $a$  положительна. Тогда с увеличением  $p$  два собственных значения  $\lambda$  сближаются вдоль мнимой оси, сливаются при  $p = p_0$  в одно  $\lambda_0 = i\omega_0$ , а затем расходятся в разные стороны вдоль линии, перпендикулярной мнимой оси (фиг. 4, а). Стрелками показано изменение  $\lambda$  при увеличении  $p$ . Таким образом,  $p_0$  — критическое значение для идеальной системы: при  $p < p_0$  система устойчива, а при  $p \geq p_0$  — неустойчива.

Если  $\Delta p = 0$ , а  $\beta$  возрастает от нуля, то двукратное собственное значение  $\lambda_0$  расщепляется вдоль прямой, составляющей угол  $45^\circ$  с мнимой осью. На фиг. 4, б показан случай  $b > 0$ . Если  $b < 0$ , то расщепление происходит вдоль прямой, перпендикулярной показанной на фиг. 4, б.

Если же один из параметров  $p$  или  $\beta$  фиксирован, а другой изменяется, то непосредственно из (3.6) получим уравнения гипербол

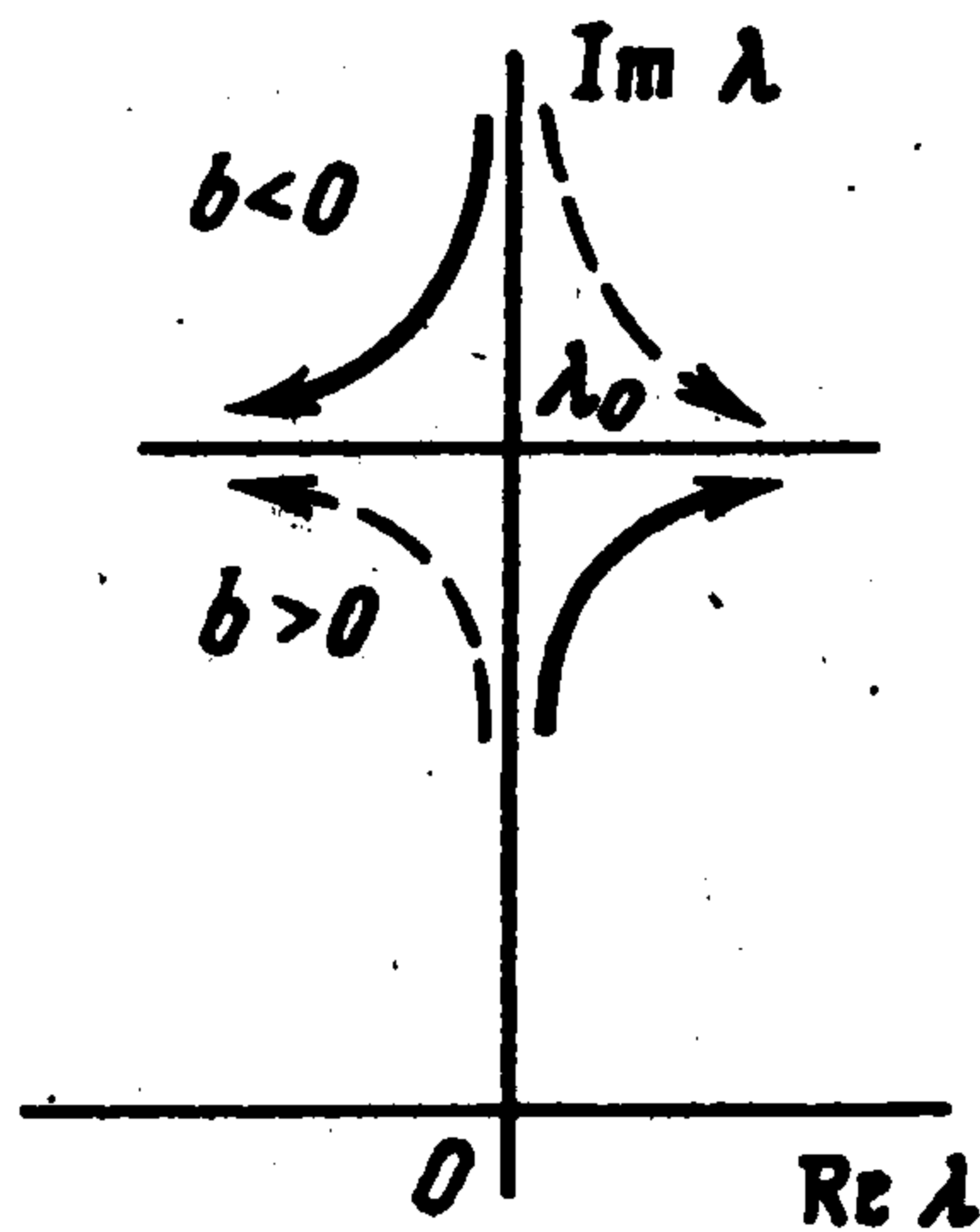
$$X^2 - Y^2 = a\Delta p, \quad 2XY = b\beta \quad (3.7)$$

Картина взаимодействия собственных значений, когда параметр  $\beta$  фиксирован, а  $p$  возрастает, показана на фиг. 5. Случай фиксированной величины  $\Delta p < 0$  и увеличивающегося значения  $\beta$  показан на фиг. 6. Сплошные линии иллюстрируют случай  $b > 0$ , а штриховые — случай  $b < 0$ . При построении кривых, изображенных на фиг. 5 и 6, величины  $X$  и  $Y$  находятся согласно (3.7) из уравнений

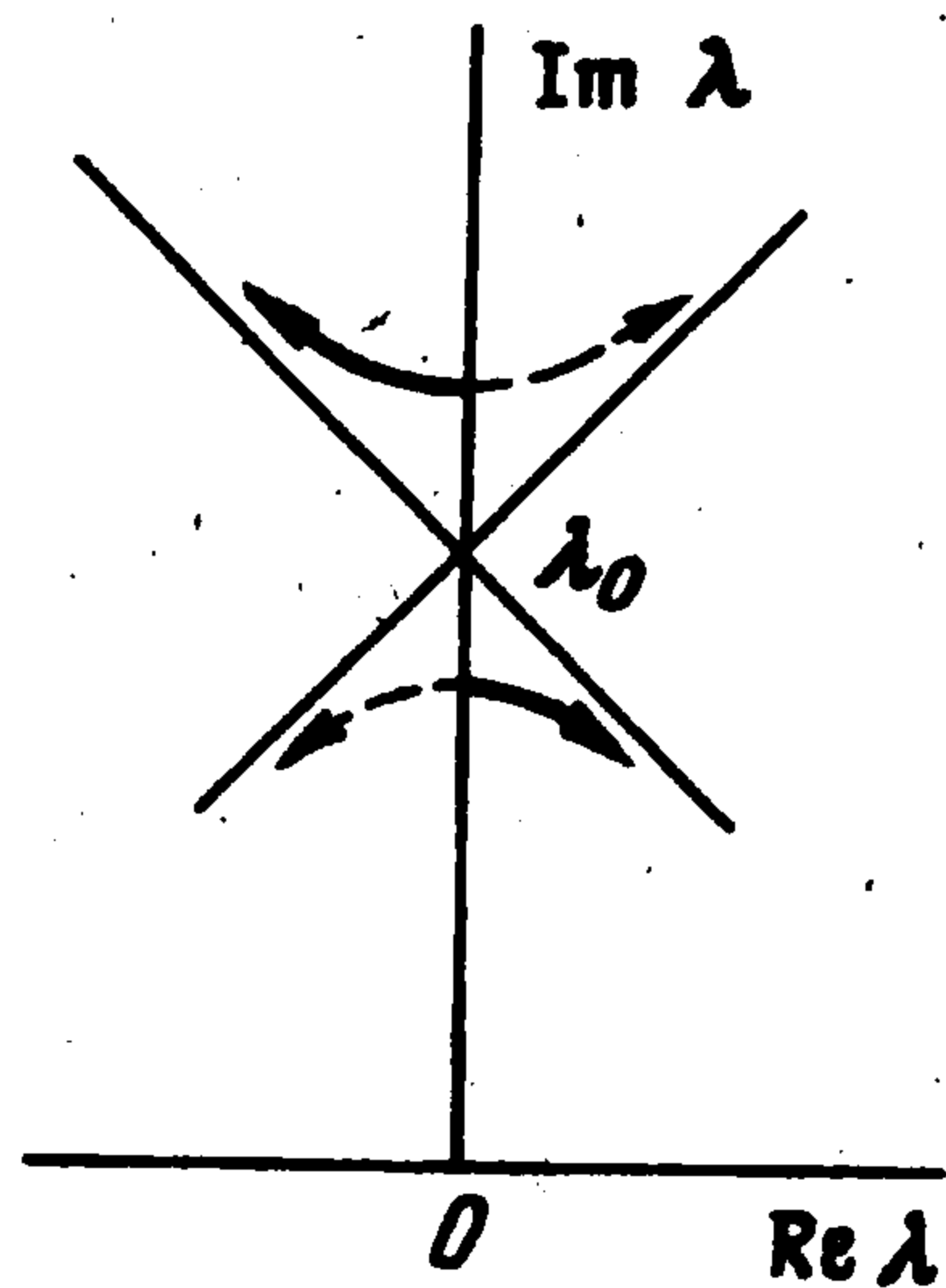
$$X^2, Y^2 = \frac{1}{2}(\pm a\Delta p + (a^2\Delta p + b^2\beta^2)^{1/2}). \quad (3.8)$$

Из соотношений (3.6)–(3.8) и картины взаимодействий  $\lambda$ , представленной на фиг. 5 и 6, следует эффект дестабилизации сколь угодно малым демпфированием  $\beta > 0$ . Интересно, что из этих же результатов следует и дестабилизация малым отрицательным демпфированием  $\beta < 0$ , так как изменение знака  $\beta$  согласно (3.7) эквивалентно изменению знака константы  $b$ .

4. В качестве примера рассмотрим плоскую систему типа двойного маятника с вязкоупругими шарнирами [4]. Предполагается, что моменты в этих шарнирах равны  $c\phi_1 + d\dot{\phi}_1$  и  $c(\phi_2 - \phi_1) + d(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1)$  соответственно, где  $c$  — жесткость,  $d$  — коэффициент



Фиг. 5



Фиг. 6

демпфирования. Считается, что посередине и на конце маятника расположены сосредоточенные массы  $2m$  и  $m$ , длина звеньев одинакова и равна  $l$ , а на свободном конце к системе приложена следящая сила  $P$ . Гравитационные силы не учитываются. Задача об устойчивости этой системы исследовалась Циглером [4].

Введем безразмерные переменные: величину следящей силы  $p$ , коэффициент демпфирования  $\beta$  и время  $\tau$ :

$$p = Pl/c, \quad \beta = d/(1(cm)^{1/2}), \quad \tau = t(c/(ml^2))^{1/2}$$

Уравнения колебаний системы [4] можно записать в этих переменных в виде (3.1), где

$$M = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.1)$$

$$A(p) = \begin{vmatrix} 2-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad q = \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{vmatrix}$$

Для двукратного собственного значения найдем изолированную точку  $\lambda_0 = i\omega_0 = i2^{-1/4}$ , соответствующую значению  $p_0 = 7/2 - \sqrt{2}$ . При возрастании  $p$  от нуля два чисто мнимых корня  $\lambda$  идеальной системы ( $\beta = 0$ ) сближаются по мнимой оси, сливаются при  $p = p_0$  в одно значение  $\lambda_0$ , а затем становятся комплексно-сопряженными. Таким образом, идеальная система устойчива при  $0 \leq p < p_0$ , а при  $p \geq p_0$  неустойчива.

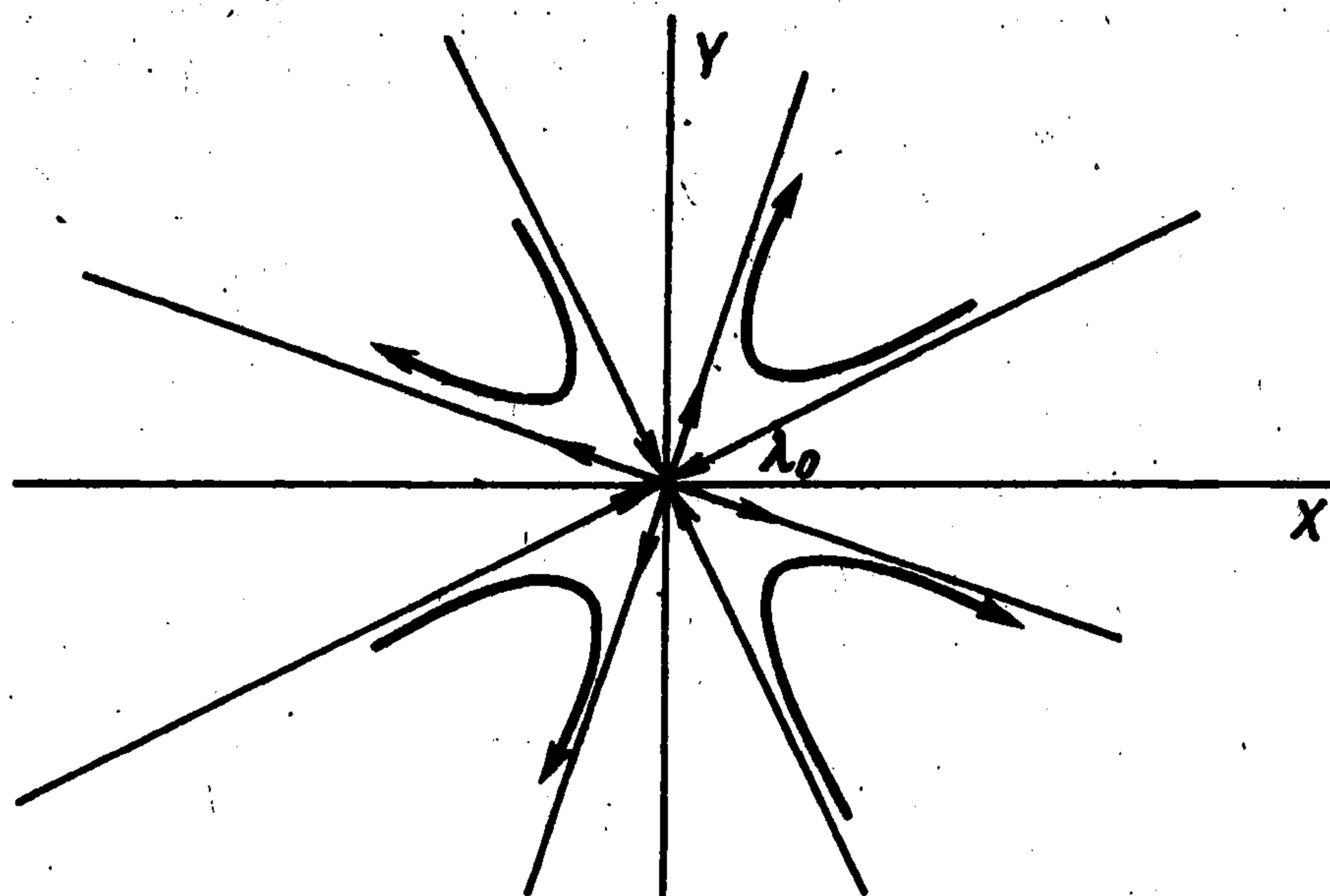
Исследуем теперь поведение собственных значений системы с малым демпфированием  $\beta > 0$ . Решим уравнение (3.3) с учетом (4.1) при  $p = p_0$ ,  $\lambda = \lambda_0$  и вычислим постоянные  $a, b$  согласно (3.6); найдем

$$u_0 = \begin{vmatrix} 3-2\sqrt{2} \\ 1 \end{vmatrix}, \quad v_0 = \begin{vmatrix} 1 \\ \sqrt{2}/2-2 \end{vmatrix}, \quad u_1 = i \begin{vmatrix} (3-2\sqrt{2})2^{1/4} \\ 0 \end{vmatrix} \\ a = 1/4, \quad b = -(7-2\sqrt{2})/(8 \cdot 2^{1/4}) \quad (4.2)$$

Таким образом, асимптотическое поведение собственных значений в задаче Циглера описывается гиперболами (3.7), показанными на фиг. 5, 6. Заметим, что величины  $a, b$  (4.2) дают не только качественную картину, но и сообщают количественную информацию при выполнении условия малости параметра, по которому производятся разложения (1.15).

5. Выше подробно был рассмотрен случай двукратного собственного значения. Аналогично можно рассмотреть и более общий случай  $r$ -кратного собственного значения  $\lambda_0$ , которому отвечает один линейно независимый вектор  $u_0$ . Записывая в этом случае разложения в виде [9]

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon^{1/r} \lambda_1 + \varepsilon^{2/r} \lambda_2 + \dots, \quad u = u_0 + \varepsilon^{1/r} w_1 + \varepsilon^{2/r} w_2 + \dots$$



Фиг. 7

и произведя выкладки, аналогичные проделанным в разд. 1, получим асимптотические соотношения

$$X + iY = \varepsilon^{1/r} \lambda_1 = \left( \sum_{j=1}^n (a_j + ib_j) \Delta p_j \right)^{1/r} \quad (5.1)$$

$$a_j = \operatorname{Re} f_j, \quad b_j = \operatorname{Im} f_j$$

$$f_j = -([\partial L / \partial p_j] u_0, v_0) [([D + 2\lambda_0 M] u_{r-1}, v_0) + (M u_{r-2}, v_0)]^{-1}$$

В выражении (5.1)  $u_0$  и  $v_0$  – собственные векторы в задачах (1.3), (1.6), а  $u_1, u_2, \dots, u_{r-1}$  – цепочка присоединенных векторов, удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{aligned} [\lambda_0^2 M + \lambda_0 D + A] u_j + [2\lambda_0 M + D] u_{j-1} + M u_{j-2} &= 0 \\ j = 1, \dots, r-1; \quad u_{-1} &= 0 \end{aligned}$$

Взаимодействие собственных значений на комплексной плоскости при изменяющемся параметре  $p_s$  и фиксированных величинах  $\Delta p_j$  ( $j = 1, \dots, n; j \neq s$ ) иллюстрируется фиг. 7, где показан случай  $r = 4$ . При монотонном изменении параметра  $p_s$  в окрестности  $p_s^0$  и  $\Delta p_j = 0$  ( $j = 1, \dots, n; j \neq s$ )  $r$  собственных значений сближаются под углами  $2\pi/r$ , при  $p_s = p_s^0$  сливаются в одно значение  $\lambda_0$ , а затем расходятся по биссектрисам этих углов. При ненулевых  $\Delta p_j$  картина взаимодействия, вообще говоря, "смазывается", т.е. описывается невырожденными гиперболами.

Автор благодарит В.В. Румянцева и В.А. Светлицкого за обсуждения.

Работа выполнена по программе "Динамика, прочность и надежность машин, приборов и конструкций".

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Буньков В.Г. Расчет оптимальных флаттерных характеристик методом градиента // Тр. ЦАГИ. 1969, Вып. 1166. С. 3–23.
2. Bishop R.E.D., Fawzy I. Free and forced oscillation of a vertical tube containing a flowing fluid // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. Ser. A. 1976. V. 284. № 1316. P. 1–47.
3. Sugiyama Y. and Noda T. Studies on stability of two-degrees-of-freedom articulated pipes conveying fluid // Bull. JSME. 1981. V. 24. № 194. P. 1354–1362.
4. Ziegler H. Die stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ing. – Arch. 1952, V. 20. № 1. P. 49–56.
5. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.

6. *Herrmann G.* Stability of equilibrium of elastic systems subjected to nonconservative forces // *Appl. Mech. Revs.* 1967. V. 20. № 2. P. 103–108.
7. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384 с.
8. *Сейранян А.П.* Парадокс дестабилизации в задачах устойчивости неконсервативных систем // *Успехи механики.* 1990. Т. 13. № 2. С. 89–124.
9. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // *Успехи мат. наук.* 1960. Т. 15. Вып. 3. С. 3–80.
10. *Сейранян А.П.* Анализ чувствительности собственных значений и развитие неустойчивости // *Strojnický čas.* 1991. V. 42. № 3. P. 193–208.
11. *Seyranian A.P.* Sensitivity analysis of multiple eigenvalues // *Mech. Struct. and Mach.* 1993. V. 21. № 2. P. 261–284.
12. *Галин Д.М.* О вещественных матрицах, зависящих от параметров // *Успехи мат. наук.* 1972. Т. 27. Вып. 1. С. 241–242.
13. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.

Москва

Поступила в редакцию  
26.IV.1993